АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

А.А.Самарский, П.П.Волосевич, М.И.Волчинская,
С.П.Курдюмов

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Москва, 1967г

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

§ I. Введение 4

§ 2. Система дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики 10

§ 3. Система разностных уравнений 14

§ 4. Методика сквозного счета ударных волн . . 21

§ 5. Итерационный метод последовательных прогонок 30

§ 6. Анализ устойчивости системы разностных уравнений 37

§ 7. Сравнение численных решений с автомодельными 45

§ 8. Дивергентная форма уравнений диффузии магнитного поля. Потоковая прогонка 53

§ 9. Эффект Т-слоя 59

Аннотация

Работа посвящена описанию численных методов решения уравнений магнитной гидродинамики, рассматриваемых в одномерном приближении с учетом нелинейной теплопроводности и электропроводности. Метод позволяет решать большой комплекс задач на ЭВМ при различных граничных условиях и произвольных уравнениях состояния вещества. Учитывается также, что изучаемая среда (плазма) может состоять из нескольких областей с различными сильно-меняющимися физическими параметрами. В работе приводится ряд численных примеров. Некоторые из них иллюстрируют обнаруженное в результате расчетов новое физическое явление т.н. эффект Т-слоя – высокотемпературного, электропроводного, самоподдерживающегося слоя газа, возникающего на определенном участке массы, вследствие джоулева нагрева.

§ I. Введение

При теоретических исследованиях ряда прикладных вопросов магнитной гидродинамики (различные типы МГД-генераторов, некоторые проблемы астрофизики и т.д.) большой интерес представляет изучение процессов взаимодействия сжимаемого электропроводного газа с магнитным полем при произвольных числах Рейнольдса Re_m и параметрах магнитного взаимодействия $R_m = H^2/8\pi\rho$. В этом случае наряду с физическими экспериментами важную роль играет исследование математических моделей, учитывающих в основных чертах нелинейные зависимости нестационарных процессов магнитной гидродинамики. При этом, численные методы даже в одномерном приближении позволяют не только установить количественные стороны изучаемых процессов, но изучить ряд новых качественных закономерностей. Так, численное решение уравнений магнитной гидродинамики с учетом сложных нелинейных диссипативных процессов, характерных для двухтемпературной плазмы, по существу привело к созданию одномерной магнито-гидродинамической теории пинч-эффекта в плазме (см. [I]- [3]). В работе [4] изучен стационарный режим течения плазмы в коаксиальных каналах (без учета вязкости и теплопроводности

В работе [5] описано новое физическое явление т.н.эффект Т-слоя - высокотемпературного, электропроводного, самоподдерживающегося слоя газа, возникающего на определенном участке массы, вследствие джоулева нагрева. Явление Т-слоя было обнаружено с помощью численного решения большого числа одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики с учетом нелинейной электропроводности и теплопроводности.

Настоящая работа посвящена описанию численных методов решения уравнений магнитной гидродинамики, которые, в частности, применялись при изучении явления Т-слоя. Предполагается, что коэффициенты теплопроводности и электропроводности могут быть произвольными функциями температуры и плотности. Метод и соответствующие программы для ЭВМ позволяют решать большой комплекс задач с различными комбинациями граничных условий и уравнений состояния вещества. Учитывается также, что изучаемая среда может состоять из нескольких областей с различными сильно меняющимися физическими параметрами. Реальная физическая вязкость не учитывается.

В § 2 работы дается общее описание рассматриваемой математической модели магнитно-гидродинамических процессов.

Система уравнений магнитной гидродинамики решается методом конечных разностей.

В § 3 приводятся различные виды разностных схем, которые используются для численного решения.

Для сквозного счета возможных разрывных решений в

уравнение движения и в ряде случаев в уравнения магнитного поля вводится механизм "размазывания" ударных волн типа вязкости по аналогии с обычной газодинамикой (см. [6] - [8]). Описание видов вязкостей дается в § 4.

В § 5 описывается метод численного решения магнитногидродинамической системы с учетом нелинейных диссипативных процессов электропроводности и теплопроводности. Система аппроксимируется неявными однородными разностными схемами и решается итерационным методом последовательных прогонок. Идея метода состоит в сведении отдельных уравнений системы к разностным уравнениям второго порядка (путем линеаризации по Ньютону) и в последовательном применении для их решения метода прогонки. Для вывода соответствующей системы разностных уравнений используется в основном энергетический метод (метод баланса), который приводит к построению консервативных разностных схем (см. [9] - [12]).

Заметим, что идея последовательных прогонок для численного решения уравнений магнитной гидродинамики в какой-то мере используется также в работах [1]-[3]. Однако, метод, излагаемый в настоящей работе, принципиально отличается от методики, рассматриваемой в [1] - [3] . Для решения уравнений газодинамики в этих работах рассматривается локальная явная схема "крест", условие устойчивости которой требует существенных ограничений на шаг по времени. Неявность возникает лишь за счет диссипативных членов (ионной вязкости, ионной и электронной теплопроводности и конечной электропроводности). Кроме того, в работах [1] - [3] используются

неконсервативные разностные схемы.

В настоящей работе рассматриваются неявные консервативные разностные схемы, которые являются безусловно-устойчивыми. Консервативность разностных схем очень существенна при учете разрывов в решении (контактных и ударных волн) т.к. она позволяет сохранить точность разностных схем на разрывах.

Следует отметить также, что в работах [I]-[3], а также в работе [4] рассматриваются лишь однообластные задачи.

Настоящая методика применима к решению многообластных задач с сильно-меняющимися физическими параметрами среды. В этом случае к разностной схеме предъявляются высокие требования надежности в смысле устойчивости по отношению к локальным нарушениям монотонности. Счет по явным схемам в этом случае возможен лишь при очень малом шаге по времени - значительно меньшим по сравнению с теми ограничениями, которые накладываются известными условиями Куранта и является неэкономичным. При использовании неявных безусловно-устойчивых схем в подобных случаях требуется достаточное число итераций.

Рассматриваемая в настоящей работе система разностных уравнений является сложной нелинейной алгебраической системой. Поэтому для оценки точности расчетов, сходимости примененных итерационных процессов полезным является сравнение численных решений с точными, в частности, с автомодельными решениями. Такое сравнение проводилось на многих примерах,

часть из которых приводится в § 4 и § 7 настоящей работы.

Описанный в настоящей работе метод использовался для решения многих задач, моделирующих при определенных предположениях нестационарный процесс взаимодействия проводящего газа с магнитным полем и имеющих большой практический интерес.

В § 9 приводится ряд примеров численного решения однообластной, а также двухобластной задач о расширении газа в магнитном поле из заданного начального состояния. На этих примерах иллюстрируются характерные свойства явления Т-слоя, в частности, влияние на структуру и условия существования Т-слоя нелинейной теплопроводности и различных видов коэффициента электропроводности.

Результаты численных решений методом последовательных прогонок задачи газодинамики с теплопроводностью (без учета магнитного поля), в разработке которого принимал участие также Н.Н.Калиткин, впервые докладывались на IУ Всесоюзном математическом съезде в 1961 году и изложены в работах [13], [14]. Аналогичный метод независимо рассматривается также в [15]. Методика решения уравнений магнитной гидродинамики, излагаемая в настоящей работы, была создана в 1962 году и впервые докладывалась на третьем рижском совещании по магнитной гидродинамике в 1964 году. Результаты численного решения ряда автомодельных задач по этой методике изложены в работах [16], [17].

В настоящей работе излагаются лишь основные причины созданной методики. Естественно, что целый ряд деталей, относящихся к особенностям её реализации на ЭВМ не смог быть описан.

Авторы выражают искреннюю благодарность Д.А.Гольдиной составившей программу расчета уравнений магнитной гидродинамики на ЭВМ по описанным в настоящей работе методам, а также В.Н.Равинской и А.А.Иванову, участвовавшим в составлении отдельных частей программы и в проведении численных расчетов.

§ 2. Система дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики

1. Пусть t -время, $\bar{H}$ -вектор магнитной напряженности, $\bar{v}$ -скорость, ρ -плотность вещества, p -статическое давление, ε -внутренняя энергия. Система уравнений магнитной гидродинамики с учетом нелинейной электропроводности и теплопроводности в абсолютной системе единиц Гаусса имеет вид: (см. [18])

$$\operatorname{div}\bar{H}=0, \qquad \frac{\partial\bar{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\bar{v}\bar{H}]-\operatorname{rot}(\nu_m\operatorname{rot}\bar{H}),$$

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+(\bar{v}\nabla)\bar{v}=-\nabla p/\rho-[\bar{H}\operatorname{rot}\bar{H}]/4\pi\rho, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\bar{v})=0, \tag{I}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^2/2+\rho\varepsilon+H^2/8\pi\right)=-\operatorname{div}\bar{q},$$

$$\bar{q}=\rho\bar{v}\left(v^2/2+\varepsilon+p/\rho\right)+[\bar{H}[\bar{v}\bar{H}]]/4\pi-\nu_m[\bar{H}\operatorname{rot}\bar{H}]/4\pi-\varkappa\nabla T,$$

где $\nu_m=c^2/4\pi\sigma$ - магнитная вязкость, c -скорость света.

Коэффициенты электропроводности σ и теплопроводности $\varkappa$ являются нелинейными функциями температуры T и плотности ρ и удовлетворяют условиям $\partial\sigma/\partial T\geq 0$, $\partial\varkappa/\partial T\geq 0$.

Уравнения состояния произвольны: $p=p(\rho,T)$, $\varepsilon=\varepsilon(\rho,T)$.

2. Обозначим через r, φ, z цилиндрические или декартовы координаты пространства.

Пусть одномерное движение среды направлено по эйлеровой координате r. Предположим, что в плоском случае существует отличная от нуля компонента H_r вектора $\bar{H}$, направленная

вдоль движения, и компоненты H_φ и H_z перпендикулярные к направлению движения. Из уравнения $\operatorname{div}\bar{H}=0$ имеем в плоском случае, что $H_r=H_{r_0}=const$. В случае осевой симметрии $H_{r_0}=0$. Обозначим через V_r, V_φ и V_z соответствующие компоненты вектора скорости $\bar{V}$.

Введем в направлении движения r массовую лагранжеву координату x, связанную с r формулой $dx=\rho r^{\nu-1}dr$, где $\nu=1$ соответствует плоскому случаю, $\nu=2$ –случаю осевой симметрии. В указанных предположениях система дифференциальных уравнений в частных производных, соответствующая системе (I) будет иметь вид:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}=-r^{\nu-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+(H_\varphi^2+H_z^2)/8\pi\right)-(\nu-1)\,H_\varphi^2/4\pi\rho r \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t}=\frac{H_{r_0}}{4\pi}\frac{\partial H_\varphi}{\partial x} \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}=\frac{H_{r_0}}{4\pi}\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}=V_r \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1/\rho\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{\nu-1}V_r\right) \quad \text{или} \quad \rho=\nu\frac{\partial x}{\partial r^\nu} \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{\partial q}{\partial x} \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}=H_{r_0}\rho\frac{\partial V_\varphi}{\partial x}-H_\varphi\rho r^{\nu-1}\frac{\partial V_r}{\partial x}+\rho r^{\nu-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = H_{r_0}\rho\frac{\partial v_z}{\partial x} - H_z\rho\frac{\partial}{\partial x}(r^{\nu-1}v_r) + \rho\frac{\partial}{\partial x}(r^{\nu-1}\psi), \qquad (2.8)$$

где:

$$E = (v_r^2+v_\varphi^2+v_z^2)/2 + \varepsilon + (H_\varphi^2+H_z^2)/8\pi\rho, \qquad (2.9)$$

$$q = r^{\nu-1}v_r\left(p + (H_\varphi^2+H_z^2)/8\pi\right) - H_{r_0}(H_\varphi v_\varphi + H_z v_z) + N + W, \qquad (2.10)$$

$$\Phi = \rho\nu_m\frac{\partial(r^{\nu-1}H_\varphi)}{\partial x}, \qquad \psi = \rho\nu_m r^{\nu-1}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \qquad (2.11)$$

N и W соответственно магнитный и тепловой потоки через единицу поверхности массы, имеющие вид

$$N = -\frac{\nu_m}{4\pi}\rho r^{\nu-1}\left(H_\varphi\frac{\partial(r^{\nu-1}H_\varphi)}{\partial x} + H_z r^{\nu-1}\frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \qquad W = -\varkappa r^{2(\nu-1)}\rho\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (2.12)$$

3. Решение системы (2.I)-(2.I2) ищется в ограниченной области $0 \le x \le \ell$, где $x=0$ – левая граница плоской среды или центр цилиндрической симметрии, $x=\ell$ –внешняя граница среды.

Для газодинамических величин на каждой из границ могут быть заданы либо скорость, либо давление как произвольные функции времени.

Для уравнения энергии могут быть заданы температура или тепловой поток.

Для уравнений магнитного поля на каждой из границ $x=0$ и $x=\ell$ могут быть заданы в виде произвольных функций времени либо компоненты вектора поля H_φ и H_z, либо функции Φ и ψ (см.формулу (2.II)). Заметим, что функции Φ и ψ

следующим образом связаны с компонентами напряженности электрического поля в движущейся системе координат $\bar{E}' = \bar{E} + \frac{1}{c}[\bar{v}\bar{H}]$ и компонентами вектора плотности тока $j = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \bar{H}$:

$$\varphi = E'_z = c\, j_z / \sigma \,, \qquad \psi = -E'_\varphi = -c\, j_\varphi / \sigma \qquad (2.13)$$

Компоненты вектора магнитного поля на правой границе $x = \ell$ $H_\varphi(\ell, t)$ и $H_z(\ell, t)$ могут определяться также из дополнительных уравнений для электротехнической цепи.

В начальный момент времени $t = 0$ задаются компоненты векторов $\bar{v}$ и $\bar{H}$, а также плотность $\rho(0, x)$ (или радиусы $r(0, x)$) и температура $T(0, x)$.

