1

Ордена Ленина
Институт прикладной математики
Академии наук СССР

А. А. Самарский.

Об устойчивости операторно-разностных схем.

Препринт № 1 за 1967 год.

Москва

Об устойчивости операторно-разностных схем

А.А.Самарский

(Москва)

I. Изучаются операторно-разностные схемы с операторами, действующими в вещественном унитарном пространстве (любого числа измерений). Найдены необходимые и достаточные условия устойчивости для двухслойных схем и достаточные условия для трехслойных схем. Эти условия, имеющие вид линейных операторных неравенств, выделяют классы устойчивых схем, которым, в частности, принадлежат схемы для эволюционных уравнений математической физики. Запись схем в канонической форме позволяет указать операторы R, ответственные за устойчивость. Достаточные условия устойчивости накладывают слабые ограничения на произвол в выборе операторов R (регуляризаторов). Меняя R и оставаясь при этом в классе устойчивых схем, можно получать схемы, обладающие заданными свойствами (по точности и объему вычислительной работы). Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для решения операторно-разностной задачи Коши. При этом мы стремились оценить решение задачи в возможно более сильной норме через правую часть в возможно более слабой норме.

2. Пусть $\{H_N\}$ (N =1,2,...; $N \to \infty$) последовательность линейных нормированных пространств

(являющихся аналогом пространств сеточных функций, определенных на сетках ω_h в эвклидовом пространстве $x = (x_1, \dots, x_p)$). Пусть $y_{N,\tau}(t)$ – абстрактная функция дискретного аргумента $t \in \bar{\omega}_\tau$ со значениями в H_N, где $\bar{\omega}_\tau = \{t = j\tau, \ j = 0, 1, \dots, j_0\}$ – сетка с шагом τ на отрезке $0 \le t \le t_0$, $A(t) = A_{N,\tau}(t)$, $B(t) = B_{N,\tau}(t)$, $R = R_{N,\tau}(t)$ и т.д. – линейные (аддитивные и однородные) операторы, отображающие при каждом $t \in \bar{\omega}_h$ пространство H_N на H_N. Под двухслойной (трехслойной) операторно-разностной схемой понимается операторное уравнение, связывающее для каждого $t \in \bar{\omega}_h$ две точки $y_{N,\tau}(t+\tau)$ и $y_{N,\tau}(t)$ (три точки $y_{N,\tau}(t+\tau)$, $y_{N,\tau}(t)$ и $y_{N,\tau}(t-\tau)$) пространства H_N.

Отправным пунктом исследования является каноническая форма записи схем. Любую двухслойную схему можно записать в канонической форме (индексы N, τ опускаем)

$$B(t)\frac{y(t+\tau)-y(t)}{\tau} + A(t)y(t) = \varphi(t), \qquad 0 \le t = j\tau \le t_0, \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

а трехслойную схему – в канонической форме

$$B(t)\frac{y(t+\tau)-y(t-\tau)}{2\tau} + R(t)[y(t+\tau) - 2y(t) + y(t-\tau)] + A(t)y(t) = \varphi(t), \quad 0 \le t = j\tau \le t_0, \quad y(0) = y_0, \ y(\tau) = y_1; \tag{2}$$

здесь $y(t)$ – искомая функция, $\varphi(t) = \varphi_{N,\tau}(t)$ – заданная абстрактная функция со значениями в H_N, $y_0 = y_{0,N,\tau}$

и $y_1 = y_{1N,\tau}$ – заданные точки (векторы) в H_N.

