ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 8 Сентябрь 1968 Октябрь № 5

УДК 517.9:533.9

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А. А. САМАРСКИЙ, П. П. ВОЛОСЕВИЧ, М. И. ВОЛЧИНСКАЯ, С. П. КУРДЮМОВ

(Москва)

§ 1. Введение

При теоретических исследованиях ряда прикладных вопросов магнитной гидродинамики (различные типы МГД-генераторов, некоторые проблемы астрофизики и т. д.) большой интерес представляет изучение процессов взаимодействия сжимаемого электропроводного газа с магнитным полем при произвольных числах Рейнольдса Re_m и параметрах магнитного взаимодействия $R_H = H^2/8\pi p$, где H — напряженность магнитного поля, p — давление. В этом случае, наряду с физическими экспериментами, важную роль играет исследование математических моделей, учитывающих в основных чертах нелинейные зависимости нестационарных процессов магнитной гидродинамики. При этом численные методы даже в одномерном приближении позволяют не только изучить количественные стороны процессов, но и установить ряд новых качественных закономерностей. Так, использование численных методов для уравнений магнитной гидродинамики с учетом сложных нелинейных диссипативных процессов позволило решить ряд актуальных физических задач [1–6]. В [6] описано новое физическое явление так называемого эффекта T-слоя — высокотемпературного, электропроводного, самоподдерживающегося слоя газа, возникающего на определенном участке массы вследствие джоулева нагрева.

Настоящая работа посвящена описанию численных методов решения уравнений магнитной гидродинамики, которые, в частности, применялись при изучении явления T-слоя. Предполагается, что коэффициенты теплопроводности и электропроводности могут быть произвольными функциями температуры и плотности. Метод и соответствующие программы для ЭВМ позволяют решать большой комплекс задач с различными комбинациями граничных условий и уравнений состояния вещества. Учитывается также, что изучаемая среда может состоять из нескольких областей с различными сильно меняющимися физическими параметрами. Реальная физическая вязкость не учитывается.

Система уравнений магнитной гидродинамики решается методом конечных разностей. В основу положена методика решения уравнений гидродинамики с теплопроводностью (без магнитного поля), созданная А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским в 1952 г.

Рассматриваются неявные консервативные разностные схемы, которые являются безусловно-устойчивыми. Консервативность разностных схем очень существенна при учете разрывов в решении (контактных и ударных волн), так как она обеспечивает сходимость разностных схем и при наличии разрывов.

Методика применима к решению многообластных задач с сильно меняющимися физическими параметрами среды. В этом случае к разностной схеме предъявляются высокие требования надежности в смысле устойчивости по отношению к локальным нарушениям монотонности.

Метод последовательных прогонок для решения задач гидродинамики с теплопроводностью (без учета магнитного поля), в разработке которого принимал участие Н. Н. Калиткин, применялся с 1958 г. Аналогичный метод независимо предложен также в [7].

Методика решения уравнений магнитной гидродинамики, излагаемая в настоящей работе, была создана в 1962 г. и впервые докладывалась на третьем Рижском совещании по магнитной гидродинамике в 1964 г.

Авторы выражают благодарность А. Н. Тихонову за внимание к работе и В. Я. Гольдину и Н. Н. Калиткину за полезные обсуждения.

Авторы благодарны Д. А. Гольдиной, составившей программу расчета уравнений магнитной гидродинамики на ЭВМ по описанным в настоящей работе методам, а также В. Н. Равинской и А. А. Иванову, участвовавшим в составлении отдельных частей программы и проведении численных расчетов.

§ 2. Система дифференциальных и разностных уравнений магнитной гидродинамики

1. Пусть t — время, $\mathbf{H}$ — вектор магнитной напряженности, v — скорость, ρ — плотность вещества, p — давление, ε — внутренняя энергия. Система уравнений магнитной гидродинамики с учетом нелинейной электропроводности и теплопроводности в абсолютной системе единиц Гаусса имеет вид [8]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p/\rho - [\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]/4\pi\rho, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^2/2 + \rho\varepsilon + H^2/8\pi) = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{q},$$

$$\mathbf{q} = \rho\mathbf{v}(v^2/2) + \varepsilon + p/\rho) + [\mathbf{H}[\mathbf{v}\mathbf{H}]]/4\pi - \nu_m[\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H})/4\pi + W, \tag{2.1}$$

$$\partial\mathbf{H}/\partial t = \mathrm{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}] - \mathrm{rot}[\nu_m\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}), \quad W = -\varkappa\nabla T, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0,$$

где $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ — магнитная вязкость, c — скорость света.

Коэффициенты электропроводности σ и теплопроводности $\varkappa$ являются нелинейными функциями температуры T и плотности ρ и удовлетворяют

условиям $\partial\sigma / \partial T \geqslant 0$, $\partial\varkappa / \partial T \geqslant 0$. Внутренняя энергия и давление являются функциями плотности и температуры.

2. Обозначим через r, φ, z цилиндрические или декартовы координаты. Пусть одномерное движение среды направлено по эйлеровой оси r. Предположим, что в плоском случае может существовать отличная от нуля компонента H_r вектора $\mathbf{H}$, направленная вдоль движения, и компоненты H_φ и H_z, перпендикулярные к направлению движения. Из уравнения $\operatorname{div}\mathbb{H} = 0$ имеем в плоском случае $H_r = H_{r_0} = \text{const}$, а в случае осевой симметрии $H_{r_0} = 0$. Обозначим через v_r, v_φ, v_z соответствующие компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$.

Введем в направлении движения r массовую лагранжеву координату x, связанную с r формулой $dx = \rho r^{\nu-1} dr$, где $\nu = 1$ соответствует плоскому случаю, $\nu = 2$ — случаю осевой симметрии.