4. Учитывается, что среда может состоять из нескольких областей с различными физическими свойствами: различными коэффициентами теплопроводности $\varkappa$ и электропроводности σ, уравнениями состояния, начальной плотностью, т.е. и предполагается наличие контактных разрывов. Поэтому к системе уравнений (2.I) -(2.I2) добавляются условия сопряжения на контактном разрыве: непрерывность теплового потока слева и справа от разрыва и непрерывность температуры

$$W_л = W_п \,, \qquad T_л = T_п \qquad (2.14)$$

а также при $\sigma \neq 0$ непрерывность магнитного потока слева и справа от разрыва и условие изомагнетизма

$$\varphi_л = \varphi_п \,, \quad \psi_л = \psi_п \,, \quad N_л = N_п \,, \quad H_{\varphi л} = H_{\varphi п} \,, \quad H_{z л} = H_{z п} \qquad (2.15)$$

§ 3. Система разностных уравнений

I. Система (2.I)-(2.8) решается методом конечных разностей. В области $G=\{(x,t)\}$ строится неравномерная сетка $\omega_{m,\tau}=\{(x_i,t^j)\}$. Обозначим $m_i=x_{i+1}-x_i$, $\tau^{j-1}=t^j-t^{j-1}$ шаги сетки $\omega_{m,\tau}$ по пространству и времени. Рассматриваемые функции заменим соответствующими сеточными функциями. Значения функций скорости, координаты z теплового и магнитного потоков - $v_{z_i}^j$, $v_{\varphi_i}^j$, $v_{r_i}^j$, z_i^j, w_i^j, N_i^j, φ_i^j, ψ_i^j будем относить к "целой" (узловой) точке сетки (x_i,t^j). Разностные значения функций плотности, давления, температуры, внутренней энергии и напряженности магнитного поля - ρ_i^j, p_i^j, T_i^j, ε_i^j, $H_{\varphi_i}^j$, $H_{z_i}^j$ - будем относить к "полуцелой" точке сетки $(x_{i+1/2}, t^j)$, где $x_{i+1/2}=0{,}5(x_i+x_{i+1})$ середина массового интервала m_i. При этом, для простоты соответствующие сеточные функции будем обозначать целыми индексами. Обозначим $\bar{m}_i=x_{i+1/2}-x_{i-1/2}=0{,}5\,(m_i+m_{i-1})$

Переход от системы дифференциальных уравнений (2.I)-(2.I2) к системе разностных уравнений во внутренних точках сетки $0<x_i<x_N=\ell$ осуществляется путем замены производных по x двухсторонними (центральными) разностями.

Уравнения движения (2.I)-(2.3) (для плоского случая $\nu=1$), а также уравнение непрерывности (2.4) и уравнение энергии (2.6) рассматриваются в дивергентном виде, т.е. в виде уравнений баланса. Поэтому при написании соответствующих разностных уравнений естественно использовать интегро-интерполяционный (энергетический) метод, который приводит

к построению для уравнений (2.I)-(2.3), (2.4)-(2.6) консервативных разностных схем.

При построении разностной системы приходится использовать интерполяции функций H, p, ρ, v, а также коэффициентов электропроводности и теплопроводности с "полуцелых" точек ($x_{i+1/2}$) в "целые" (x_i) или наоборот. Функции H, p, ρ, v интерполируются по формулам $f_{i+1/2} = 0{,}5(f_i + f_{i+1})$ или $f_i = 0{,}5(f_{i+1/2} + f_{i-1/2})$. При интерполяции коэффициентов теплопроводности и электропроводности из "полуцелых" точек в "целые" учитывается возможный разрыв коэффициентов на границах разных областей среды и условия непрерывности (2.I4), (2.I5).

Учитывая, сделанные выше замечания, получим следующую систему разностных уравнений, аппроксимирующую систему (2.I)-(2.I2).

$$\frac{v_{z_i}^j - v_{z_i}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \frac{1}{\overline{m}_i}\left\{\gamma_1\left[r_i^{\nu-1}(\mathcal{P}_{i-1}-\mathcal{P}_i)\right]^j + (1-\gamma_1)\left[r_i^{\nu-1}(\mathcal{P}_{i-1}-\mathcal{P}_i)\right]^{j-1}\right\} - \frac{\nu-1}{8\pi}\left[\gamma_1 \frac{(H_{\varphi_{i-1}}^j + H_{\varphi_i}^j)^2}{(\rho_{i-1}^j+\rho_i^j)r_i^j} + (1-\gamma_1)\frac{(H_{\varphi_{i-1}}^{j-1} + H_{\varphi_i}^{j-1})^2}{(\rho_{i-1}^{j-1}+\rho_i^{j-1})r_i^{j-1}}\right] \tag{3.1}$$

$$\frac{v_{z_i}^j - v_{z_i}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \frac{1}{\overline{m}_i}\frac{H_{z_0}}{4\pi}\left[\gamma_1(H_{z_i}-H_{z_{i-1}})^j + (1-\gamma_1)(H_{z_i}-H_{z_{i-1}})^{j-1}\right] \tag{3.2}$$

$$\frac{v_{\varphi_i}^j - v_{\varphi_i}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \frac{1}{\overline{m}_i}\frac{H_{z_0}}{4\pi}\left[\gamma_1(H_{\varphi_i}-H_{\varphi_{i-1}})^j + (1-\gamma_1)(H_{\varphi_i}-H_{\varphi_{i-1}})^{j-1}\right] \tag{3.3}$$

$$\frac{r_i^j - r_i^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \gamma_2 v_{r_i}^j + (1-\gamma_2) v_{r_i}^{j-1} \tag{3.4}$$

$$\rho_i^j = \nu m_i / \left(r_{i+1}^{\nu} - r_i^{\nu}\right)^j , \tag{3.5}$$

$$\frac{E_i^j - E_i^{j-1}}{\tau^{j-1}} = \frac{1}{m_i}\left[\gamma_3 \left(q_i - q_{i+1}\right)^j + (1-\gamma_3)\left(q_i - q_{i+1}\right)^{j-1}\right] , \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{H_{z_i}^j - H_{z_i}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = {} & \frac{H_{z_0}}{m_i}\left[\gamma_4 \rho_i^j \left(v_{z_{i+1}} - v_{z_i}\right)^j + (1-\gamma_4)\rho_i^{j-1}\left(v_{z_{i+1}} - v_{z_i}\right)^{j-1}\right] + \\ & + \frac{1}{m_i}\left[\gamma_4 \rho_i^j H_{z_i}^j \left(r_i^{\nu-1} v_{z_i} - r_{i+1}^{\nu-1} v_{z_{i+1}}\right) + (1-\gamma_4)\rho_i^{j-1} H_{z_i}^{j-1}\left(r_i^{\nu-1} v_{z_i} - r_{i+1}^{\nu-1} v_{z_{i+1}}\right)^{j-1}\right] + \\ & + \frac{1}{m_i}\left[\gamma_4 \rho_i^j \left(\Psi_{i+1} - \Psi_i\right)^j + (1-\gamma_4)\rho_i^{j-1}\left(\Psi_{i+1} - \Psi_i\right)^{j-1}\right] ,\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{H_{\varphi_i}^j - H_{\varphi_i}^{j-1}}{\tau^{j-1}} = {} & \frac{H_{z_0}}{m_i}\left[\gamma_4 \rho_i^j \left(v_{\varphi_{i+1}} - v_{\varphi_i}\right)^j + (1-\gamma_4)\rho_i^{j-1}\left(v_{\varphi_{i+1}} - v_{\varphi_i}\right)^{j-1}\right] + \\ & + \frac{1}{2^{\nu} m_i}\left[\gamma_4 \rho_i^j H_{\varphi_i}^j \left(r_i^j + r_{i+1}^j\right)^{\nu-1}\left(v_{z_i} - v_{z_{i+1}}\right)^j + (1-\gamma_4)\rho_i^{j-1} H_{\varphi_i}^{j-1}\left(r_i^{j-1} + r_{i+1}^{j-1}\right)^{\nu-1}\left(v_{z_i} - v_{z_{i+1}}\right)^{j-1}\right] + \\ & + \frac{1}{2^{\nu} m_i}\left[\gamma_4 \rho_i^j \left(r_i^j + r_{i+1}^j\right)^{\nu-1}\left(\Phi_{i+1} - \Phi_i\right)^j + (1-\gamma_4)\rho_i^{j-1}\left(r_i^{j-1} + r_{i+1}^{j-1}\right)^{\nu-1}\left(\Phi_{i+1} - \Phi_i\right)^{j-1}\right] ,\end{aligned} \tag{3.8}$$

ГДЕ:

$$\mathcal{P}_i = p_i + \left(H_{\varphi_i}^2 + H_{z_i}^2\right)/8\pi \tag{3.9}$$

$$E_i = \varepsilon_i + \left[\left(v_{z_i} + v_{z_{i+1}}\right)^2 + \left(v_{\varphi_i} + v_{\varphi_{i+1}}\right)^2 + \left(v_{z_i} + v_{z_{i+1}}\right)^2\right]/8 + \left(H_{\varphi_i}^2 + H_{z_i}^2\right)/8\pi\rho_i , \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} q_i = {} & \frac{1}{2}\left(\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{i-1}\right) r_i^{\nu-1} v_{z_i} - \frac{H_{z_0}}{8\pi}\left[\left(H_{\varphi_{i-1}} + H_{\varphi_i}\right) v_{\varphi_i} + \right. \\ & \left. + \left(H_{z_{i-1}} + H_{z_i}\right) v_{z_i}\right] + N_i + W_i , \end{aligned} \tag{3.11}$$

$i = 0, 1, \ldots, N-1$

Через функции W_i, Φ_i, Ψ_i, N_i в системе (3.I)-(3.II) обозначены соответственно разностные выражения для тепловых и магнитных потоков, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — "весовые" множители (постоянные).

2. Разностная формула для потока Ψ имеет вид

$$\Psi_i = K_{2_i} (H_{2_i} - H_{2_{i-1}})$$

где

$$K_{2_i} = 0{,}5\, K_{2_i}^{(-)} K_{2_i}^{(+)} \Big/ \left(K_{2_i}^{(+)} m_{i-1} + K_{2_i}^{(-)} m_i\right) \qquad (3.12)$$

$K_{2_i}^{(-)} = K_2(\rho_{i-1}, T_{i-1})$ – коэффициент магнитной вязкости области слева от контактного разрыва, $K_{2_i}^{(+)} = K_2(\rho_i, T_i)$ – справа от разрыва. Аналогичный вид имеют выражения для функции Φ_i и интегрального потока N_i. При выводе формулы вида (3.I2) учитывается возможный разрыв проводимости коэффициентов на контактном разрыве и условия сопряжения (2.I5).

Разностная формула для потока тепла W рассматривается в виде

$$W_i = K_i (\Sigma_{i-1} - \Sigma_i) \qquad (3.13)$$

где $\Sigma = T^{\alpha}/\alpha$ – некоторая степенная функция температуры (см. [I9]). Линеаризация теплового потока относительно функции Σ позволяет правильно учитывать фронт температурной волны на грубых сетках по пространству в случае, когда коэффициент теплопроводности $\varkappa$ есть функция высокой степени от температуры ($\varkappa \sim T^{\alpha-1}$). В частности, расчеты

показывают, что линеаризация по Σ_i хорошо оправдывает себя в случае, когда теплопроводность в среде обусловлена локально-равновесным излучением ($\alpha = 7$). Заметим, что при написании разностной формулы для потока тепла предусматривается также возможность линеаризации относительно температуры T. Так, если коэффициент теплопроводности зависит от температуры по степенному закону ($\varkappa \sim T^n$), то полагается в формуле (3.13) $K_i \sim T^{n_i}$. При $n_i = n$, $\alpha = 1$ имеем $\Sigma_i \equiv T$, при $n_i = 0$, $\alpha = n+1$ имеем $\Sigma_i = T^{n+1}/(n+1)$. Разностное выражение для коэффициента K_i в формуле для потока тепла W_i имеет вид, аналогичный (3.12).

3. Постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ в системе (3.I)-(3.II) имеют различные значения в зависимости от выбора разностной схемы. В частности, при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$ и в предположении, что разностное значение скорости v^j относится к промежуточному слою по времени ($x_i, t^{j-1/2}$) имеем явную схему "крест". При $\gamma_i = 1/2$ имеем симметричную неявную схему и при $\gamma_i = 1$ неявную схему с опережением.

В силу дивергентности уравнений движения и энергии в системе (3.I)-(3.II) точность выполнения законов сохранения при расчете по неявным разностным схемам зависит только от точности выбранного итерационного процесса.

4. На стр. 12 отмечалось, что граничные условия для системы (2.I)-(2.12) могут иметь различный вид. Для каждого из уравнений системы (2.I)-(2.12) может рассматриваться как первая, так и вторая краевые задачи. В частности, при

$V_\varphi = V_z = H_\varphi \equiv 0$ на правой границе $x = \ell$ области $G\{(x,t)\}$ возможны любая из следующих восьми различных комбинаций граничных условий:

$$v(\ell,t)=v_\ell^*(t), \qquad W(\ell,t)=W_\ell^*(t) \text{ или } T(\ell,t)=T_\ell^*(t), \qquad H_z(\ell,t)=H_{z\ell}^*(t) \text{ или } \Psi(\ell,t)=\Psi_\ell^*(t) \tag{3.14}$$

$$P(\ell,t)=P_\ell^*(t), \qquad W(\ell,t)=W_\ell^*(t) \text{ или } T(\ell,t)=T_\ell^*(t), \qquad H_z(\ell,t)=H_{z\ell}^*(t) \text{ или } \Psi(\ell,t)=\Psi_\ell^*(t) \tag{3.15}$$

где $v_\ell^*(t)$, $P_\ell^*(t)$, $W_\ell^*(t)$, $T_\ell^*(t)$, $H_{z\ell}^*(t)$, $\Psi_\ell^*(t)$ — заданные произвольные функции времени. Аналогичные комбинации граничных условий могут быть заданы на левой границе $x = 0$ (в случае когда $x = 0$ не является осью симметрии). В случае осевой симметрии имеем:

$$v(0,t) = W(0,t) = H_\varphi(0,t) = \Psi(0,t) = 0$$

Производная по x в точке $x = 0$ в дифференциальных уравнениях движения (2.I)-(2.3) при переходе к разностным уравнениям заменяется односторонней (правой) разностью. При этом, в уравнениях (3.I)-(3.3) можно формально положить: $m_{-1} = 0$, $\mathcal{P}_{-1/2} = \mathcal{P}_0$, $H_{-1/2} = H_0$, где $\mathcal{P}_0$, H_0 либо являются заданными функциями времени $\left(P_{-1/2} = P_0^*(t),\ H_{z-1/2} = H_{z0}^*(t),\ H_{\varphi-1/2} = H_{\varphi 0}^*(t)\right)$ либо определяются из уравнений (3.I)-(3.3) по заданным функциям $V_{z0}^*(t)$, $V_{\varphi 0}^*(t)$, $V_{z0}^*(t)$.