3. Устойчивость схем (I) и (2) определяется как свойство равностепенной по N, τ непрерывности $\{y_{N,\tau}\}$ последовательности решений задач (I) и (2) относительно исходных данных $\{\varphi_{N,\tau}(t)\}$, $\{y_{N,\tau}(0)\}$, $\{y_{N,\tau}(\tau)\}$. Вводя на линейном множестве H_N различные нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и т.д., получим различные нормированные пространства, состоящие из элементов H_N. Полнота H_N не предполагается. Будем говорить, что схема (I) (схема (2)) устойчива, если можно указать такие числа $\tau_0 > 0$ и $N_0 > 0$, что при любых $\varphi(t) \in H_N$ и $y(0) \in H_N$ ($y(\tau) \in H_N$) и при $\tau \leq \tau_0$, $N \geq N_0$ для решения задачи (I) (или (2)) имеет место одна из оценок:

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \tag{3}$$

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \left[\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_{(2)}\right], \tag{4}$$

где M_1 и M_2 – положительные числа, не зависящие от τ и N, $\varphi_{\bar{t}} = \dfrac{\varphi(t') - \varphi(t'-\tau)}{\tau}$. Для трехслойной схемы (2) оценки (3) и (4) принимают вид:

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \tag{5}$$

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} \left[\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_{(2)}\right], \tag{6}$$

причем $\|y(t+\tau)\|^2_{(1)} = \|y(t+\tau) + y(t)\|^2_{(1_1)} + \|y(t+\tau) - y(t)\|^2_{(1_2)}$.

где $\|\cdot\|_{(1_1)}$ и $\|\cdot\|_{(1_2)}$ – некоторые нормы на H_N. Если схема устойчива при любых $\tau>0, N>0$, то она называется абсолютно устойчивой.

4. В дальнейшем будем предполагать, что H_N вещественное унитарное пространство со скалярным произведением $(\ ,\ )_N$ и нормой $\|y\|_N=\sqrt{(y,y)_N}$ (индекс N всюду опускаем). Ставится задача: выявить запас информации относительно операторов B, R и A, достаточный для устойчивости схем (I) и (2) и найти априорные оценки вида (3)-(6). Выделим исходные семейства схем. Схема (I) принадлежит исходному семейству двуслойных схем ИС-2, если:

α) $A(t)$ самосопряжен и положителен ($A^*=A$, $A>0$, т.е. ($A(x,x)>0$ для всех $x\in H_N$, $x\neq 0$)

β) $B(t)>0$

γ) $A(t)$ липшиц-непрерывен по t, то есть

$$\left|(A(t+\tau)x,x)-(A(t)x,x)\right|\leq C_0\,(A(t)x,x),$$

где $C_0=const>0$ не зависит от τ и N.

Схема (2) принадлежит исходному семейству ИС-3, если $A(t)$ и $R(t)$ удовлетворяют условиям α) и γ). Устойчивые схемы будем искать в ИС-2 и ИС-3. Нормы $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$, вообще говоря, зависят от t, например

$$\|y\|_{(1)}=\|y\|_{(1,t)}=\sqrt{(A(t)y,y)}\quad \text{и т.д.}$$

Для упрощения изложения формулируем результаты в предположении, что операторы A, B, R — постоянные, т.е. не зависят от t. Условимся писать $B > A$, если $(Bx, x) \geqslant (Ax, x)$ для всех $x \in H_N$.

5. Формулируем теоремы об устойчивости для двуслойных схем.

Теорема I. Схема (I) из ИС-2 устойчива при

$$B \geqslant 0.5\,\tau(1 - c_1\tau)A, \qquad c_1 > 0.$$

Для решения задачи (I) при $\tau \leqslant \tau_0$, $\tau_0 < \frac{1}{4c_1}$ верна оценка (4), где

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|_a = \sqrt{(Ay, y)}, \quad \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{a^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}.$$

Если $B^* = B$, то имеет место оценка (3) с

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|_{e}, \quad \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{e^{-1}}.$$

Если $B \geqslant 0.5\,\tau A$, то схема (I) абсолютно устойчива.

Теорема 2. Условие

$$B > 0.5\,\tau(1 - c_1\tau^{\gamma})A > 0, \qquad 0 \leqslant \gamma < 1,$$

где γ не зависит от τ и N, необходимо для устойчивости исходного семейства ИС-2 схем (I).