3. Решение системы (2.1) ищется в ограниченной области $0 \leqslant x \leqslant l$, где $x = 0$ — левая граница плоской среды или центр осевой симметрии, $x = l$ — внешняя граница среды.

Для газодинамических величин на каждой из границ могут быть заданы либо скорость, либо давление как произвольные функции времени.

Для уравнения энергии могут быть заданы на границе температура T или тепловой поток W.

Для уравнений магнитного поля на каждой из границ $x = 0$ и $x = l$ могут быть заданы в виде произвольных функций времени либо компоненты вектора поля H_φ и H_z, либо функции

$$\Phi = \rho\nu_m \frac{\partial (r^{\nu-1} H_\varphi)}{\partial x}, \qquad \Psi = \rho\nu_m r^{\nu-1} \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Компоненты вектора магнитного поля на границах $x = 0$ и $x = l$ могут определяться также из дополнительных уравнений для электротехнической цепи.

При наличии в среде контактных разрывов (несколько областей с различными физическими параметрами) к системе (2.1) и краевым условиям добавляются условия сопряжения: непрерывность теплового потока слева и справа от разрыва и непрерывность температуры

$$W_л = W_п, \qquad T_л = T_п. \tag{2.2}$$

Кроме того, при $\sigma \neq 0$ требуется непрерывность функций Φ и Ψ слева и справа от контактного разрыва и условие изомагнетизма

$$\Phi_л = \Phi_п, \qquad \Psi_л = \Psi_п, \qquad H_{\varphi_л} = H_{\varphi_п}, \qquad H_{z_л} = H_{z_п}. \tag{2.3}$$

В начальный момент времени $t = 0$ задаются компоненты векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbb{H}$, а также плотность $\rho(0, x)$ (или радиусы $r(0, x)$) и температура $T(0, x)$.

4. Система (2.1) решается методом конечных разностей. В области $G = \{(x, t)\}$ строится неравномерная сетка $\omega_{m,\tau} = \{(x_i, t^j)\}$. Обозначим через $m_i = x_{i+1} - x_i$, $\tau^{j-1} = t^j - t^{j-1}$ шаги сетки $\omega_{m,\tau}$ по пространству и времени. Рассматриваемые функции заменим соответствующими сеточ-

ными функциями. Значения функций скорости, координаты r, теплового и магнитного потоков $v_{r_i}{}^j$, $v_{\varphi\,i}{}^j$, $v_{z\,i}{}^j$, r_i^j, W_i^j, Φ_i^j, $\Psi_i{}^j$ будем относить к «целой» (узловой) точке сетки $(x_i t^j)$. Разностные значения функций плотности, давления, температуры, внутренней энергии и напряженности магнитного поля $\rho_i{}^j$, $p_i{}^j$, $T_i{}^j$, $\varepsilon_i{}^j$, $H_{\varphi\,i}{}^j$, $H_{z\,i}{}^j$ будем относить к «полуцелой» точке сетки $(x_{i+1/2}, t^j)$, где $x_{i+1/2} = 0.5(x_i + x_{i+1})$ — середина массового интервала m_i. Чтобы упростить запись, будем пользоваться только целыми индексами для сеточных функций. Обозначим $\bar{m}_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = 0.5(m_i + m_{i-1})$. Переход от системы дифференциальных уравнений к системе разностных уравнений во внутренних точках сетки $0 < x_i < x_N = l$ осуществляется путем замены производных по x двусторонними (центральными) разностями, а в граничных точках $x = 0$ и $x = l$ — односторонними (левыми и правыми) разностями.

Уравнения движения (для плоского случая $\nu = 1$), а также уравнение непрерывности и уравнение энергии рассматриваются в дивергентном виде, т. е. в виде уравнений баланса. Поэтому при написании соответствующих разностных уравнений естественно использовать интегро-интерполяционный (энергетический) метод, с помощью которого строятся консервативные разностные схемы [9–12]. Консервативность, обеспечивая сходимость разностных схем и при наличии разрывов, очень существенна при получении разрывных решений (контактных и ударных волн).

Система разностных уравнений, аппроксимирующая систему (2.1), имеет вид

$$\frac{v_{r_i}^j - v_{r_i}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \frac{1}{\bar{m}_i}\{\gamma_1 [r_i^{\nu-1}(P_{i-1} - P_i)]^j + (1-\gamma_1)[r_i^{\nu-1}(P_{i-1} - P_i)]^{j-1}\} - \tag{2.4}$$
$$- \frac{\nu - 1}{8\pi}[\gamma_1 (H_{\varphi_{i-1}}^j + H_{\varphi_i}^j)^2 / (\rho_{i-1}^j + \rho_i^j) r_i^j +$$
$$+ (1-\gamma_1)\left(H_{\varphi_{i-1}}^{j-1} + H_{\varphi_i}^{j-1}\right)^2 / (\rho_{i-1}^{j-1} + \rho_i^{j-1}) r_i^{j-1}],$$

$$\frac{v_{z_i}^j - v_{z_i}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \frac{1}{\bar{m}_i}\frac{H_{r_0}}{4\pi}[\gamma_1 (H_{z_i} - H_{z_{i-1}})^j + (1-\gamma_1)(H_{z_i} - H_{z_{i-1}})^{j-1}], \tag{2.5}$$

$$\frac{r_i{}^j - r_i^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \gamma_2 v_{r_i}{}^j + (1-\gamma_2) v_{r_i}^{j-1}, \qquad \rho_i{}^j = \nu m_i / (r_{i+1}^{\nu} - r_i^{\nu}), \tag{2.6}$$