Аналогично, производная по x в точке $x = x_N = \ell$ в уравнениях (2.I)-(2.3) заменяется левой разностью.

Следует заметить, что если во внутренних точках сетки $0 < x_i < x_N$ замена производных по x центральными разностями приводит к погрешности аппроксимации второго порядка по m, то левая и правая разности аппроксимируют соответствующие производные лишь с погрешностью первого порядка m_0. Поэтому для повышения точности расчета при построении сетки $\omega_{m\tau}\{(x_i, t^j)\}$ вблизи границ $x=0$ и $x=x_N$ обычно выбирается более мелкий шаг m_i, чем в остальных точках сетки, т.е. вблизи границ $x=0$ и $x=x_N$ сетка "сгущается". Сетка сгущается также вблизи границ различных по физическим параметрам областей среды.

§ 4. Методика сквозного счета ударных волн

I. Во многих практически интересных задачах магнитной гидродинамики могут существовать разрывные решения -ударные волны.

При $\sigma < \infty$ ударные волны (в предположении, что не учитывается структура их фронта) являются изотермическими и изомагнитными, т.е. температура и напряженность магнитного поля на фронте разрыва непрерывны, а потоки разрывны.

В случае, когда среда является нетеплопроводной ($\varkappa = 0$) и имеет бесконечную электропроводность ($\sigma = \infty$) существуют несколько типов ударных волн, отличающихся друг от друга по физическим свойствам (см., например, [18]).

Рассматриваемая методика предполагает возможность сквозного счета ударных волн без явного выделения фронта разрыва.

Для сквозного счета разрывных решений вводится механизм искусственной вязкости (т.н. "псевдовязкости"), служащий для "размазывания" ударных волн (см. [6] , [7]).

Виды вязкости могут быть различными.

В правой части уравнения для компоненты скорости V_i и в уравнении энергии (см. уравнения (3.I) и (3.6)) вместо функции $\mathcal{P}_i$ рассматривается функция $G_i = \mathcal{P}_i + \omega_i$, где ω функция вида

$$\omega = -\nu_0 m_i^{1+\mu} \left(\rho/\rho\right)^{\frac{1-\mu}{2}} \left|\frac{\partial(r^{\nu-1} V_r)}{\partial x}\right|^{\mu} \rho \left[\frac{\partial(r^{\nu-1} V_r)}{\partial x} - \nu_1 \left|\frac{\partial(r^{\nu-1} V_r)}{\partial x}\right|\right] \Big/ r^{(\nu-1)(\mu+1)} \tag{4.1}$$

При $\mu = 1$ формула (4.I) соответствует, т.н.квадратичной вязкости (см. [7]), при $\mu = 0$ - линейной вязкости- аналогу второй физической вязкости. Из (4.I) следует, что при $\nu_1 = 1$ в области, где $\frac{\partial(r^{\nu'} v_r)}{\partial x} \geqslant 0$ вязкость $\omega = 0$, т.е. вне зоны ударных волн вязкость не действует. Выбор численного значения ν_0 существенно зависит от характера изучаемого движения среды. Коэффициент ν_0 выбирнется так, чтобы разрыв размазывался на 3 -5 интервалов сетки. При этом требуется, чтобы введение псевдовязкости не приводило к искажению решения. (Подробнее о выборе вязкостей см. в [8]).

Кроме вязкостей вида (4.I) в ряде расчетов использовалась комбинированная вязкость, которая имеет вид:

$$\omega = -\nu_0 m_i \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \nu_1 \left| \frac{\partial v_r}{\partial x} \right| \right) \left(\sqrt{p/\rho} + \nu_2 m_i \left| \frac{\partial v_r}{\partial x} \right| \right) \qquad (4.2)$$

Вязкость вида (4.2) близка по смыслу к вязкости, рассматриваемой в [26]. При больших градиентах скорости она совпадает с квадратичной вязкостью, а при малых градиентах - с линейной вязкостью.

В случае $\sigma = \infty$ (вмороженное магнитное поле) и $H_{r_0} \neq 0$ система уравнений движения (2.I) - (2.3) и уравнений магнитного поля (2.7), (2.8) является гиперболической. В этом случае для сквозного счёта магнитно-гидродинамических разрывов требуется также введение искусственных вязкостей в уравнения для компонент скорости v_φ и v_z и в уравнения магнитного поля. По аналогии с обычной газодинамикой были выбраны вязкие члены следующего вида:

$$\omega_z = \left(\nu_0' m_i + \nu_0'' m_i^2 \left|\frac{\partial v_z}{\partial x}\right|\right)\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \left|\frac{\partial v_z}{\partial x}\right|\right), \qquad (4.3)$$

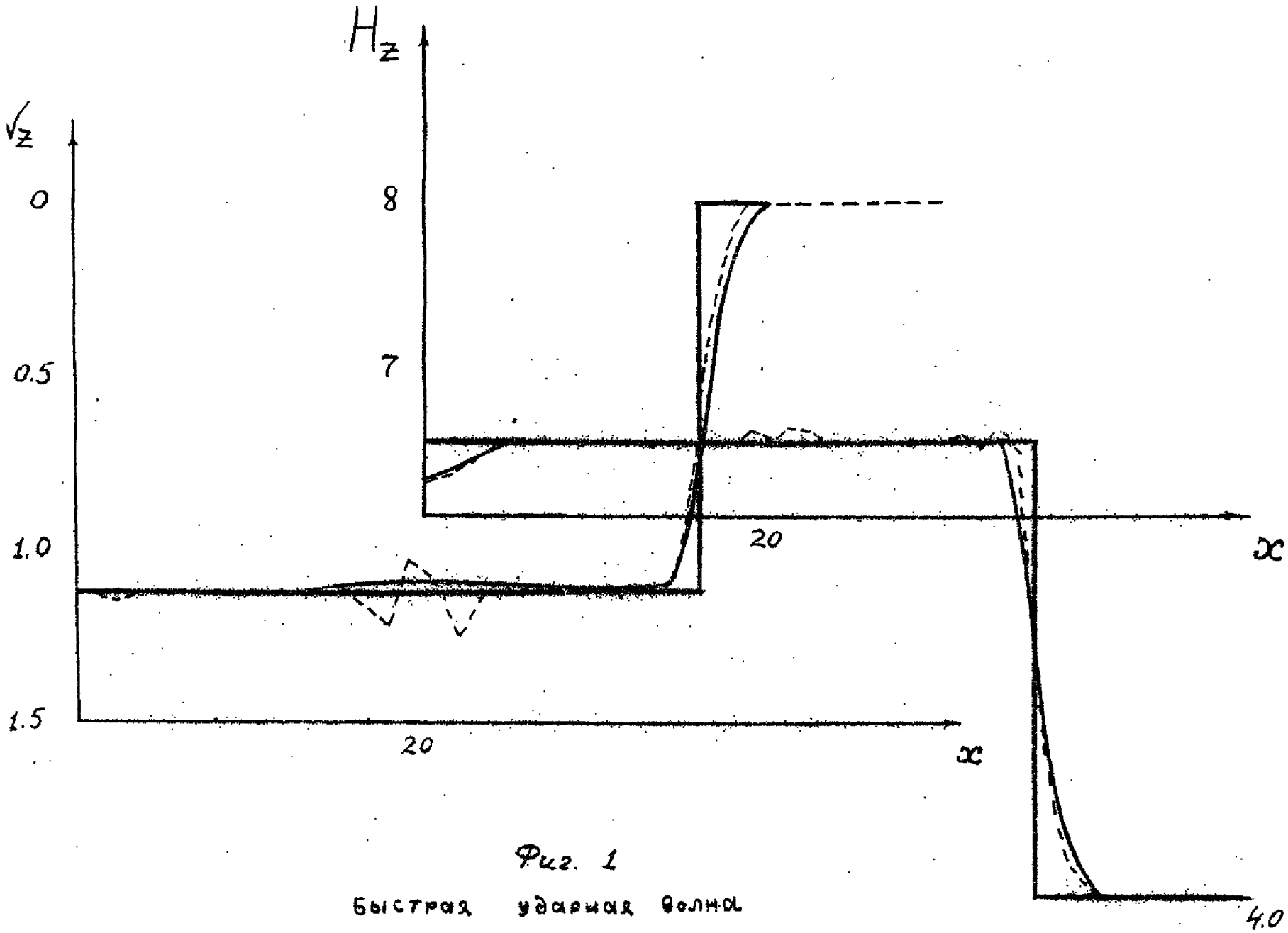
$$h_z = -\left(\mu_0' m_i + \mu_0'' m_i^2 \left|\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|\right)\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \left|\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|\right) \qquad (4.4)$$

В соответствующих разностных формулах в правой части уравнения (3.2) добавляется слагаемое вида $\frac{1}{m_i}(\omega_{z_i} - \omega_{z_{i-1}})$ и при $\psi \equiv 0$ в правой части уравнения (3.7) добавляется слагаемое вида $\frac{1}{m_i}(h_{z_i} - h_{z_{i+1}})$. Аналогичным образом вводятся вязкие члены ω_φ и h_φ в уравнения для компоненты v_φ и для компоненты магнитного поля H_φ.

Разумные знвчения числовых коэффициентов вязкости $\nu_0, \nu_0', \nu_0'', \mu_0', \mu_0''$ в формулах (4.I) - (4.4) выбираются путем численных экспериментов и зависят от конкретных решаемых задач.

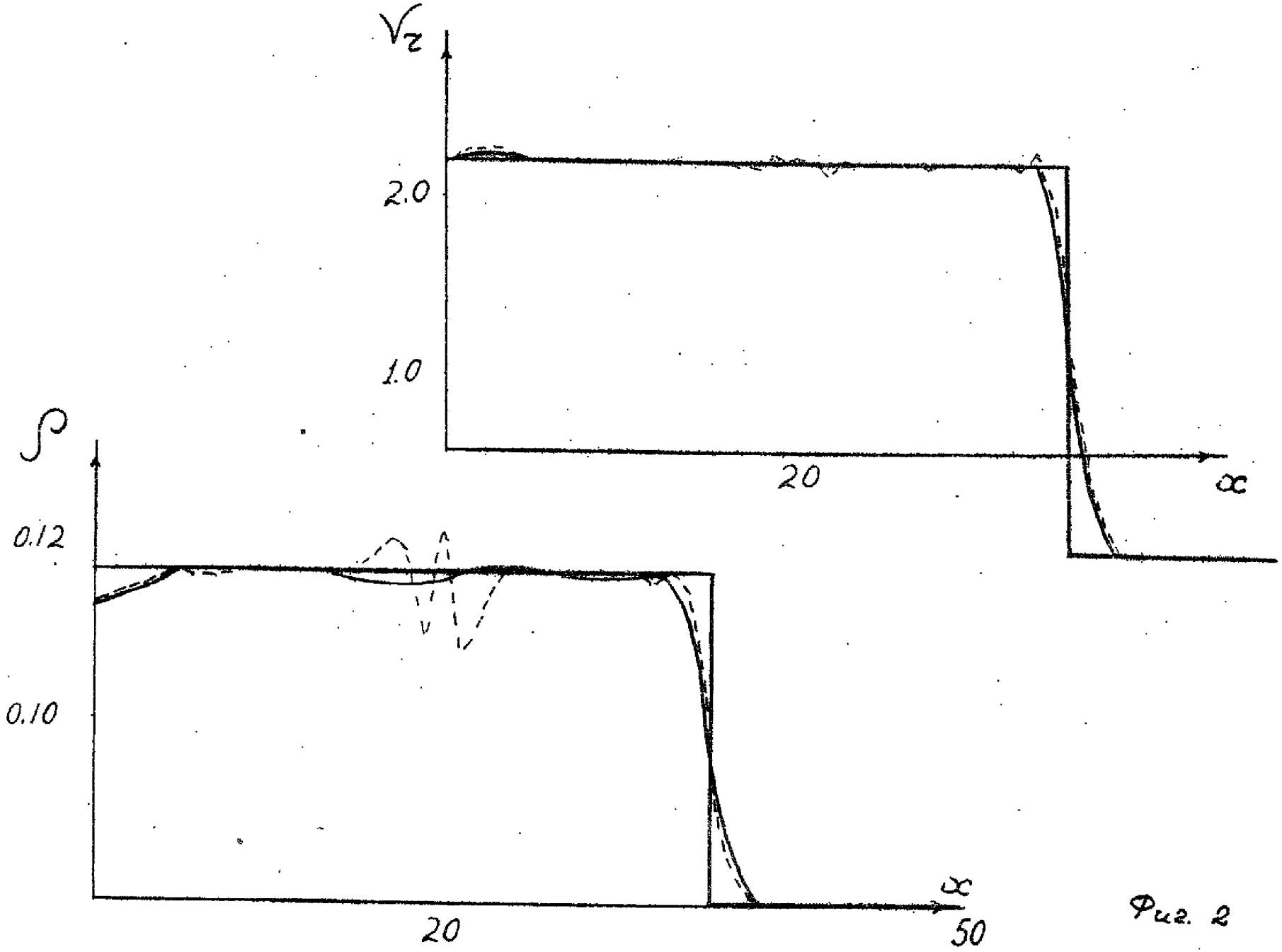
2. Приведенные выше различные виды разностных схем опробовались на многих численных примерах, в частности, на стационарных решениях с учетом большого комплекса нелинейных диссипативных процессов - тпелопроводности $\varkappa = \varkappa(\rho, T)$, проводимости $\sigma = \sigma(\rho, T)$ и псевдовязкостей вида (4.I) или (4.2) и (4.3), (4.4). При этом решение рассматривалось для случая, когда изучаемая среда имеет несколько областей с различными сильно-меняющимися физическими параметрами.

Приведем пример расчета на ЭВМ быстрых и медленных магнито-гидродинамических ударных волн для случая $\sigma = \infty$ (вмороженное магнитное поле), $\varkappa \equiv 0$, $H_{z_0} \neq 0$, $v_\varphi \equiv 0$, $H_\varphi \equiv 0$ с введением искусственных вязкостей в уравнения движения и в уравнения магнитного поля. Рассматривался плоский случай.