Теорема 3. Если выполнено условие

$$B \geqslant \varepsilon E + 0.5\,\tau A, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1,$$

то для (I) верна оценка (I) с $\|y\|_{(1)} = \|y\|_a$, $\|\varphi\|_2 = \|\varphi\|$ при любых $\tau > 0$. (здесь E - единичный оператор).

Схему (I) удобно записать в другом виде, положив $B = E + \tau R$

Тогда достаточное условие $B \geqslant 0.5\,\tau A$ устойчивости для (I) примет вид

$$R \geqslant \sigma_0 A \quad , \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|} \tag{7}$$

Общие теоремы I и 3 позволяют получить априорные оценки для схемы с весами

$$y_t + A(t)\left[\sigma\hat{y} + (1-\sigma)y\right] = \varphi , \qquad y(0) = y_0 , \tag{8}$$

где $\hat{y} = y(t+\tau)$, $y = y(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $y_t = \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y)$, σ - вещественный параметр. Приводя (8) к каноническому виду (I), находим $B = E + \sigma\tau A$, $R = \sigma A$. Достаточное условие (7) имеет вид $\sigma \geqslant \sigma_0$. Укажем два результата для схемы (8): I) если $A(t) > 0$ несамосопряженный оператор и $\|Ax\|^2 \leqslant \Delta\,(Ax, x)$, $\Delta > 0$, то (8) абсолютно устойчива при $\sigma \geqslant 0.5 - \frac{1}{\tau\Delta}$ и для (8) верна оценка (4), где $\|y\|_{(1)} = \|y\|$, $\|\varphi\|_{(2)} = \|A^{-1}\varphi\|$, $\|\varphi_{\bar{t}}\|_{(2)} = \|(A^{-1}\varphi)_{\bar{t}}\|$; 2) если $A^*(t) = A(t) > 0$ и $\sigma \geqslant \sigma_\varepsilon$, $\sigma_\varepsilon = 0.5 - (1/\tau\|A\|)$, то для (8) при любых $\tau > 0$ верна оценка (3) с $\|y\|_{(1)} = \|y\|$, $\|\varphi\|_{(2)} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}$.

6. Достаточные условия устойчивости трехслойных схем.

<u>Теорема 4.</u> Если выполнены условия

$$B \geqslant 0 , \qquad R \geqslant \frac{1}{4} A ,$$

то схема (2) из ИС-3 абсолютно устойчива и для решения задачи (2) верна оценка (6), где

$$\begin{gathered} \|y(t+\tau)\|^2_{(1)} = \|\hat{y}\|^2_{(1)} = \|\hat{y} + y\|^2_a + \tau^2\left(\left(R - \frac{A}{4}\right)y_t , y_t\right) , \\ \|y\|^2_a = (Ay, y) , \qquad \|\varphi\|^2_{(2)} = (A^{-1}\varphi, \varphi) . \end{gathered} \tag{9}$$

Теорема 5. Если выполнены условия

$$B \geq \varepsilon E \quad (\varepsilon > 0 \text{ -любое}) \text{ и } \quad R \geq \frac{1}{4}A,$$

то для (2) верна оценка (5), где $\|y(t+\tau)\|^2_{(1)}$ имеет вид (9), а $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$.

Рассмотрим в качестве примера схему с весами

$$\frac{\hat{y}-\check{y}}{2\tau} + A\left[\sigma_1 \hat{y} + (1-\sigma_1-\sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}\right] = \varphi, \quad \left(\check{y} = y(t-\tau)\right).$$

Записывая ее в виде (2), находим $B = E + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A$, $R = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) A$. Для устойчивости (10) достаточно, чтобы $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 0.5$. Теоремы 4 и 5 позволяют получить ряд априорных оценок для (10). Так, например, если $A(t) > 0$ несамосопряженный оператор, то для (10) верна оценка (3) (при любых $\tau > 0$) с $\|\hat{y}\|^2_{(1)} = \frac{1}{4}\|\hat{y}+y\|^2 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})\|\hat{y}-y\|^2$, $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$, если выполнены условия $\sigma_1 > \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 0.5$.