$$\frac{E_i{}^j - E_i^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \frac{1}{m_i}[\gamma_3 (q_i - q_{i+1})^j + (1-\gamma_3)(q_i - q_{i+1})^{j-1}], \tag{2.7}$$

$$\frac{H_{z_i}^j - H_{z_i}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \frac{H_{r_0}}{m_i}[\gamma_4 \rho_i^j (v_{z_{i+1}} - v_{z_i})^j + (1-\gamma_4)\rho_i^{j-1}(v_{z_{i+1}} - v_{z_i})^{j-1}] + \tag{2.8}$$
$$+ \frac{1}{m_i}[\gamma_4 \rho_i^j H_{z_i}^j (r_i^{\nu-1} v_{r_i} - r_{i+1}^{\nu-1} v_{r_{i+1}})^j + (1-\gamma_4)\rho_i^{j-1} H_{z_i}^{j-1}(r_i^{\nu-1} v_{r_i} - r_{i+1}^{\nu-1} v_{r_{i+1}})^{j-1}] +$$
$$+ \frac{1}{m_i}[\gamma_4 \rho_i{}^j (\Psi_{i+1} - \Psi_i)^j + (1-\gamma_4)\rho_i^{j-1}(\Psi_{i+1} - \Psi_i)^{j-1}],$$

где

$$P_i = p_i + (H_{\varphi_i}^2 + H_{z_i}^2)/8\pi, \qquad E_i = \varepsilon_i + [(v_{r_i} + v_{r_{i+1}})^2 + (v_{\varphi_i} + v_{\varphi_{i+1}})^2 + (v_{z_i} + v_{z_{i+1}})^2]/8 + (H_{\varphi_i}^2 + H_{z_i}^2)/8\pi\rho_i,$$

$$q_i = {}^1/_2(P_{i-1} + P_i) r_i^{\nu-1} v_{r_i} - \frac{H_{r_0}}{8\pi}[(H_{\varphi_{i-1}} + H_{\varphi_i}) v_{\varphi_i} + (H_{z_{i-1}} + H_{z_i}) v_{z_i}] + N_i + W_i,$$

$$N_i = -\frac{r_i^{\nu-1}}{4\pi}(H_{\varphi_i}\Phi_i + H_{z_i}\Psi_i), \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — «весовые» множители (постоянные).

Соответствующим образом записываются разностные уравнения для компонент скорости $v_{\varphi i}$ и магнитного поля $H_{\varphi i}$.

Постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ в системе (2.4) — (2.8) имеют различные значения в зависимости от выбора разностной схемы. При $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ и в предположении, что разностное значение скорости v_i^j относится к промежуточному слою по времени $(x_i, t_i^{j-1/2})$, имеем явную схему «крест». При $\gamma = {}^1/_2$ имеем симметричную неявную схему и при $\gamma_i = 1$ — неявную схему с опережением.

5. Разностная формула для «магнитного потока» Ψ имеет вид

$$\Psi_i = k_{z_i}(H_{z_i} - H_{z_{i-1}}), \tag{2.9}$$

где $k_{z_i} = 0.5 k_{z_i}^{(-)} k_{z_i}^{(+)} / (k_{z_i}^{(+)} m_{i-1} + k_{z_i}^{(-)} m_i)$, $k_i^{(-)} = k_z(\rho_{i-1}, T_{i-1})$ — коэффициент магнитной вязкости области слева от контактного разрыва, $k_{z_i}^{(+)} = k_z(\rho_i, T_i)$ — справа от разрыва. Аналогичный вид имеют выражения для функции Φ_i и интегрального потока N_i. При выводе формулы вида (2.9) учитывается возможный разрыв коэффициентов проводимости на контактном разрыве и условия сопряжения (2.3).

Разностная формула для потока тепла W рассматривается в виде $W_i = k_i(\Sigma_{i-1} - \Sigma_i)$, где $\Sigma = T^\alpha / \alpha$ — некоторая степенная функция температуры [9, 13], а k_i имеет вид, аналогичный (2.9). Линеаризация теплового потока относительно функции Σ позволяет правильно учитывать фронт температурной волны на грубых сетках по пространству в случае, когда коэффициент теплопроводности $\varkappa$ есть функция высокой степени от температуры ($\varkappa \sim T^{\alpha-1}$). Предусматривается также возможность линеаризации теплового потока относительно температуры T.

§ 3. Методика сквозного счета ударных волн

1. Во многих практически интересных задачах магнитной гидродинамики могут существовать разрывные решения — ударные волны.

При $0 < \sigma < \infty$ ударные волны (в предположении, что не учитывается структура их фронта) являются изотермическими и изомагнитными, т. е. температура и напряженность магнитного поля на фронте ударной волны непрерывны, а потоки разрывны [14].

В случае когда среда является нетеплопроводной ($\varkappa = 0$) и имеет бесконечную электропроводность ($\sigma = \infty$), существует несколько типов ударных волн, отличающихся друг от друга по физическим свойствам [8].

Рассматриваемая методика предполагает возможность сквозного счета ударных волн без явного выделения фронта разрыва.

Для этого, по аналогии с обычной газодинамикой [15, 16], вводится механизм искусственной вязкости (так называемой «псевдовязкости»), служащий для «размазывания» ударных волн.

Виды вязкости могут быть различными.