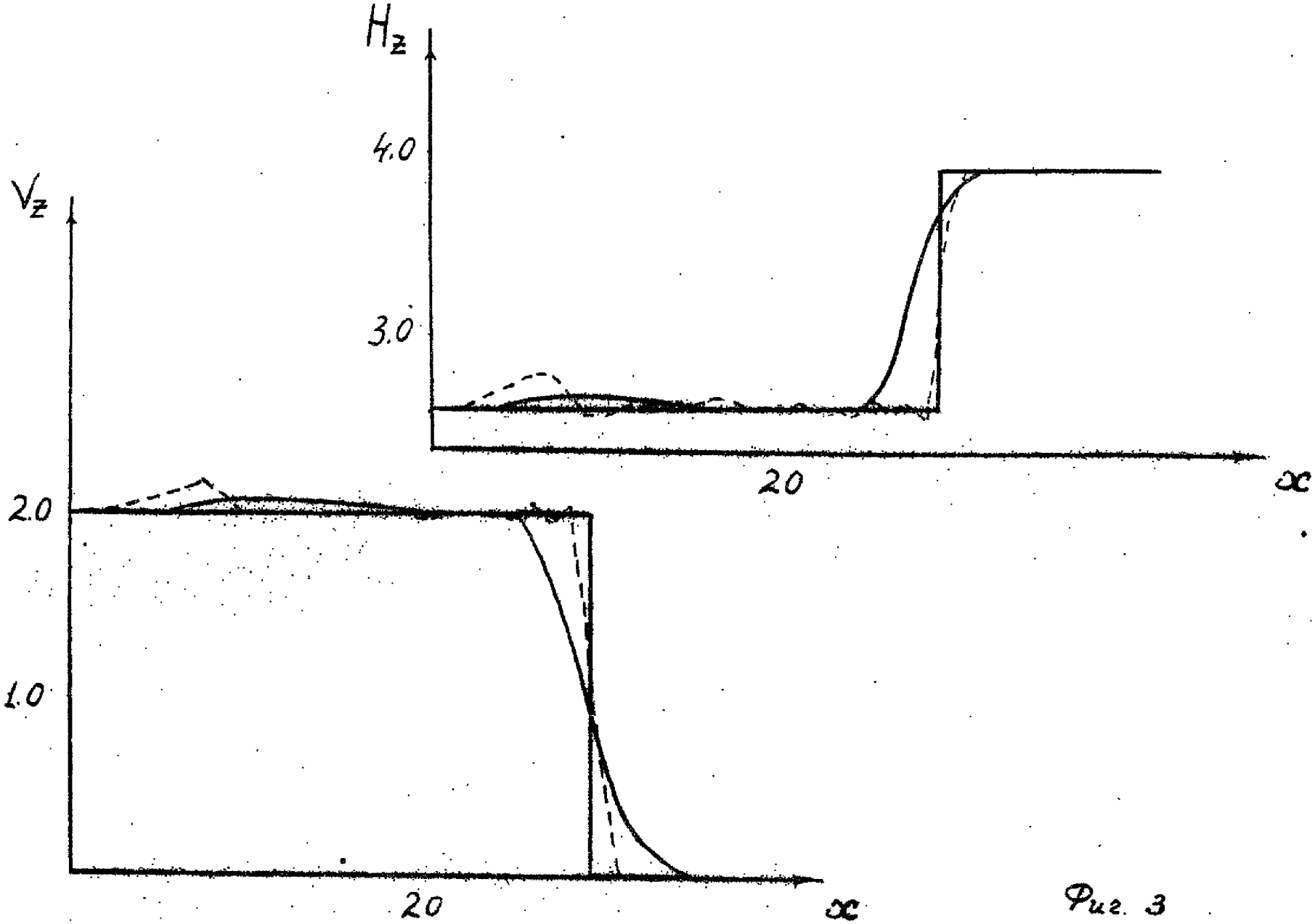
Фиг. 1

Быстрая ударная волна



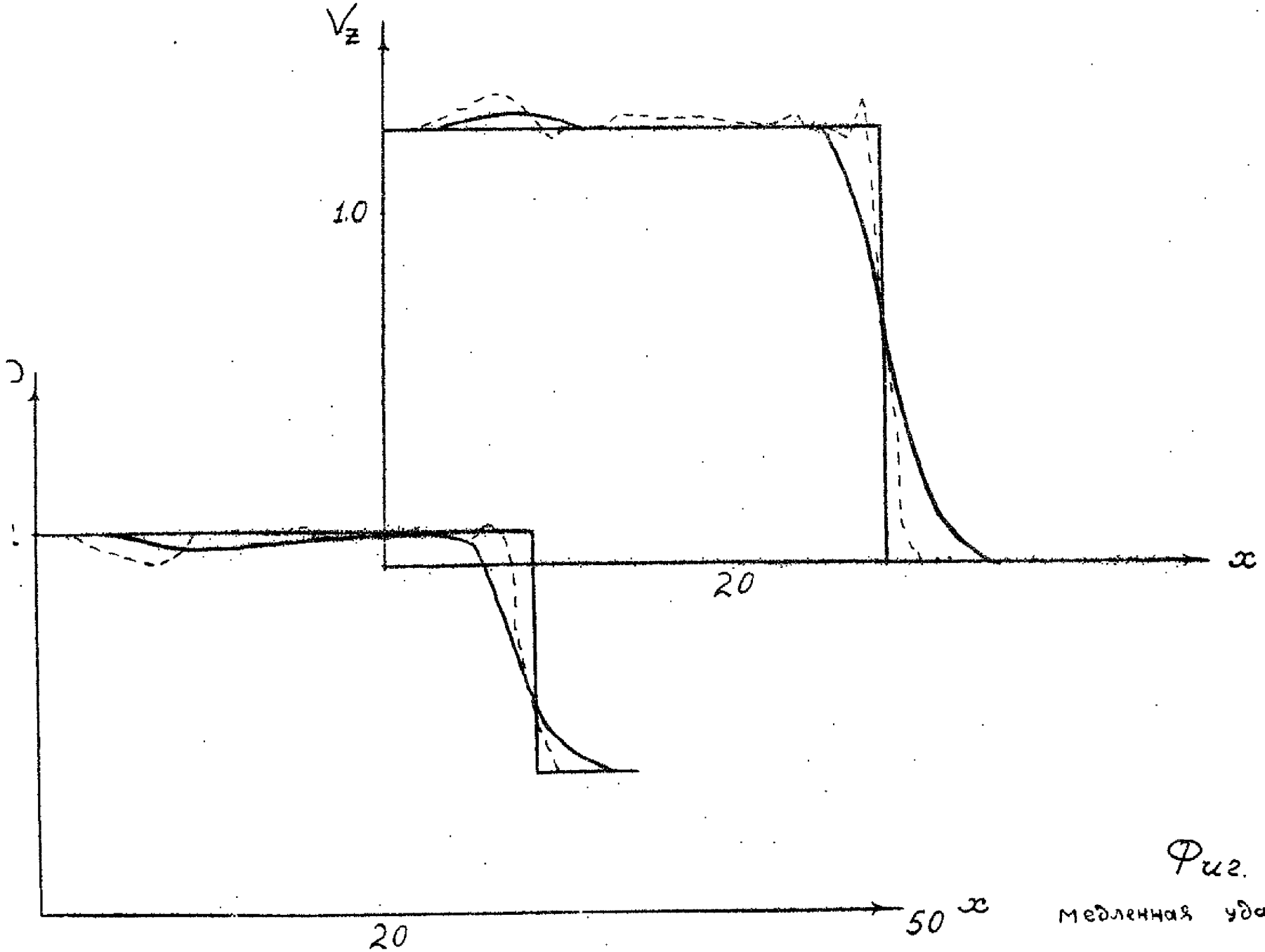
Фиг. 2

Быстрая ударная волна



Фиг. 3

Медленная ударная волна



Фиг. 4

медленная ударная волна

Расчеты проводились по неявным разностным схемам при $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 1/2$.

Для простоты использовалось уравнение состояния вида $P = Const \cdot \rho$. Результаты сравнения численных решений с аналитическим представлены на фиг. I - 4. На фиг. I - 4 жирной сплошной линией приведены графики аналитического решения, тонкой сплошной линией графики функций, сосчитанных с вязкостями вида (4.3), (4.4) и (4.I) при $\mu = 1$ (квадратичная вязкость). Пунктирной линией обозначены графики функций, полученных в результате расчета без вязких членов в уравнении поля.

Сетка по пространству в расчете была равномерной, причем было задано 50 массовых интервалов m_i .

Сравнение, приведенное на фиг.I-4, указывает на удовлетворительную точность расчетов.

Ряд расчетов показал, что определенным преимуществом по сравнению с другими видами вязкостей обладает комбинированная вязкость (4.2).

3. Вязкие члены (4.3), (4.4) позволяют при разностном счете правильно учесть только медленные и быстрые ударные волны. Следует заметить только, что при выборе коэффициентов вязкостей в магнитной гидродинамике необходимо следить за выполнением условий эволюционности разрывов.

Для возможности расчета альфвеновского разрыва требуется дополнительное исследование.

Проведенные расчеты показали, что размазывание альфвеновского разрыва разностной схемой приводит к возникновению

в зоне разрыва большого „пика" плотности, который распространяется в пространстве со временем и может в конце концов полностью исказить решение.

Дело в том, что на альфеновском разрыве общее давление $p + (H_z^2 + H_\varphi^2)/8\pi$ непрерывно, а магнитное поле H имеет разрыв: $H_{z_2} = -H_{z_1}$, $H_{\varphi_2} = -H_{\varphi_1}$. Разрыв в функции H размазывается разностной схемой. Вследствие этого, в общем давлении образуется большой перепад, который приводит к резкому уплотнению переходной зоны. Профили функций ρ и H в этом случае очень похожи на профили, изображенные ниже на фиг.8 и фиг.9 (см. § 7, стр.49,50).

Введение в разностную схему псевдовязкостей вида (4.3), (4.4) не меняет результат. Для правильного описания альфеновского разрыва в разностном решении, по-видимому, понадобиться алгорифм другого типа.

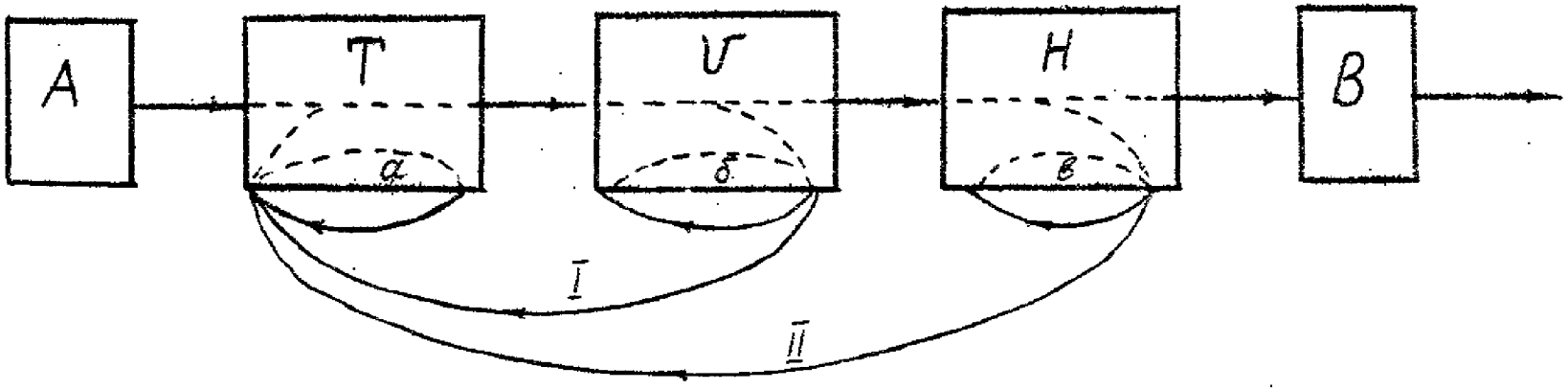
§ 5. Итерационный метод последовательных прогонок

I. Решение системы разностных уравнений (3.I)-(3.II) по неявным разностным схемам $(\gamma_1 \neq 0,\ \gamma_2 \neq 0,\ \gamma_3 \neq 0,\ \gamma_4 \neq 0)$ при учете диссипации энергии из-за электропроводности $\left(\sigma = \sigma(\rho, T),\ \frac{\partial \sigma}{\partial T} \geqslant 0\right)$ и теплопроводности $\left(\varkappa = \varkappa(\rho, T),\ \frac{\partial \varkappa}{\partial T} \geqslant 0\right)$ проводится т.н.итерационным методом последовательных прогонок.

Идея метода состоит в сведении отдельных уравнений системы к разностным уравнениям второго порядка и в последовательном применении для их решения известного метода прогонки (см.,например,[20],[21]). При этом порядок расчета отдельных уравнений системы (3.I)-(3.II) может быть различным. Была выбрана следующая последовательность расчета (см.схему расчета на фиг.5).

На каждом j -том слое сначала решается уравнение энергии (3.6) в предположении, что магнитно-гидродинамические величины известны. (прогонка по T). Затем решается система уравнений газодинамики (3.I)-(3.5) при известной температуре и фиксированных магнитных величинах (прогонка по V) и, наконец, система уравнений диффузии магнитного поля (3.7)-(3.8) при известных температуре и гидродинамических величинах (прогонка по H).

Каждая раздельная прогонка считается до выполнения условия сходимости. Однократный расчет первых двух прогонок (по T и по V) составляет один цикл малого круга. Все три



Фиг. 5

Схема расчёта на ЭВМ уравнений магнитной гидродинамики.

А - программа начальных данных для выхода на j слой по времени;

Т - часть Т (расчёт уравнения энергии);

V - часть V (расчет уравнения движения и непрерывности);

Н - часть Н (расчет уравнения диффузии магнитного поля);

В - программа заготовок для выхода на $j+1$ слой по времени;

а, б, в - схема итераций в каждой раздельной прогонке (расчёт до выполнения условий сходимости);

I - малый круг и II - большой круг (расчет до заданного числа циклов).

прогонки (по T , по V и по H) составляют один цикл большого круга. Каждый малый круг внутри большого, и затем каждый большой круг считаются до заданного числа циклов.

Опыт показывает, что для удовлетворительной точности расчетов достаточно двух циклов малого круга и двух циклов большого круга. Из многих численных расчетов следует, что максимальное число итераций при счете каждой раздельной прогонки - три-четыре.

Остановимся подробнее на методе решения каждой из вышеупомянутых групп уравнений системы (3.I)-(3.II).