При изучении устойчивости для конкретных разностных схем, аппроксимирующих уравнения математической физики, необходимо привести рассматриваемую схему к каноническому виду (1) или (2), ввести пространство сеточных функций H_N со скалярным произведением, проверить принадлежность схемы к ИС-2 или ИС-8, а также выполнение достаточных условия устойчивости (например, в виде $R \geq \sigma_0 A$ для (1), $R \geq \frac{1}{4}A$ для (2)) и, наконец, воспользоваться одной из теорем 1, 2, 4 или 5.

7. В заключение остановимся на вопросе об устойчивости аддитивных схем. Под аддитивной схемой понимается система операторных уравнений

$$\sum_{\beta=1}^{m} C_{\alpha\beta}(t) y_\beta(t) = \mathcal{D}_\alpha(t) y(t) + \tau \varphi_\alpha(t), \quad (\alpha=1,2,\ldots,m), \tag{11}$$

$$0 \leq t = j\tau < t_0, \quad y(0) = y_0 \in H_N,$$

осуществляющих переход со "слоя" $t=j\tau$ на слой $t=(j+1)\tau$, так что $y_m(t) = y(t+\tau)$, а $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ – промежуточные значения. Здесь $C_{\alpha\beta}$, $\mathcal{D}_\alpha$ – линейные операторы из H_N в H_N. Погрешность аппроксимации ψ аддитивной схемы определяется как сумма погрешностей аппроксимации ψ_α для промежуточных уравнений (II) номера $\alpha = 1,2,\ldots,m$ $(\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_m)$. В связи с таким определением аппроксимации аддитивной схемы необходимы априорные оценки, ориентированные на использование свойства суммарной аппроксимации. Приведем одну теорему для регулярной аддитивной схемы вида

$$B\frac{y_\alpha(t) - y_{\alpha-1}(t)}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}(t) y_\beta(t) = \varphi_\alpha(t),$$

$$\alpha = 1,2,\ldots,m, \quad y(0) = y_0 .$$

Будем предполагать, что H_N вещественное унитарное пространство, B – постоянный оператор.

Теорема 6. Пусть выполнены условия: I) $B^* = B > 0$, 2) матрица – оператор $A = (A_{\alpha\beta})$ неотрицательна, то есть $\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} (A_{\alpha\beta}\xi_\beta, \xi_\alpha) \geq 0$ для любых $\xi_\alpha \in H_N$. Тогда схема (II) абсолютно устойчива и для нее верна априорная оценка

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \max_{0\leq t' \leq t} \left[\|\varphi(t')\|_{(2)} + \sqrt{\tau}\sum_{\alpha=1}^{m} \|\psi_\alpha\|_{(2)}\right]. \tag{12}$$

где $\|y\|_{(1)}=\sqrt{(By,y)}$, $\|\psi\|_{(2)}=\sqrt{(B^{-1}\psi,\psi)}$, $\psi=\sum_{\alpha=1}^{m}\psi_\alpha$.

Из (I2) и суммарной аппроксимации (например, вида $\psi = \psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_m = O(\tau^k+h_N^k)$) следует сходимость аддитивной схемы.

Дополнительные сведения и ссылки, относящиеся к рассматриваемому кругу вопрооов, можно найти в [2] - [4].

ЛИТЕРАТУРА

I В.С.Рябенький, А.Ф.Филиппов. Об устойчивости разностных уравнения, М.Гостехиздат, 1956.

2 А.А.Самарский. К теории разностных схем. Докл.АН СССР, 1965, 165, № 5, 1007-1011.

3 А.А.Самарский. Некоторые вопросы теории разностных схем. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1966, 6, № 4, 665-686.

4 А.А.Самарский. О регуляризации разностных схем. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1967, 7, № I, 62-93.

Подписано в печать 10.7.1967.
Заказ 353 , тираж 150 экз
Отпечатано на ротапринте ИПМ АН СССР.