В правой части уравнения для компоненты скорости v_r и в уравнении энергии (см. уравнения (2.4) и (2.7)) вместо функции P_i рассматривается функция $G_i = P_i + \omega_i$, где ω — функция вида

$$\omega = -\nu_0 m_i^{1+\mu} (P/\rho)^{(1-\mu)/2} \left| \frac{\partial (r^{\nu-1} v_r)}{\partial x} \right|^{\mu} \times \tag{3.1}$$

$$\times \rho \left[\frac{\partial (r^{\nu-1} v_r)}{\partial x} - \nu_1 \left| \frac{\partial (r^{\nu-1} v_r)}{\partial x} \right| \right] / r^{(\nu-1)(\mu+1)}.$$

При $\mu = 1$ формула (3.1) соответствует так называемой квадратичной вязкости, при $\mu = 0$ — линейной вязкости, аналогу второй физической вязкости. Из (3.1) следует, что при $\nu_1 = 1$ в области, где $\partial (r^{\nu-1} v_r) / \partial x \geqslant 0$, вязкость $\omega = 0$, т. е. вне зоны ударных волн вязкость не действует. Выбор коэффициента ν_0 существенно зависит от характера изучаемого движения среды и осуществляется путем численных экспериментов. (Подробнее о выборе вязкостей см. в [17].)

Кроме вязкости вида (3.1), используется комбинированная вязкость, которая имеет вид [18]

$$\omega = -\nu_0 m_i \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \nu_1 \left| \frac{\partial v_r}{\partial x} \right| \right) \left(\sqrt{(P/\rho)} + \nu_2 m_i \left| \frac{\partial v_r}{\partial x} \right| \right). \tag{3.2}$$

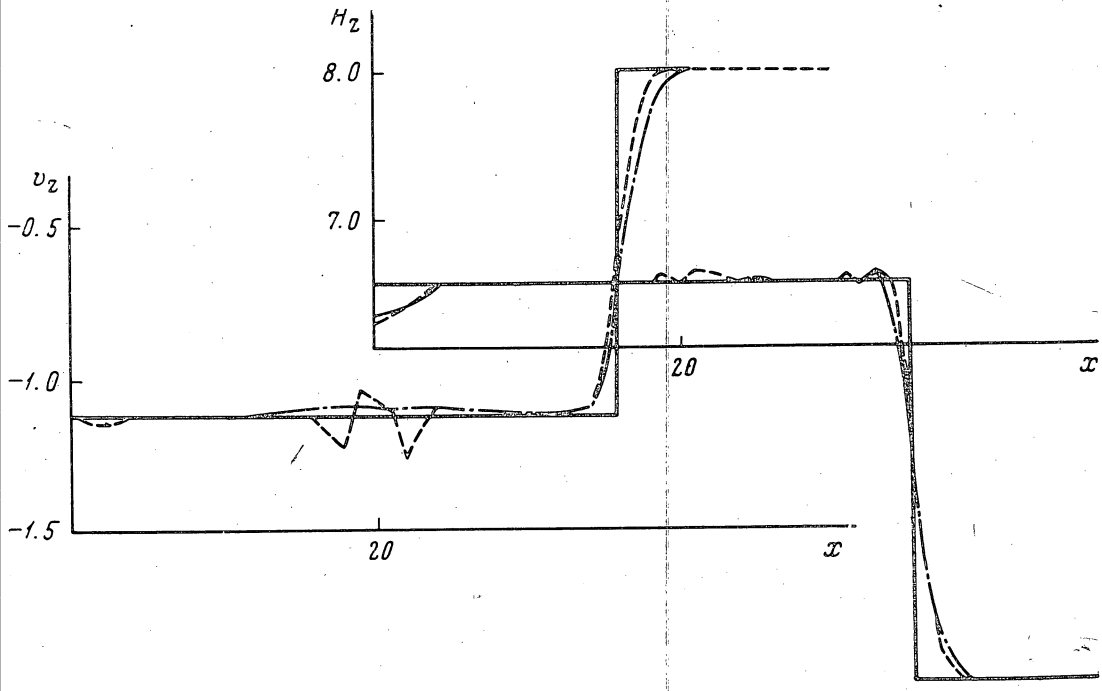
При больших градиентах скорости она совпадает с квадратичной вязкостью, а при малых градиентах — с линейной вязкостью.

В случае $\sigma = \infty$ (вмороженное магнитное поле) и $H_{r_0} \neq 0$ система уравнений движения и уравнений магнитного поля является гиперболической. В этом случае для сквозного счета магнитогидродинамических разрывов требуется также введение искусственных вязкостей в уравнения для компонент скорости v_φ и v_z и в уравнения магнитного поля. Следует заметить, однако, что при введении псевдовязкостей в уравнения магнитной гидродинамики необходимо следить за выполнением условий эволюционности магнитогидродинамических разрывов.