2. Предположим, что в уравнении энергии (3.6) на j -том слое по времени гидродинамические величины, а также напряженность магнитного поля и магнитный поток известны.

Линеаризируем функцию $\varepsilon^j = \varepsilon(\rho^j, T^j)$ по методу Ньютона, т.е. представим в виде

$$\varepsilon^j = \varepsilon(\overset{s+1}{\Sigma}) = \varepsilon(\overset{s}{\Sigma}) + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Sigma}\right)^s \delta\overset{s}{\Sigma} \quad , \qquad (5.1)$$

где $\Sigma = T^{\alpha}/\alpha$, $\delta\overset{s}{\Sigma} = \overset{s+1}{\Sigma} - \overset{s}{\Sigma}$, s - номер итерации. Подставим (5.I) в (3.6) и используя выражения для потоков тепла W вида (3.I3) получим следующее разностное уравнение второго порядка относительно функции $\overset{s}{\Sigma}$:

$$\overset{s}{a}_i \overset{s+1}{\Sigma}_{i-1} - \overset{s}{b}_i \overset{s+1}{\Sigma}_i + \overset{s}{c}_i \overset{s+1}{\Sigma}_{i+1} + \overset{s}{g}_i = 0 \ , \qquad (5.2)$$

где

$$\overset{s}{a}_i = \overset{s}{K}_i , \qquad \overset{s}{b}_i = \overset{s}{K}_i + \overset{s}{K}_{i+1} + \left(\frac{\partial \overset{s}{\varepsilon}}{\partial \Sigma}\right) \frac{m_i}{\gamma_3 \tau^{j-1}} , \qquad \overset{s}{c}_i = \overset{s}{K}_{i+1} \tag{5.3}$$

$$\overset{s}{g}_i = \frac{m_i}{\gamma_3 \tau^{j-1}} \left[\left(\frac{\partial \overset{s}{\varepsilon}}{\partial \Sigma}\right)_i - \overset{s}{\varepsilon}_i \right] + F_i^{j-1} + L(v_i, H_i) , \tag{5.4}$$

$$F_i^j = \frac{m_i}{\gamma_3 \tau^{j-1}} \varepsilon_i^j + \frac{1-\gamma_3}{\gamma_3} \left(W_i - W_{i+1}\right)^j \tag{5.5}$$

Через функцию $L(v_i, H_i)$ в формуле (5.4) обозначены члены, выражающие работу сжатия и джоулев нагрев, значения которых предполагаются известными. Функция L имеет вид:

$$L(v_i, H_i) = -\frac{m_i}{\gamma_3 \tau^{j-1}} \left[\bar{E}_i^j - \bar{E}_i^{j-1} \right] + \left(\bar{q}_i - \bar{q}_{i+1}\right)^j + \frac{1-\gamma_3}{\gamma_3} \left(\bar{q}_i - \bar{q}_{i+1}\right)^{j-1}$$

где

$$\bar{E}_i = \left[(v_{z_i} + v_{z_{i+1}})^2 + (v_{\varphi_i} + v_{\varphi_{i+1}})^2 + (v_{z_i} + v_{z_{i+1}})^2 \right] / 8 + \left(H_{\varphi_i}^2 + H_{z_i}^2\right) / 8\pi \rho_i$$

$$\bar{q}_i = 0{,}5 \left(\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{i-1}\right) z_i^{j-1} v_{z_i} - \frac{H_{z_a}}{8\pi} \left[\left(H_{\varphi_{i-1}} + H_{\varphi_i}\right) v_{\varphi_i} + \left(H_{z_{i-1}} + H_{z_i}\right) v_{z_i} \right] + N_i$$

Функции K_i, ε_i и $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Sigma}\right)_i$ в общем случае являются произвольными функциями плотности и температуры:

$$\overset{s}{K}_i = K(\rho_i, \overset{s}{T}_i) , \qquad \overset{s}{\varepsilon}_i = \varepsilon(\rho_i, \overset{s}{T}_i)$$

Решение уравнения (5.2) находится по простым рекуррентным формулам прогонки:

$$\overset{s+1}{\theta}_{i+1} = \overset{s}{c}_i \Big/ (\overset{s}{b}_i - \overset{s}{a}_i \overset{s+1}{\theta}_i) \,, \qquad \overset{s+1}{\zeta}_{i+1} = (\overset{s}{a}_i \overset{s+1}{\zeta}_i + \overset{s}{g}_i) \Big/ (\overset{s}{b}_i - \overset{s}{a}_i \overset{s+1}{\theta}_i) \,,$$

$$\overset{s+1}{\Sigma}_i = \overset{s+1}{\zeta}_{i+1} + \overset{s+1}{\theta}_{i+1} \overset{s+1}{\Sigma}_{i+1} \,, \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{5.6}$$

Вычисление по формулам (5.6) ведется либо до выполнения условия, сходимости

$$\left| \overset{s+1}{\Sigma}_i - \overset{s}{\Sigma}_i \right| \le \varepsilon_T \overset{s}{\Sigma}_i \tag{5.7}$$

где ε_T малая величина, либо до заданного числа итераций ($s \le s_{max}$)

Значения функций θ_0 и ζ_0 и функции Σ_N определяются граничными значениями, заданными для функций T или W соответственно в точках $x = 0$ и $x = x_N = \ell$ (см.п.4, § 3)

Запишем краевые условия для уравнения (5.I) в следующем виде:

$$\Sigma_0 = \gamma_1 \Sigma_{1+1/2} + \beta_1 \,, \qquad \Sigma_N = \gamma_2 \Sigma_{N-1/2} + \beta_2 \tag{5.8}$$

Если в точке $x = 0$ и $x = x_N$ заданы условия $T(0,t) = T_0^*(t)$ и $T(x_N, t) = T_\ell^*(t)$, то в (5.8) следует положить $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\beta_1 = [T_0^*(t)]^\alpha / \alpha$, $\beta_2 = [T_\ell^*(t)]^\alpha / \alpha$. (Условие I рода).

Если в точке $x = 0$ задано краевое условие для теплового потока $W(0,t) = K_0 (\Sigma_0 - \Sigma_{1/2}) = W_0^*(t)$, то при $K_0 \ne 0$ в первом уравнении (5.8) полагаем $\gamma_1 = 1$, $\beta_1 = \dfrac{W_0^*(t)}{K_0}$

При $K_0 = 0$ имеем $\gamma_1 = 1$, $\beta_1 = 0$.

Аналогично, если в точке $x = \ell$ задается условие $w(\ell, t) = w_\ell^*(t)$ Положим в (5.8) $\chi_2 = 1$, $\beta_2 = w_\ell^*(t)/K_N$ при $K_N \neq 0$.

Начальные условия для определения функций θ_i, ζ_i и Σ_i по формулам (5.6) запишутся в следующем виде:

$$\theta_0 = \chi_1 , \qquad \zeta_0 = \beta_1 , \qquad \Sigma_N = \frac{\beta_2 + \chi_2 \zeta_N}{1 - \chi_2 \theta_N} \qquad (5.9)$$

$$1 - \chi_2 \theta_N \neq 0$$

Из формул (5.2) следует, что коэффициенты a_i, b_i, c_i уравнения (5.I) удовлетворяют неравенствам

$$a_i > 0 , \qquad c_i > 0 , \qquad b_i \geq a_i + c_i + \delta , \qquad \delta > 0 \qquad (5.10)$$

При выполнении неравенств (5.I0) краевая задача (5.I) (5.8) разрешима, причем счет по формулам прогонки (5.6) устойчив к ошибкам округления.

3. Для решения системы уравнений газодинамики (3.I)-(3.5) аналогично изложенному выше предполагается, что на данном j-том слое по времени температура T и напряженности магнитного поля H_1 и H_2 известны. Каждая из газодинамических функций τ, p, ρ, ω на j-м слое линеаризируется по Ньютону, т.е. представляется в виде $f(\overset{s+1}{V}) = f(\overset{s}{V}) + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right) \delta \overset{s}{V}$ где $\delta \overset{s}{V} = \overset{s+1}{V} - \overset{s}{V}$. Уравнение (3.I) сводится к разностному уравнению типа (5.2) относительно функции $\overset{s+1}{V}$ и решается методом прогонки с итерациями по рекуррентным формулам аналогичным (5.6).

4. Метод решения системы уравнения диффузии магнитного поля (3.7)-(3.8) при $\sigma < \infty$ аналогичен методу решения урав-

нения энергии (3.6), изложенному в п.2.

Если граничные значения функций $H_\varphi(x_N, t)$ и $H_z(x_N, t)$ являются заданными функциями времени, то каждое из уравнений (3.7)-(3.8) в предположении, что гидродинамические и тепловые величины фиксированы является линейным разностным уравнением второго порядка относительно H_φ и H_z В этом случае уравнения (3.7) и (3.8) решаются методом прогонки по функциям H_φ и H_z без итераций по формулам аналогичным (5.6).

В случае, когда для нахождения значений функций $H_\varphi(x_N, t)$ и $H_z(x_N, t)$ требуется решение уравнений электротехнической цепи возникает определенный итерационный процесс. Выбор итерационного процесса и вид уравнений цепи существенно зависит от специфики решаемой конкретной задачи или серии задач. На всех этих специфических случаях мы здесь останавливаться не будем.

§ 6. Анализ устойчивости системы разностных уравнений

Проблема исследования устойчивости полной системы разностных уравнений (3.I)-(3.II) с учетом всех диссипативных членов и видов интерполяций функций очень сложна. Вопросы устойчивости параболических уравнений в принципе исследованы (см. [9] -[I2]). Опыт показывает, что наибольшее ограничение на шаг по времени требуется накладывать в предельном случае $\nu_m \equiv 0$, $\varkappa \equiv 0$, т.е. когда диссипативные члены отсутствуют и система уравнений является гиперболической.

Проведем анализ устойчивости системы (3.I)-(3.8) в предположении $\nu_m \equiv 0$, $\varkappa \equiv 0$. При этом, для сравнения рассмотрим также соответствующие разностные схемы, используемые для расчетов в работах [I] - [4], а также схему аналогичную разностной схеме, рассматриваемой для уравнения обычной газодинамики (без учета поля) в работе [I5]. Для единой записи всех вышеупомянутых схем введем наряду с весовыми множителями $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ множитель β_1 , выделяющий в уравнении движения члены, зависящие от напряженности магнитного поля (лоренцову силу) и множитель α_1 , выделяющий в уравнении состояния зависимость давления от температуры. (см.ниже формулы (6.5)-(6.I0))

Ограничимся плоским случаем $\nu = 1$ и не будем учитывать псевдовязкость. Будем считать также справедливым уравнение состояния идеального газа:

$$P = R\rho T , \qquad \varepsilon = RT/(\gamma-1) \tag{6.1}$$

где R – газовая постоянная, γ – постоянное отношение удельных теплоемкостей. Результаты анализа устойчивости приводимые ниже нетрудно обобщить и на случай произвольных уравнений состояния с учетом псевдовязкости.

Кроме того для упрощения анализа ограничимся более простым случаем схемы, аппроксимирующей уравнение энергии в недивергентной форме, т.е. в следующем виде, эквивалентном (2.6):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{\nu-1} v_r\right) - \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\nu_m}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{\nu-1} H_\varphi\right)\right)^2 + \left(r^{\nu-1}\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (6.2)$$

При $\nu_m \equiv 0$ уравнение (6.2) совпадает с уравнением энергии для обычной газодинамики с теплопроводностью (без поля).

В этом случае соответствующее разностное уравнение энергии запишем в следующем виде:

$$\frac{\varepsilon_i^j - \varepsilon_i^{j-1}}{\tau^{j-1}} = -\frac{1}{m_i}\left\{\gamma_3\left[p_i\left(r_{i+1}^{\nu-1} v_{r_{i+1}} - r_i^{\nu-1} v_{r_i}\right) + W_i - W_{i+1}\right]^j + \right.$$
$$\left. + (1-\gamma_3)\left[p_i\left(r_{i+1}^{\nu-1} v_{r_{i+1}} - r_i^{\nu-1} v_{r_i}\right) + W_i - W_{i+1}\right]^{j-1}\right\} \qquad (6.3)$$

Анализ устойчивости проведем, используя спектральный метод (см. [6])

Предположим, что искомые сеточные функции на j-том слое имеют вид

$$f_i^j = f_0 + \hat{f}_i^j \qquad (6.4)$$

где $\hat{f}_i^j$ – малые отклонения от постоянных значений f_0 .

Подставляя (6.4) в уравнения (3.I)-(3.5) (3.7),(3.8) (6.3) при $\nu_m \equiv 0$, $\varkappa \equiv 0$ и $\nu = 1$ получим следующую линейную систему разностных уравнений для функций $\hat{f}_i^j$:

$$\hat{v}_i^j - \hat{v}_i^{j-1} + \lambda\left\{-\frac{P_0}{\eta_0}\left[\gamma_1\left(\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial x}\right)_i^j + (1-\gamma_1)\left(\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial x}\right)_i^{j-1}\right] + \frac{R}{\eta_0}\left[\alpha_1\left(\frac{\partial\hat{T}}{\partial x}\right)_i^j + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (1-\alpha_1)\left(\frac{\partial\hat{T}}{\partial x}\right)_i^{j-1}\right] + \frac{H_0}{4\pi}\left[\beta_1\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial x}\right)_i^j + (1-\beta_1)\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial x}\right)_i^{j-1}\right]\right\} = 0 \qquad (6.5)$$

$$\hat{u}_i^j - \hat{u}_i^{j-1} - \frac{H_{z_0}}{4\pi}\lambda\left[\beta_1\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial x}\right)_i^j + (1-\beta_1)\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial x}\right)_i^{j-1}\right] = 0 \qquad (6.6)$$

$$\hat{\tau}_i^j - \hat{\tau}_i^{j-1} - \gamma_2\tau\hat{v}_i^j - (1-\gamma_2)\tau\hat{v}_i^{j-1} = 0 \qquad (6.7)$$

$$R(\hat{T}_i^j - \hat{T}_i^{j-1}) + (\gamma-1)P_0\lambda\left[\gamma_3\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\right)_i^j + (1-\gamma_3)\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\right)_i^{j-1}\right] = 0 \qquad (6.8)$$

$$\hat{H}_i^j - \hat{H}_i^{j-1} + \frac{1}{\eta_0}\lambda\left\{\gamma_4\left[H_0\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\right)_i^j - H_{z_0}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right)_i^j\right] + \right.$$
$$\left. + (1-\gamma_4)\left[H_0\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\right)_i^{j-1} - H_{z_0}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right)_i^{j-1}\right]\right\} = 0 \qquad (6.9)$$

$$\hat{\eta}_i^j = 1/\hat{\rho}_i^j = \left(\frac{\partial\hat{\tau}}{\partial x}\right)_i^j \qquad (6.10)$$

где $\lambda = \tau/m$, $\tau = \tau^j$, $m = m_i$, через u и H обозначены соответственно одна из компонент скорости v_y или v_z и напряженности магнитного поля H_y или H_z. Разностные выражения для производных по x в системе (6.5)-(6.I0) имеют вид аналогичный правым частям системы уравнений (3.I) -(3.II).

При значениях весовых множителей $\gamma_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$ имеем для системы гиперболических уравнений (6.5)-(6.10) явную схему "крест". В частности, схема "крест" рассматривается в работе [4]. При $\gamma_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 1$ имеем неявную схему с опережением, при $\gamma_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 1/2$ симметричную неявную схему.

При значениях весовых множителей $\gamma_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ имеем разностную схему, используемую для расчетов в работах [I]-[3]. При $\gamma_1 = 1, \alpha_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 1$ имеем неявную схему, рассматриваемую в [I5]. Заметим, что формально схемы, аналогичные [I5] являются частным случаем чисто неявной схемы с опережением, если в описанном в § 5 настоящей работы методе последовательных прогонок задавать лишь один цикл большого круга и одну итерацию в каждой из раздельных прогонок (см. § 5 и фиг.5). При этом, в случае $\beta_1 = 0$ и $\gamma_4 = 1$ упомянутая выше разностная схема соответствует последовательности счета прогонок $V \to T \to H$, в случае $\beta_1 = 1$, $\gamma_4 = 0$ – последовательности $H \to V \to T$. Разностные схемы, рассматриваемые при значениях $\gamma_1 = \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0, \gamma_2 = 1$ $\gamma_3 = 0, \gamma_4 = 1$ или при значениях $\gamma_1 = \alpha_1 = 1, \beta_1 = \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0, \gamma_4 = 0$ формально соответствуют одному циклу раздельных прогонок для схемы с опережением рассматриваемых в последовательности $T \to V \to H$ или $H \to T \to V$.

Проведем анализ устойчивости каждой из вышеупомянутых разностных схем. Для этого, аналогично [6] будем рассматривать каждую из функций $\hat{f}_i^j$, удовлетворяющей системе

(6.5)-(6.10), в виде компоненты ряда Фурье.

$$\hat{f}_i^j = \hat{f}_0 s^j e^{ik\varphi_0} \tag{6.11}$$

где $\hat{f}_0$ – начальное малое отклонение (амплитуда).

Система разностных уравнений является устойчивой, если малые отклонения (ошибки) затухают со временем, т.е. $|s|<1$

Анализ устойчивости системы (6.5)-(6.10) сводится к анализу корней характеристического уравнения $\mathcal{P}(s) = 0$, где $\mathcal{P}(s)$ многочлен с действительными коэффициентами, выраженными через постоянные коэффициенты, входящие в систему (6.5)-(6.10).

Рассмотрим ряд конкретных разностных схем.

1) Анализ, проведенный для случая $H_{z_0}=0$, показывает, что неявные схемы с опережением ($\gamma_i = \alpha_1 = \beta_1 = 1$) и симметричная схема ($\gamma_i = \alpha_1 = \beta_1 = 1/2$), а также неявная схема $\gamma_1 = \beta_1 = \alpha_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 1/2$ безусловно устойчивы.

2) Рассмотрим для случая произвольного значения H_{z_0} схему "Крест" ($\gamma_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$). В этом случае многочлен имеет вид

$$\mathcal{P}(s) = s^4 + (\gamma A + B + E - 4)s^3 + [6 + \gamma(AE - 2A) - 2(B+E)]s^2 + \\ + (\gamma A + B + E - 4)s + 1 \tag{6.12}$$

где

$$A = 4\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot\lambda^2\frac{\rho_0}{\eta_0}, \qquad B = 4\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot\lambda^2 H_0^2/4\pi\eta_0,$$

$$E = 4\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot\lambda^2 H_{z_0}^2/4\pi\eta_0$$

Многочлен (6.12) можно представить в виде произведения двух многочленов второй степени, т.е.

$$\mathcal{P}(s) = \left[s^2 + 2s\left(2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\lambda^2\cdot C_{+0}^2/\eta_0^2 - 1\right) + 1\right]\cdot$$
$$\cdot\left[s^2 + 2s\left(2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\lambda^2\cdot C_{-0}^2/\eta_0^2 - 1\right) + 1\right] \qquad (6.13)$$

где C_+ и C_- – т.н. быстрая и медленная магнитно-гидродинамические скорости звука, имеющие соответственно вид (см., например, [18])

$$C_+^2 = \frac{1}{2}\left[\gamma p\eta + (H^2+H_{\tau_0}^2)\eta/4\pi + \sqrt{\left(\gamma p\eta + (H^2+H_{\tau_0}^2)\eta/4\pi\right)^2 - 4\gamma p\eta^2 H_{\tau_0}^2/4\pi}\right]$$
$$C_-^2 = \frac{1}{2}\left[\gamma p\eta + (H^2+H_{\tau_0}^2)\eta/4\pi - \sqrt{\left(\gamma p\eta + (H^2+H_{\tau_0}^2)\eta/4\pi\right)^2 - 4\gamma p\eta^2 H_{\tau_0}^2/4\pi}\right] \qquad (6.14)$$

Исследуя корни каждого из многочленов второй степени в (6.13) и используя условие $C_- < C_+$, получим следующее условие устойчивости для рассматриваемой разностной схемы

$$\tau < \frac{\eta_0 m}{C_{+0}} \qquad (6.15)$$

Условие (6.15) является обобщением известного для обычной газодинамики условия Куранта ($\tau < \Delta\tau/c$, где $c = \sqrt{\gamma p\eta}$, $\Delta\tau = \eta m$) для системы разностных уравнений магнитной гидродинамики.

Опыт показывает, что в ряде задач величина C_+ может быть большой и следовательно условие устойчивости (6.15) может существенно ограничивать шаг по времени τ . Поэтому

явными схемами для уравнений магнитной газодинамики практически пользоваться нецелесообразно.

Заметим, что анализ устойчивости разностной схемы, используемой в работах [I]- [3], ($\gamma_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 1$ и $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$) в системе (6.5)-(6.10) приводит также к условию (6.15), т.к. такая схема при отсутствии диссипативных членов (вязкости, теплопроводности и конечной электропроводности) по существу является явной схемой типа "крест".

3) Рассмотрим теперь неявные схемы, аналогичные рассматриваемой в [15], и соответствующие одному циклу последовательных прогонок в схеме с опережением, о которых подробно говорилось на стр.40. Анализ, проведенный для случая $H_{\eta_0} = 0$, показывает, что независимо от порядка применения последовательных прогонок, т.е. любая из таких схем, является безусловно-устойчивой лишь при выполнении условия

$$H^2/8\pi \leq (1 - \gamma/2)\,p$$

или

$$\gamma \leq 2\,(1 - R_m)\,, \quad R_m = H^2/8\pi p \tag{6.16}$$

При

$$H^2/8\pi > (1 - \gamma/2)\,p$$

или

$$\gamma > 2\,(1 - R_m) \tag{6.17}$$

условие устойчивости имеет вид:

$$\tau < \eta_0 m \Big/ \sqrt{c_{+_0}^2 - 2p_0\eta_0} \tag{6.18}$$

При $H=0$ из условий (6.16) и (6.17) непосредственно следуют условия устойчивости, приведенные в [15].

При $H \neq 0$ и особенно в случае $R_M \gtrsim 1$, т.е. для широкого класса практичеоки интересных задач, рассматриваемая в этом пункте разноотная схема, вряд ли является более экономичной (в смысле быстроты счета), чем схема с опережением, т.к. для устойчивости требуется определенное ограничение на шаг вида (6.18). Кроме того, оледует заметить, что при аппроксимации системы (2.1)-(2.12) такими схемами нарушается дивергентность по времени в уравнении движения и в уравнении энергии, т.е. консервативность разностных схем.

Проведенные численные эксперименты показывают, что в общем случае, при наличии в ореде диссипативных членов теплопроводности и конечной проводимооти наиболее выгодной как в смысле точности, так и в смысле экономичности является безусловно устойчивая неявная разностная схема, получаемая при значениях весовых множителей $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 1/2$ (см. формулы (3.1)-(3.11)), т.е. неявная схема с опережением для системы гиперболических уравнений движения и непрерывности и симметричная неявная схема для системы параболических уравнений энергии и диффузии магнитного поля.

§ 7. Сравнение численных решений с автомодельными.

Оценка точности выше описанных численных методов решения системы разностных уравнений магнитной гидродинамики с учетом нелинейной теплопроводности и электропроводности проводилось путем сравнения с соответствующими автомодельными решениями. Ниже приводится пример.

Рассмотрим следующую плоскую задачу (см. [17]). Пусть газ с начальными условиями

$$v(r,0)=0, \qquad T(r,0)=0, \qquad \rho(r,0)=\delta_1\rho_1 r^{\ell}, \qquad H_2(r,0)=h_1\rho_1^{0.5}V_0^{(\ell+2)/2}, \quad (7.1)$$

где δ_1, h_1 – безразмерные, а ρ_1 и V_0 – размерные постоянные, занимает область значений $r>0$. В точке $r=0$ при $t=0$ находится поршень. При $t>0$ поршень начинает двигаться по закону $r_п=\lambda_0 V_0 t^n$, $n>0$, причем

$$v(r_п,t)=\alpha_0 V_0 t^{n-1}, \qquad T(r_п,t)=f_0 V_0^2 R^{-1} t^{2(n-1)}, \qquad H(r_п,t)=h_0 V_0^{(\ell+2)/2}\rho_1, \quad (7.2)$$

где α_0, f_0, h_0 – соответственно безразмерные значения скорости, температуры и напряженности магнитного поля на поршне. Коэффициенты теплопроводности $\varkappa$ и электропроводности σ зависят от температуры и плотности по степенному закону

$$\varkappa=\varkappa_0 T^{m}\rho^{-\sigma}, \qquad \sigma=\sigma_0 T^{-m_1}\rho^{\sigma_1}.$$

Предполагается, что $H_{r_0}=0$, $H_\varphi\equiv 0$.

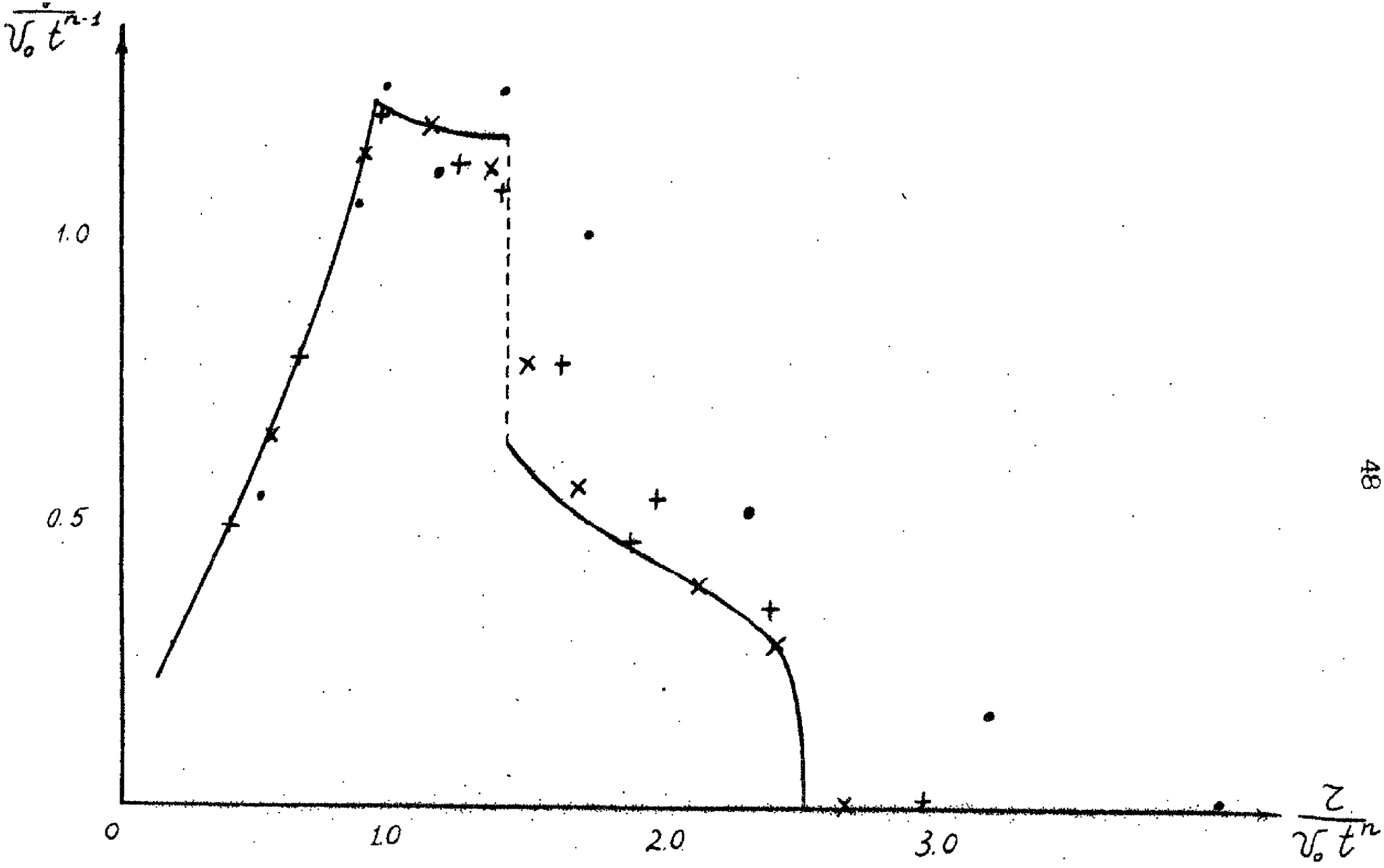
При выполнении условий

$$2m(n-1)-n\sigma\ell-n(\ell+2)+1=0,\quad m_1=\frac{n\sigma_1\ell+2n-1}{2(n-1)},\quad \ell=-\frac{2(n-1)}{n} \qquad (7.3)$$