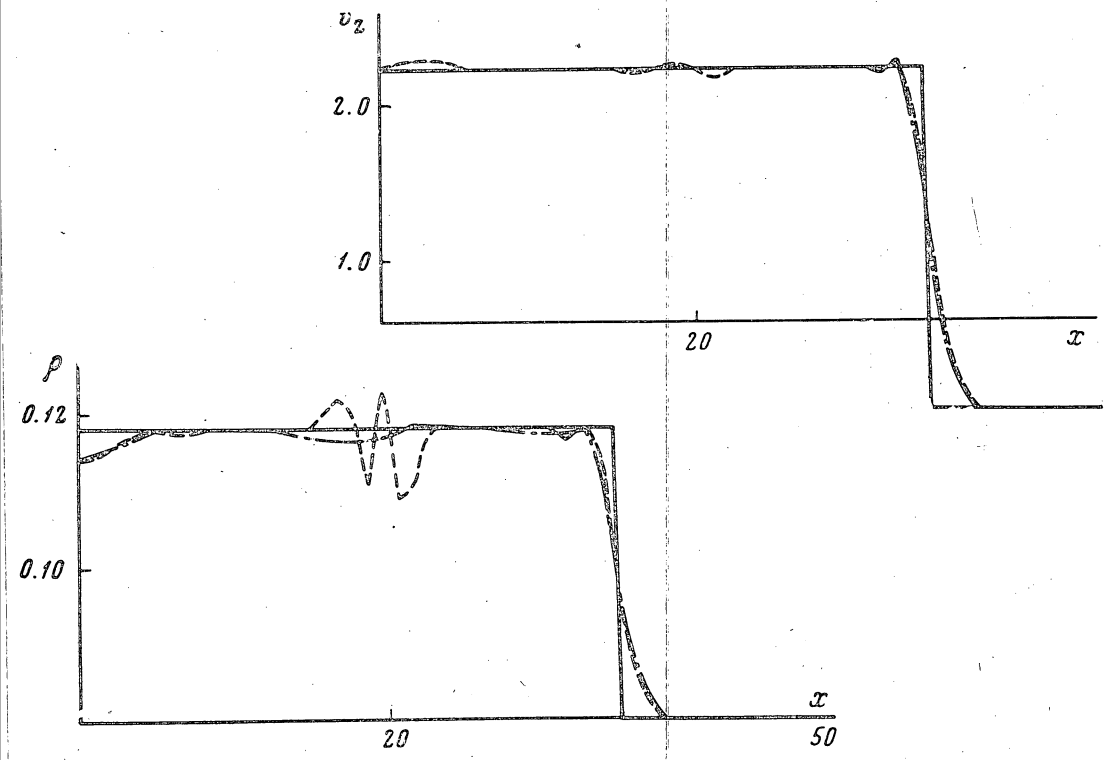
По аналогии с обычной газодинамикой, были выбраны вязкие члены вида

$$\omega_z = \left(\nu_0' m_i + \nu_0'' m_i^2 \left| \frac{\partial v_z}{\partial x} \right| \right) \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \left| \frac{\partial v_z}{\partial x} \right| \right), \tag{3.3}$$

$$h_z = -\left(\mu_0' m_i + \mu_0'' m_i^2 \left| \frac{\partial H_z}{\partial x} \right| \right) \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \left| \frac{\partial H_z}{\partial x} \right| \right). \tag{3.4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В соответствующих разностных формулах в правой части уравнения (2.5) добавляется слагаемое вида $(1/\overline{m}_i)(\omega_{z_i} - \omega_{z_{i-1}})$ и при $\Psi \equiv 0$ в правой части уравнения (2.8) добавляется слагаемое вида

$$(1/m_i)(h_{z_i} - h_{z_{i+1}}).$$

Разумные значения числовых коэффициентов вязкости ν_0', ν_0'', μ_0', μ_0'' в формулах (3.3), (3.4) выбираются путем численных экспериментов и зависят от конкретных решаемых задач.

2. Приведем пример расчета на ЭВМ быстрых магнитогидродинамических ударных волн для случая $\sigma = \infty$ (вмороженное магнитное поле), $H_{r_0} \neq 0$, $\varkappa \equiv 0$, $H_\varphi \equiv 0$, $v_\varphi \equiv 0$. Рассматривался плоский случай. Расчеты проводились по неявной разностной схеме при $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \gamma_4 = {}^1/_2$.

Для простоты использовалось выражение для давления вида $p = \text{const}\,\rho$. Результаты сравнения численных решений с аналитическим представлены на фиг. 1, 2. Здесь сплошная линия обозначает аналитическое решение, штрих-пунктирная линия — численное решение с вязкостями вида (3.3), (3.4) и (3.1) при $\mu = 1$, штриховая линия — численное решение без учета вязких членов в уравнении поля.

Сетка по пространству в расчете была равномерной, причем было задано 50 массовых интервалов m_i.

Сравнение, приведенное на фиг. 1, 2, указывает на удовлетворительную точность расчетов.

Ряд расчетов показал, что определенным преимуществом, по сравнению с другими видами вязкостей, обладает комбинированная вязкость (3.2).

§ 4. Итерационный метод последовательных прогонок

1. Решение системы разностных уравнений (2.4) — (2.8) по неявным разностным схемам при учете диссипации энергии за счет электропроводности и теплопроводности проводится итерационным методом последовательных прогонок.

Идея метода состоит в сведении отдельных уравнений системы к разностным уравнениям второго порядка и в последовательном применении для их решения известного метода прогонки [19].

Неявные разностные схемы для уравнений газодинамики с теплопроводностью (без магнитного поля) применялись И. М. Гельфандом, О. В. Локуциевским, В. Ф. Дьяченко в 1957 г. Соответствующая система разностных уравнений решалась методом матричной прогонки.

В методе последовательных прогонок используется лишь одномерная прогонка для трехточечных разностных уравнений.

Порядок расчета отдельных уравнений системы (2.4) — (2.8) может быть различным. Была выбрана следующая последовательность расчета.

На каждом j-м слое сначала решается уравнение энергии (2.7) в предположении, что магнитогидродинамические величины известны (прогонка по T). Затем решается система уравнений газодинамики (2.4) — (2.6)

при известной температуре и фиксированных магнитных величинах (прогонка по v) и, наконец, система уравнений диффузии магнитного поля (см. уравнение (2.8)) при известных температуре и гидродинамических величинах (прогонка по H).

Каждая раздельная прогонка считается до выполнения условия сходимости. Однократный расчет первых двух прогонок (по T и по v) составляет один цикл малого круга. Все три прогонки (по T, по v и по H) составляют один цикл большого круга. Каждый малый круг внутри большого и затем каждый большой круг считаются до заданного числа циклов.

Опыт показывает, что для удовлетворительной точности расчетов достаточно двух циклов малого круга и двух циклов большого круга. Из многих численных расчетов следует, что максимальное число итераций при счете каждой раздельной прогонки не превышает трех — четырех.

2. Остановимся подробнее на методе решения уравнения энергии.

Предположим, что на j-м слое по времени гидродинамические величины, а также напряженность магнитного поля и магнитный поток N известны.

Линеаризуем функцию $\varepsilon^j = \varepsilon(\rho^j, T^j)$ по методу Ньютона, т. е. представим ее в виде

$$\varepsilon^j = \varepsilon(\Sigma^{(s+1)}) = \varepsilon(\Sigma^{(s)}) + \left(\frac{\partial \varepsilon^{(s)}}{\partial \Sigma}\right) \delta\Sigma^{(s)}, \tag{4.1}$$

где $\Sigma = T^\alpha/\alpha$, $\delta\Sigma^{(s)} = \Sigma^{(s+1)} - \Sigma^{(s)}$, s — номер итерации. Подставляя (4.1) в (2.7), получим следующее разностное уравнение второго порядка относительно функции $\Sigma^{(s+1)}$:

$$a_i^{(s)}\Sigma_{i-1}^{(s+1)} - b_i^{(s)}\Sigma_i^{(s+1)} + c_i^{(s)}\Sigma_{i+1}^{(s+1)} + g_i^{(s)} = 0, \tag{4.2}$$

где коэффициенты $a_i^{(s)}$, $b_i^{(s)}$, $c_i^{(s)}$ и $g_i^{(s)}$ зависят от функции $T_i^{(s)}$, а также от v_i, ρ_i и H_i. Решение уравнения (4.2) находится по известным рекуррентным формулам прогонки.

Уравнение диффузии магнитного поля в предположении, что гидродинамические и тепловые величины фиксированы, является линейным разностным уравнением второго порядка относительно H_φ и H_z и решается методом прогонки по функциям H_φ и H_z без итераций.

Расчеты показали, что в случае $\sigma = 0$ или близких к нулю значений σ счет уравнений диффузии магнитного поля методом прогонки по функции H в ряде случаев приводит к неудовлетворительным результатам. Аналогичные трудности, встречающиеся в расчетах, отмечались также в [5]. Дело в том, что при $\sigma = 0$ производные $\partial(r^{\nu-1}H_\varphi)/\partial x$ и $\partial H_z/\partial x$ равны нулю, а потоки Φ и Ψ становятся неопределенными. По физическому смыслу функции Φ и Ψ имеют и в этом случае конечное значение. Возникающая в разностном уравнении диффузии магнитного поля неопределенность типа 0/0 приводит к болтанке и в ряде случаев — к значительным искажениям решения.

В [20] предложен метод потоковой прогонки. В случае уравнения диффузии поля методом прогонки определяются сначала потоки Φ и Ψ, а за-

тем поле H. В потоковом варианте прогонки функции Φ и Ψ считаются точнее, чем в случае обычной прогонки по H, что весьма существенно.

В настоящее время метод потоковой прогонки используется как для решения уравнения диффузии магнитного поля, так и для решения уравнения энергии для любого диапазона изменения значений электропроводности $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$ и теплопроводности $0 \leqslant \varkappa \leqslant \infty$. При этом авторами совместно с Н. Н. Калиткиным, Л. М. Дегтяревым, А. П. Фаворским и Ю. П. Поповым предложено рассматривать уравнения магнитного поля в дивергентной форме, т. е. в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_\varphi / r^{\nu-1}\rho) = H_{r_0}\frac{\partial v_\varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(H_z/\rho) = H_{r_0}\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(r^{\nu-1}\Psi), \tag{4.3}$$

а в уравнении энергии явно выделить член, означающий джоулев нагрев, т. е. рассматривать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(r^{\nu-1}v_r p) - \frac{\partial W}{\partial x} + Q + Fv, \tag{4.4}$$

где $Q = (\sigma / c^2\rho)(\Psi^2 + \Phi^2)$ — джоулев наррев от электрического тока, а $F = -(1/4\pi)[r^{\nu-1}H_z \partial H_z / \partial x + (H_\varphi \partial (r_\nu^{-1} H_\varphi) / \partial x)]$ — лоренцова сила.

Уравнения (4.3) и (4.4) эквивалентны уравнениям диффузии магнитного поля и энергии в системе (2.1).

Мы не имеем возможности останавливаться на подробной мотивировке предложенных изменений для расчета уравнения диффузии магнитного поля и уравнения энергии.

§ 5. Анализ устойчивости системы разностных уравнений

Проблема исследования устойчивости полной системы разностных уравнений (2.4) — (2.8) с учетом всех диссипативных членов очень сложна. Вопросы устойчивости параболических уравнений достаточно полно исследованы [9–12]. Опыт показывает, что наибольшее ограничение на шаг по времени требуется накладывать в предельном случае $\nu_m \equiv 0$ и $\varkappa \equiv 0$, т. е. когда система уравнений является гиперболической.

Анализ устойчивости, проведенный спектральным методом [15] для случая $\nu_m \equiv 0$, $\varkappa \equiv 0$, $\nu = 1$ и в предположении справедливости уравнений состояния идеального газа ($p = \rho\varepsilon/(\gamma - 1)$, где γ — отношение удельных теплоемкостей), приводит к следующим результатам (подробнее см. [21]).

1. Неявная схема с опережением ($\gamma_i = 1$), симметричная схема ($\gamma_i = 1/2$), а также неявная схема ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 1/2$) безусловно устойчивы.

2. Условие устойчивости явной схемы «крест» ($\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$) имеет вид

$$\tau < \eta_0 m / c_{+0}, \tag{5.1}$$

где c_{+0} — быстрая магнитогидродинамическая скорость звука [8], $\eta = 1/\rho$.

Условие (5.1) является обобщением известного в обычной газодинамике условия Куранта для системы разностных уравнений магнитной гидродинамики.