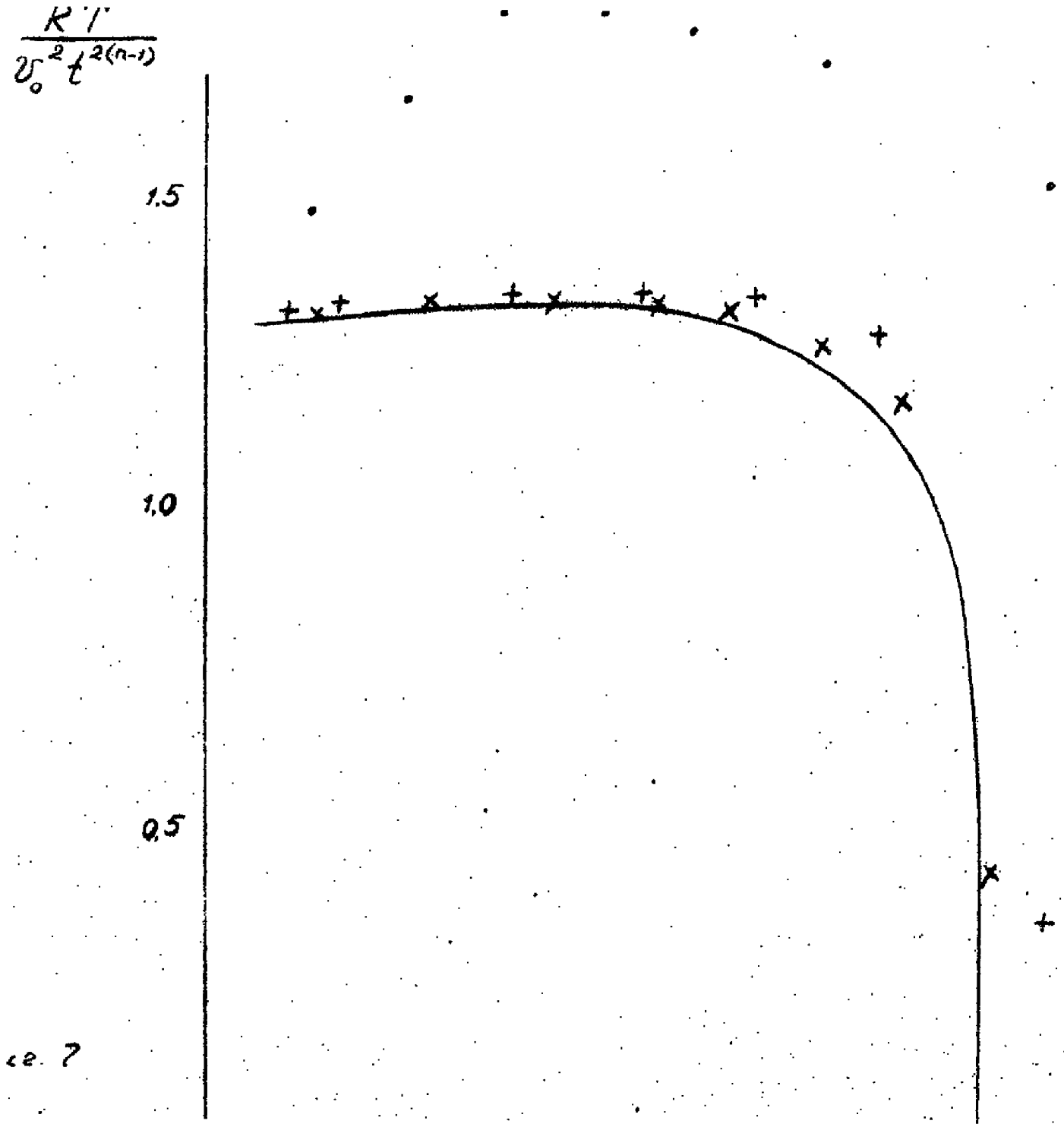
решение задачи (7.I)-(7.2), (2.I)-(2.I2) является автомодельным о автомодельной переменной вида $\lambda = r/r_0 t^n$. Рассматриваемое автомодельное решение сравнивалось с соответствующим численным решением системы разностных уравнений (3.I)-(3.II). При этом, расчет начинался с момента времени $t=0$ при краевых значениях (7.I)-(7.2), где полагалось $\lambda_0 = 0{,}156$, $\alpha_0 = 0{,}234$, $f_0 = 1{,}30$, $h_0 = -14{,}0$, $\delta_1 = 0{,}543$, $h_1 = 12{,}0$ (все функции измерялись в чисто условных единицах) и при значениях постоянных $\ell = -2/13$, $n = 13/12$, а также при значениях показателей зависимости коэффициентов $\varkappa$ и σ от температуры $m = 5$, $m_1 = -3/2$. Далее, с течением времени осуществлялся выход на автомодельный режим.

На фиг.6-9 представлены соответственно сравнительные графики зависимостей безразмерных функций скорости $v/r_0 t^{n-1}$ (см.фиг.6), температуры $RT/r_0^2 t^{2(n-1)}$ (см.фиг.7), плотности $\rho/\rho_1 r^{\ell}$ (см. фиг.8) и напряженности магнитного поля $H_z/r_0^{0.5(\ell+2)}\rho_1^{0.5}$ (см.фиг.9) от безразмерной эйлеровой координаты $r/r_0 t^n$, т.е. в автомодельных переменных. Сплошные линии на этих фигурах изображают автомодельные решение, а точки и крестики - соответствующие значения численного решения в различные моменты времени t.

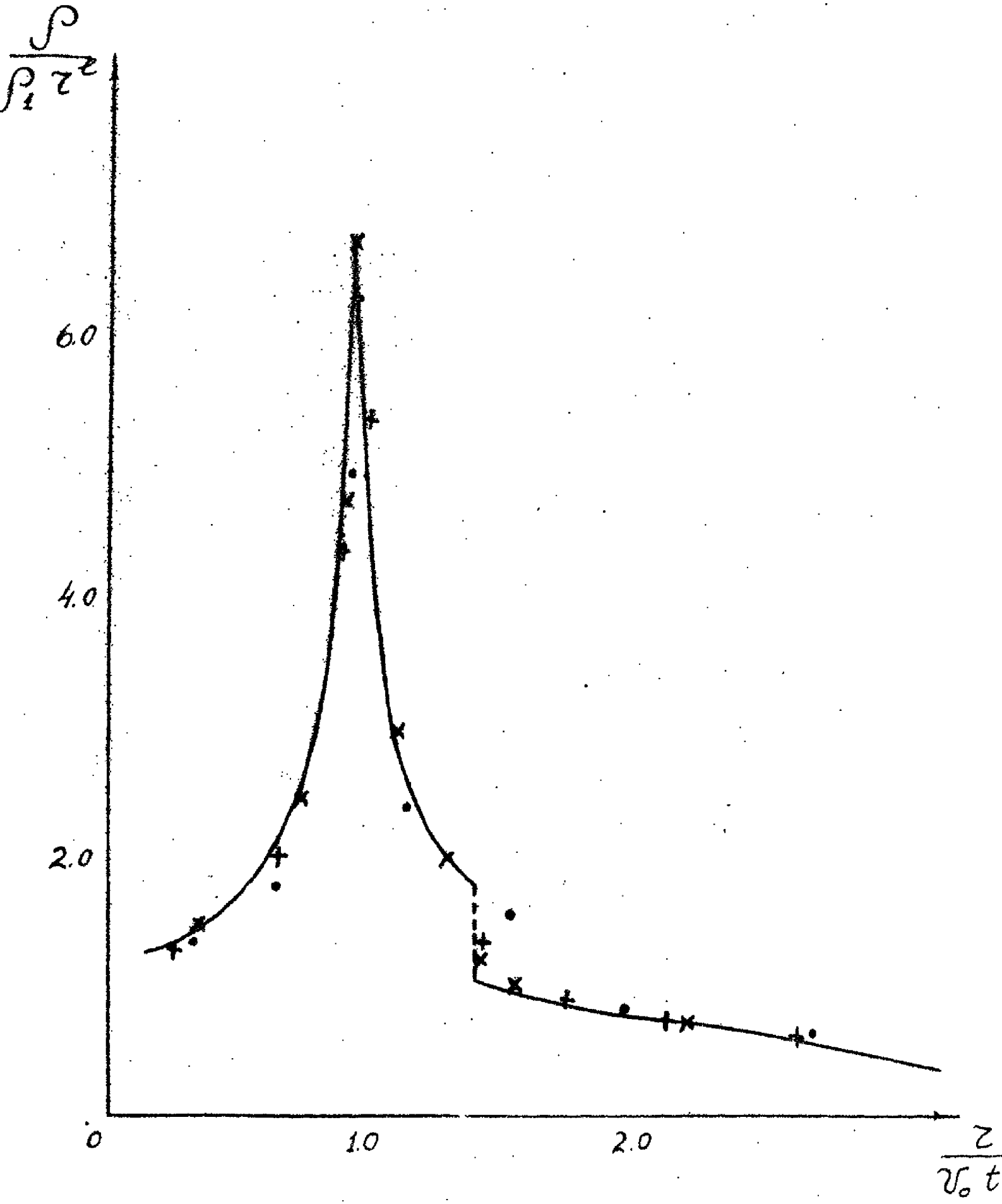
Несмотря на некоторую "экзотичность" граничных и начальных условий в рассматриваемой автомодельной задаче учитывается существенная нелинейность электропроводности ($\sigma \sim T^{3/2}$)



Фиг. 6



Ce. 7



Фиг. 8

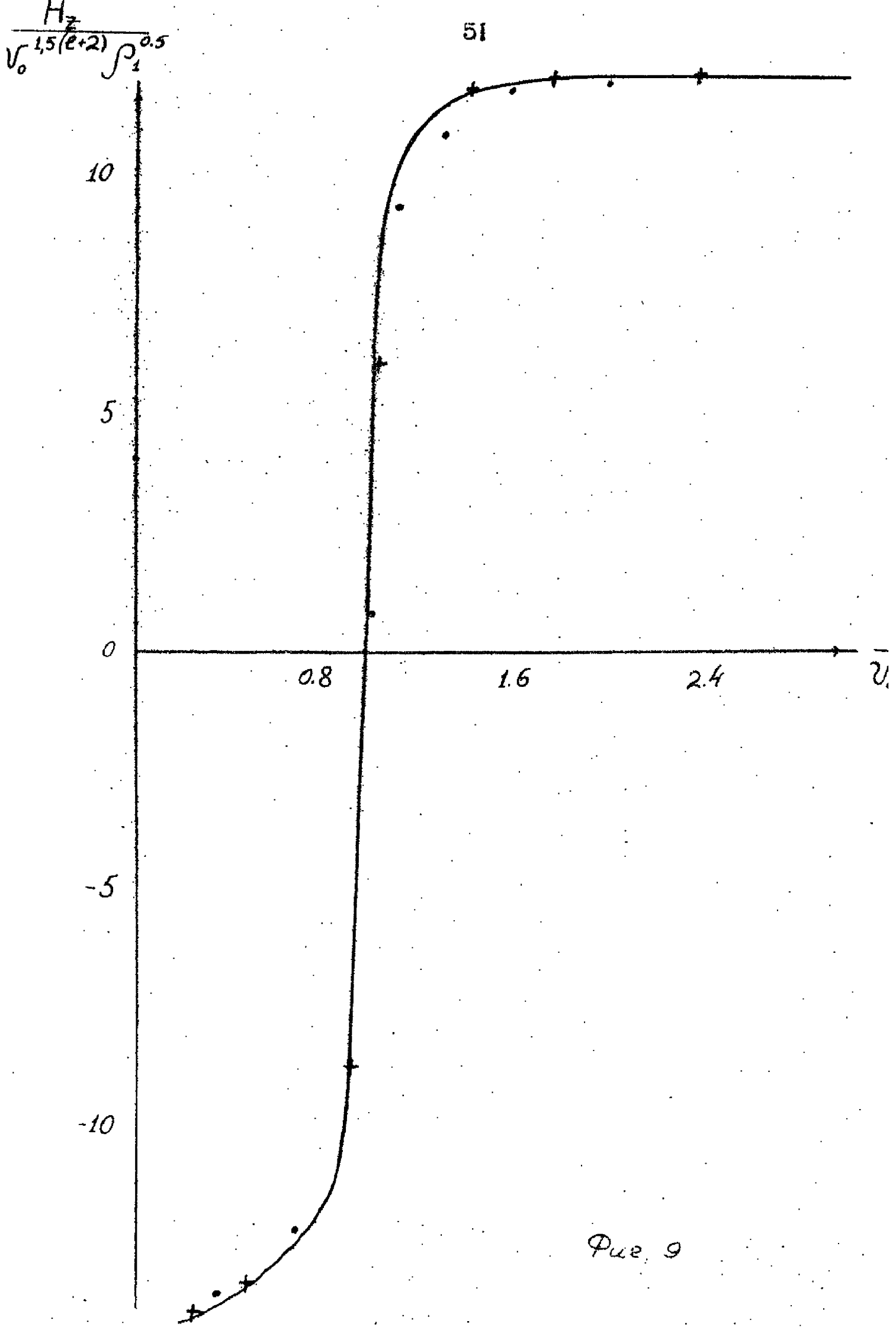


Рис. 9

и теплопроводности ($\varkappa \sim T^5$). Структура автомодельного решения имеет следующий вид: суммарное давление поршня $p + H^2/8\pi$ создает впереди поршня изомагнитно-изотермическую ударную волну (ударную волну с непрерывной температурой и напряженностью магнитного поля). Температурная волна обгоняет фронт ударной волны и движется в режиме ТВ-I (см. [13] , [14]). Фронт ТВ-I находится в точке $\lambda = \lambda_1 = 2.5$ Заданный в начальный момент $t = 0$ разрыв напряженности поля H ($h_0 = -14$, $h_1 = 12$) приводит к установлению в автомодельном решении зоны резкого градиента поля с сильным уплотнением (см.фиг.8 и 9).

Расчет проводился методом последовательных прогонок по неявной схеме при $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 1/2$. Точки на фиг:6-9 соответствуют моменту времени $t = t_1$, при котором волна возмущения (температурная волна) укладывается на 9-и массовых интервалах сетки, прямые крестики - моменту $t = t_2$, при котором температурная волна охватывает I4 массовых интервалов и косые крестики соответствуют моменту $t = t_3$ с 24 массовыми интервалами сетки в зоне температурной волны.