Опыт показывает, что в ряде задач величина $c_+ = c(p, \rho, H^2)$ может быть большой и, следовательно, условие устойчивости (5.1) может существенно ограничивать шаг по времени τ. Поэтому явными схемами для уравнений магнитной гидродинамики практически пользоваться нецелесообразно.

3. Рассмотрим теперь неявные схемы, аналогичные схеме, рассматриваемой в [7] для обычной гидродинамики. Для решения разностных уравнений, приводимых в [7], также используется метод последовательных прогонок. Практически такие схемы соответствуют одному циклу последовательных прогонок в схеме с опрежением (см. § 4, п. 1).

Анализ, проведенный для случая $H_{r_0} = 0$, показывает, что, независимо от порядка применения последовательных прогонок, любая из таких схем является безусловно-устойчивой лишь при выполнении условия

$$H^2/8\pi \leqslant (1 - \gamma/2)p, \tag{5.2}$$

или

$$\gamma \leqslant 2(1 - R_H), \qquad R_H = H^2/8\pi p.$$

При

$$H^2/8\pi > (1 - \gamma/2)p \qquad \text{или } \gamma > 2(1 - R_H) \tag{5.3}$$

условие устойчивости имеет вид

$$\tau < \eta_0 m / \gamma (c_{+0}^2 - 2p_0\eta_0). \tag{5.4}$$

При $H \equiv 0$ из условий (5.2) и (5.3) непосредственно следуют условия устойчивости, приведенные в [7].

При $H \neq 0$ и особенно в случае $R_H \geqslant 1$, т. е. для широкого класса практически интересных задач рассматриваемая в этом пункте разностная схема вряд ли является более экономичной (в смысле быстроты счета), чем схема с опережением, так как для устойчивости требуется определенное ограничение на шаг вида (5.4.). Кроме того, следует заметить, что при аппроксимации дифференциальной системы уравнений такими схемами нарушается дивергентность по времени в уравнении движения и в уравнении энергии, т. е. консервативность разностных схем.

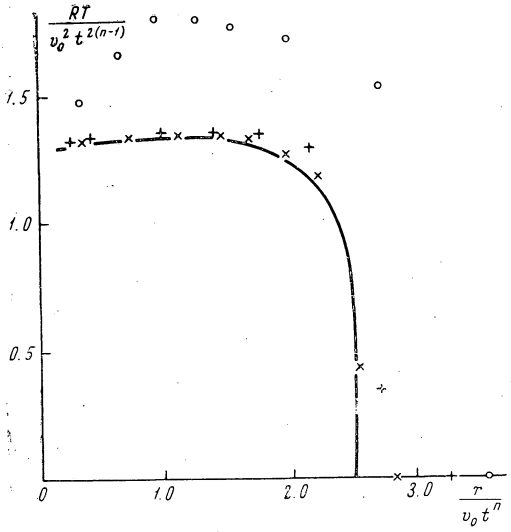
Проведенные численные эксперименты показывают, что при наличии в среде диссипативных членов теплопроводности и конечной проводимости наиболее выгодной как в смысле точности, так и в смысле экономичности является безусловно устойчивая неявная разностная схема, получаемая при значениях весовых множителей $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 1/2$, т. е. неявная схема с опережением для системы гиперболических уравнений движения и непрерывности и симметричная неявная схема для системы параболических уравнений энергии и диффузии магнитного поля.

§ 6. Сравнение численных решений с автомодельными

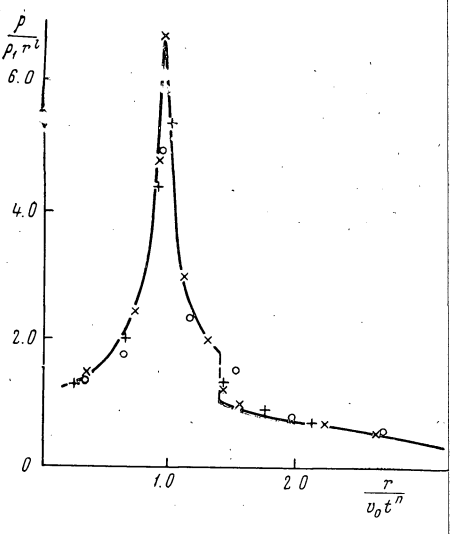
Оценка точности описанных выше численных методов решения системы уравнений магнитной гидродинамики проводилась экспериментально путем решения большого числа модельных задач. Для проверки методики

выбирались трудные задачи с сильно меняющимися физическими параметрами и существенной нелинейностью процессов.

В качестве примера рассмотрим автомодельную плоскую задачу о движении газа перед поршнем в магнитном поле в случае нелинейной теплопроводности и проводимости [22]. Предполагается, что скорость поршня и



Фиг. 3



Фиг. 4

температура на нем изменяются по степенному закону со временем ($v \sim t^{n-1}$, $T \sim t^{2(n-1)}$), а заданное на поршне осевое магнитное поле постоянно: $H_z = \text{const} < 0$. Перед поршнем рассматривается газ с начальными условиями

$$v(r, 0) = 0, \qquad T(r, 0) = 0, \qquad \rho(r, 0) = \rho_1 r^l, \qquad H(r, 0) = \text{const} > 0.$$

Коэффициенты теплопроводности $\varkappa$ и электропроводности σ зависят от температуры и плотности по степенному закону:

$$\varkappa = \varkappa_0 T^{m_0} \rho^{-\sigma_0}, \quad \sigma = \sigma_0' T^{m_1} \rho^{-\sigma_1}, \quad m_0 > 0, \quad m_1 > 0. \tag{6.1}$$

При определенных соотношениях между постоянными n, l, m_0, m_1, σ_0 и σ_1 рассматриваемая задача автомодельна.

На фиг. 3, 4 представлены сравнительные графики зависимостей безразмерной температуры $T / v_0^2 t^{2(n-1)}$ (см. фиг. 3) и плотности $\rho / \rho_1 r^l$ (см. фиг. 4) от безразмерной координаты $r/v_0 t^n$. (Здесь v_0 и ρ_1 — размерные постоянные.) Сплошные линии на фиг. 3—4 изображают автомодельное решение, а кружочки и крестики — соответствующие значения численного решения в различные моменты времени t. Расчет по системе (2.4) — (2.8) начинался с момента $t = 0$ (с нулевых и константных начальных данных), и затем осуществлялся выход на автомодельный режим.

Несмотря на некоторую «экзотичность» граничных и начальных условий, в рассматриваемой автомодельной задаче учитывается существенная нелинейность электропроводности ($\sigma \sim T^{3/2}$) и теплопроводности ($\varkappa \sim T^5$).

Расчет проводился методом последовательных прогонок по неявной схеме при $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 1/2$. Кружочки на фиг. 3, 4 соответствуют моменту времени $t = t_1$, при котором волна возмущения (температурная волна) укладывается на 9 массовых интервалах сетки, прямые крестики — моменту $t = t_2$, при котором температурная волна охватывает 14 массовых интервалов, и косые крестики соответствуют моменту $t = t_3$ с 24 массовыми интервалами сетки в зоне температурной волны.

Численное решение показывает, что довольно быстро и точно осуществляется выход на автомодельный режим.

По описанной выше методике было сосчитано большое число практически важных магнитогидродинамических задач. Одним из разительных примеров эффективности использования численных методов в магнитной гидродинамике может служить открытие с помощью расчетов на ЭВМ нового физического явления — так называемого эффекта T-слоя (температурного слоя) [6]. Сущность явления T-слоя состоит в том, что в сжимаемой среде при определенных условиях может возникать локальная сравнительно узкая зона повышенной температуры и электропроводности, представляющая собой самоподдерживающееся и устойчивое макрообразование. Эффект T-слоя порождает существенно новые особенности в поведении плазмы:

во-первых, во много раз усиливается взаимодействие плазмы с магнитным полем. Так, низкотемпературная плазма, несмотря на малую проводимость, может с помощью T-слоя эффективно взаимодействовать с магнитным полем;

во-вторых, благодаря T-слою магнитное поле может играть роль катализатора, позволяющего сравнительно холодной плазме интенсивно преобразовывать свою энергию в излучение.

Следует отметить, что численные решения, проводимые для изучения эффекта T-слоя, стимулируют постановку физических экспериментов. При этом анализ расчетов позволяет указать диапазон изменения физических параметров, при которых физический эксперимент может привести к положительным результатам.

Поступила в редакцию 8.12.1967
Переработанный вариант 9.04.1968

Цитированная литература

1. С. И. Брагинский, И. М. Гельфанд, Р. П. Федоренко. Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном заряде. В сб. «Физ. плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, 201—221.
2. В. Ф. Дьяченко, В. С. Имшенник. Сходящаяся цилиндрическая ударная волна в плазме с учетом структуры фронта. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 5, 915—925.
3. В. Я. Дьяченко, В. С. Имшенник. О сходящейся цилиндрически симметричной ударной волне при наличии диссипативных эффектов. Прикл. матем. и механ., 1965, **29**, № 6, 993—996.
4. В. Ф. Дьяченко, В. С. Имшенник. К магнитно-гидродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме. М., ИАЭ, препринт, 1965.
5. К. В. Брушлинский, Н. М. Зуева, А. И. Морозов. Установление квази-

одномерного течения плазмы в профилированном канале. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 5, 3—6.

6. А. Н. Тихонов и др. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1967, **163**, № 4, 80—83.
7. Н. Н. Яненко, В. Е. Неуважаев. Один метод расчета газодинамических движений с нелинейной теплопроводностью. Тр. Матем. ин-та АН СССР, **1**, 1966, **74**, 138—140.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
9. А. А. Самарский. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения. Тр. Всес. совещания по диффер. ур-ниям. Ереван, ноябрь, 1958. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960, 148—160.
10. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 4—63.
11. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 1, 25—56.
12. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **1963**, **3**, № 2, 266—298.
13. А. А. Самарский, И. М. Соболь. Примеры численного расчета температурных волн. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 4, 702—719.
14. У. Маршалл. Структура магнитно-гидродинамической ударной волны. В сб. «Проблемы современной физики». Вып. 7. М., Изд-во ин. лит., 1957, 78—86.
15. J. Neumann, R. Richtmyer. A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks. J. Appl. Phys., 1950, **21**, № 1, 232—237.
16. Р. Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во ин. лит., 1960.
17. А. А. Самарский, В. Я. Арсенин. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 2, 357—360.
18. В. Ф. Куропатенко. Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики. Изв. ВУЗов. Математика, 1962, **3** (28), 78—83.
19. И. М. Гельфанд, О. В. Локуциевский. Метод «прогонки» для решения разностных уравнений. Дополнение II к кн. С. К. Годунов, В. С. Рябенький. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
20. Л. М. Дегтярев, А. П. Фаворский, Потоковый вариант метода прогонки. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, № 3, 679—684.
21. А. А. Самарский, П. П. Волосевич, М. И. Волчинская, С. П. Курдюмов. Численные методы решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. ИПМ АН СССР, препринт, 1967.
22. П. П. Волосевич. Движение газа перед поршнем в магнитном поле в случае нелинейной теплопроводности и проводимости. В сб. «Численные методы решения задач матем. физ.», М., «Наука», 1966, 103—112.