Численное решение показывает, что довольно быстро и точно осуществляется выход на автомодельный режим. Для расчета было выбрано 50 массовых интервалов пространственной сетки. Уже при распространении температурной волны на 24 интервала сетки результаты численных решений мало отличаются от соответствующих автомодельных решений. Достаточно точно передается в численном решении большое уплотнение "ПИК" плотности) в зоне резкого градиента магнитного поля (см.фиг.8).

Сетка по времени и пространству в расчете была равномерной. При этом шаг по времени τ был выбран так, что за временной интервал τ ударная волна распространяется на I/4 маосового интервала m_i .

§ 8. Дивергентная форма уравнения диффузии магнитного поля. Потоковая прогонка.

Изложенная выше методика была реализована в виде программы в 1962 г. и использовалась для расчёта большого числа магнито-гидродинамических задач. Некоторые из примеров приводились выше.

В процессе расчетов был выявлен ряд недостатков, которые в настоящее время частично устранены, частично подлежат дальнейшему изучению и устранению. Описание некоторых из них дается в § 4, п.3.

Одним из существенных недостатков явился также плохой счёт уравнений диффузии магнитного поля методом прогонки по функции H (особенно в случае $H = H_\varphi$)при значениях электропроводности σ близких к нулю или раных нулю. Аналогичные недостатки, встречающиеся в расчетах, отмечались также в работе [4] . Дело в том, что при $\sigma = 0$ производные $\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{\nu-1} H_\varphi\right)$ и $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ равны нулю и значения потоков Φ и ψ в вышеприведенных формулах становятся неопределенными. По физическому смыслу функции Φ и ψ имеют в этом случае конечное значение. Существование неопределенности в разностном уравнении диффузии магнитного поля приводит к болтанке и в ряде случаев к значительным искажениям в решении.

В работе [23] для случая σ близких к нулю и $\sigma = 0$ предлагается рассматривать для уравнения диффузии поля прогонку не по функции H , а по функции потоков Φ и ψ . В последнем случае конечные значения функций Φ и ψ будут непосредственно определяться из решения разностных уравнений. Таким образом, в потоковом варианте прогонки функции Φ и ψ

считаются точнее, чем в случае прогонки по H, что весьма существенно.

В работе [24] приводится метод потоковой прогонки, применимый для любого диапазона изменений значений электропроводности $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$.

Система параболических уравнений (при $\sigma \neq 0$) диффузии магнитного поля (2.7), (2.8) и аппроксимирующая ее система разностных уравнений (3.7), (3.8) рассматривались в недивергентном виде. Недивергентность соответствующих разностных схем сказывается на точности выполнения законов сохранения и, кроме того, может сказаться также на точности воспроизведения в численном решении разрывов (ударных волн). Поэтому более правильным является аппроксимация разностными схемами дивергентной формы уравнений.

Ниже кратко излагается метод решения дивергентной формы уравнений диффузии магнитного поля для случая $H_{z_0}=0$. При этом рассматриваются рекуррентные формулы потоковой прогонки несколько отличные от формул, приведенных в работах [23] и [24].

I. При $H_{z_0}=0$ систему уравнений (2.7), (2.8) можно записать в виде следующих дивергентных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(H_\varphi / r^{\nu-1}\rho\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(H_z/\rho\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(r^{\nu-1}\psi\right) \tag{8.1}$$

где

$$\Phi = \frac{\rho c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{\nu-1}H_\varphi\right), \qquad \psi = \frac{\rho c^2 r^{\nu-1}}{4\pi\sigma}\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{8.2}$$

Удобно использовать единую для различных компонент поля H_φ и H_z запись системы уравнений (8.I) и (8.2).

Пусть при $H = r^{\nu-1} H_1$

$$A = r^{2(\nu-1)}, \qquad B = 1, \qquad \tilde{W} = -\Phi \tag{8.3}$$

и при $H = H_2$

$$A = 1, \qquad B = r^{2(\nu-1)}, \qquad \tilde{W} = -r^{\nu-1}\Psi \tag{8.4}$$

Тогда систему уравнений (8.I), (8.2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(H/\rho A\right) = -\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} \tag{8.5}$$

$$\tilde{W} = -\frac{B\rho}{4\pi\tilde{\sigma}}\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{8.6}$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma/c^2$, c -скорость света.

2. Для построения системы разностных уравнений аппроксимирующей систему (8.5)-(8.6) используем энергетический метод

Пусть дана сетка $\omega_{m\tau}\{(x_i t^j)\}$ с шагами $m_i = x_{i+1} - x_i$ $\tau^{j-1} = t^j - t^{j-1}$. Для каждой элементарной ячейки (прямоугольника) этой сетки запишем уравнение баланса:

$$\int_{t^{j-1}}^{t^j}(\tilde{W}_i - \tilde{W}_{i-1})dt - \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\left(\frac{H}{A\rho}\right)^j - \left(\frac{H}{A\rho}\right)^{j-1}\right]dx = 0 \tag{8.7}$$

Интегралы, входящие в (8.7) аппроксимируем следующим образом:

$$\int_{t^{j-1}}^{t^j}(\tilde{W}_i - \tilde{W}_{i+1})dt \simeq \left[\gamma_3(\tilde{W}_i - \tilde{W}_{i+1})^j + (1-\gamma_3)(\tilde{W}_i - \tilde{W}_{i+1})^{j-1}\right]\tau^{j-1}, \tag{8.8}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{H}{A\rho}dx = \int_{r_i}^{r_{i+1}}\frac{H}{A}r^{\nu-1}dr \simeq \frac{H_{i+1/2}}{A_{i+1/2}}\frac{r_{i+1}^{\nu} - r_i^{\nu}}{\nu} \tag{8.9}$$

где γ_3 – весовой множитель.

Для приближенного вычисления интеграла $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{H}{A\rho} dx$ здесь используется простейшее предположение о профиле подинтегральной функции: $H/A = const$ на интервале $x_i < x < x_{i+1}$. Заметим, что такая простейшая локальная интерполяция правильно учитывает особенность поведения функции H_φ в окрестности оси симметрии $r = 0$: так как в окрестности $r=0$ имеем $H_\varphi \sim r^{\nu-1}$, а при $H = r^{\nu-1} H_\varphi$ имеем $A = r^{2(\nu-1)}$ (см.формулы (9.3), то вблизи $r=0$ действительно $H/A = const$.

Разностное уравнение для потока $\widetilde{W}$ (см.уравнение (8.6)) запишем аналогично § 3, п.2, учитывая возможный разрыв коэффициентов электропроводности на контактном разрыве и условия непрерывности потоков и изомагнетизма (2.15).

Таким образом, систему разностных уравнений аппроксимирующую систему дифференциальных уравнений (8.5),(8.6) можно записать в следующем виде:

$$\widetilde{W}_i^j - \widetilde{W}_{i+1}^j - \tilde{c}_i^j H_{i+1/2}^j + F_i^{j-1} = 0, \qquad (8.10)$$

$$4\pi z_i \widetilde{W}_i = H_{i-1/2} - H_{i+1/2}, \qquad (8.11)$$

где

$$\tilde{c}_i = \frac{r_{i+1}^\nu - r_i^\nu}{\nu A_{i+1/2} \tau^{j-1} \gamma_3}, \qquad z_i = \frac{0.5}{B_i}\left(\frac{\widetilde{\sigma}_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2}} m_{i-1} + \frac{\widetilde{\sigma}_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} m_i\right)$$

$$F_i^j = \tilde{c}_i^j H_{i+1/2}^j + \frac{1-\gamma_3}{\gamma_3}\left(\widetilde{W}_i - \widetilde{W}_{i+1}\right)^j, \qquad \gamma_3 \neq 0 \qquad (8.12)$$

3. Из (8.12) следует, что $\widetilde{C}_i \neq 0$. При $\widetilde{C}_i \neq 0$ можно предложить простой вариант метода потоковой прогонки, рекуррентные формулы которой полностью аналогичны формулам вида (5.6).

Разрешая (8.10) относительно функции $H_{i+1/2}$

$$H_{i+1/2} = \frac{1}{\widetilde{C}_i^j}\left(\widetilde{W}_i^j - \widetilde{W}_{i+1}^j + F_i^{j-1}\right) \tag{8.13}$$

и подставляя (8.13) в (8.11) получим линейное разностное уравнение второго порядка относительно функций $\widetilde{W}_i$ вида, аналогичного (5.2):

$$a_i \widetilde{W}_{i-1} - b_i \widetilde{W}_i + c_i \widetilde{W}_{i+1} + g_i = 0 \tag{8.14}$$

где

$$a_i = \widetilde{e}_{i-1}, \quad c_i = \widetilde{e}_i, \quad b_i = a_i + c_i + 4\pi z_i,$$
$$\widetilde{e}_i = 1/\widetilde{C}_i = \gamma_3 \frac{\nu A_{i+1/2} \tau^{j-1}}{\tau_{i+1}^{\nu} - \tau_i^{\nu}}, \qquad g_i = \widetilde{e}_{i-1} F_{i-1}^{j-1} - \widetilde{e}_i F_i^{j-1} \tag{8.15}$$

Решение уравнения (8.14) находится по рекуррентным формулам прогонки:

$$\theta_{i+1} = c_i/(b_i - a_i\theta_i), \qquad \zeta_{i+1} = (a_i\zeta_i + g_i)/(b_i - a_i\theta_i),$$
$$\widetilde{W}_i = \zeta_{i+1} + \theta_{i+1}\widetilde{W}_{i+1}, \qquad i = 0, 1, \ldots N-1 \tag{8.16}$$

Коэффициенты (9.15) как легко видеть удовлетворяют условию разрешимости уравнения (8.14) и устойчивости прогонки, приведенному в п.2, § 5 (см.5.10).

Заметим, что расчет по формулам (8.I5) возможен для любого диапазона изменения электропроводности $0 \leq \sigma \leq \infty$ В частности, при $z_i = \infty$ (вмороженный случай) из (8.I5) автоматически получим

$$\theta_i \equiv 0 \quad , \qquad \zeta_i \equiv 0 \quad , \qquad \widetilde{W}_i \equiv 0 \tag{8.17}$$

Из (8.I7), учитывая выражения F_i и $\widetilde{C}_i$ в (8.I2), а также формулу (3.5) имеем

$$\left(H/A\rho\right)^{j}_{i+1/2} = \left(H/A\rho\right)^{j-1}_{i+1/2} = const \tag{8.18}$$

т.е. точное решение системы (8.I0)-(8.II) для случая вмороженного магнитного поля.

Начальные значения $\theta_0, \zeta_0, \widetilde{W}_N$ в формулах (8.I5) определяются граничными значениями, заданными для компонент поля H_φ и H_z или потоков Φ и Ψ соответственно в точках $x=0$ и $x=x_N=\ell$ аналогично случаю описанному в п.2, § 5.

§ 9. Эффект T -слоя

Как уже упоминалось во введении, путем численного решения ряда магнитно-гидродинамических задач методом, описанным в предыдущих параграфах настоящей работы, был обнаружен нелинейный эффект образования высокотемпературного слоя (T- слоя) газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. В работе [5] сформулированы следующие основные особенности - слоя и условия его образования:

1^0. Расширение сжимаемой электропроводной среды в магнитном поле приводит к появлению максимумов температуры T и электропроводности σ, обусловленных неравномерным распределением джоулевой диссипации и степенью расширения газа.

2^0. Решающее влияние на характер процесса взаимодействия оказывает величина Re_m и R_M.

3^0. В отличие от обычного скин-эффекта характерным является саморазвитие и самоподдержание высокотемпературной электропроводной зоны в г зе при $\sigma = \sigma(T, \rho)$, $\frac{\partial \sigma}{\partial T} > 0$

4^0. Разогрев в общем случае начинается не сразу, а по истечении некоторого критического момента времени $t_{кр.}$. При этом, T - слой возникает при больших числах Рейнольдса и параметрах гидромагнитного взаимодействия: $Re_m \sim 1$, $R_M \simeq 1$.

Эффект T -слоя означает, что в плазме при определенных условиях развивается и самоподдерживается устойчивое макрообразование. Его существование порождает существенно новые особенности в поведении плазмы:

Во-первых, во много раз усиливается взаимодействие плазмы с магнитным полем. Так, низкотемпературная плазма, несмотря на малую проводимость, может с помощью Т-слоя эффективно взаимодействовать с магнитным полем.

Во-вторых, благодаря наличию Т-слоя в ряде случаев магнитное поле может играть роль катализатора, позволяющего сравнительно холодной плазме интенсивно преобразовывать свою энергию в излучение.

Следует особо подчеркнуть, что явление Т-слоя было предсказано на основании анализа математических моделей, т.е. с помощью численных методов решения машинно-гидродинамических задач, что стимулировало постановку физических экспериментов. При этом, анализ численных расчетов позволяет указать диапазон изменения физических параметров, при которых физический эксперимент может привести к положительным результатам.

Ниже рассматривается ряд численных примеров, частично приведенных в работе [5]. Примеры иллюстрируют явление Т-слоя и, в частности, влияние на структуру и свойства Т-слоя нелинейной теплопроводности, т.е. в какой-то мере излучения.

I. Рассмотрим следующую модельную задачу. В начальный момент времени имеется бесконечный цилиндр высоко-нагретого вещества (плотной плазмы) радиуса $r = r_N$ =I,6 ом. При $t = 0$ давление плазмы $p(x,0) = p_0 = 50$ атм и температура $T(x,0) = 10000°K$ постоянны. В плазме и вне плазменного цилиндра задано постоянное осевое магнитное поле $H(x,0) = H_z(x,0) = 16\,000$ э.

Процесс течения плазмы в магнитное поле описывается системой уравнений магнитной гидродинамики (2.I)-(2.I2), рассматриваемой при $H_{r_0} = 0$, $H_\varphi \equiv 0$.

Расчеты проводились по описанным в настоящей работе методом по неявной разностной схеме ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 1/2$ в формулах (3.I)-(3.II)). При этом, рассматривались варианты как без теплопроводности, так и с учетом нелинейной теплопроводности.

Вся масса газа разбивалась на 20 равномерных интервалов m_i. Коэффициенты электропроводности σ и теплопроводности $\varkappa$ имеют вид

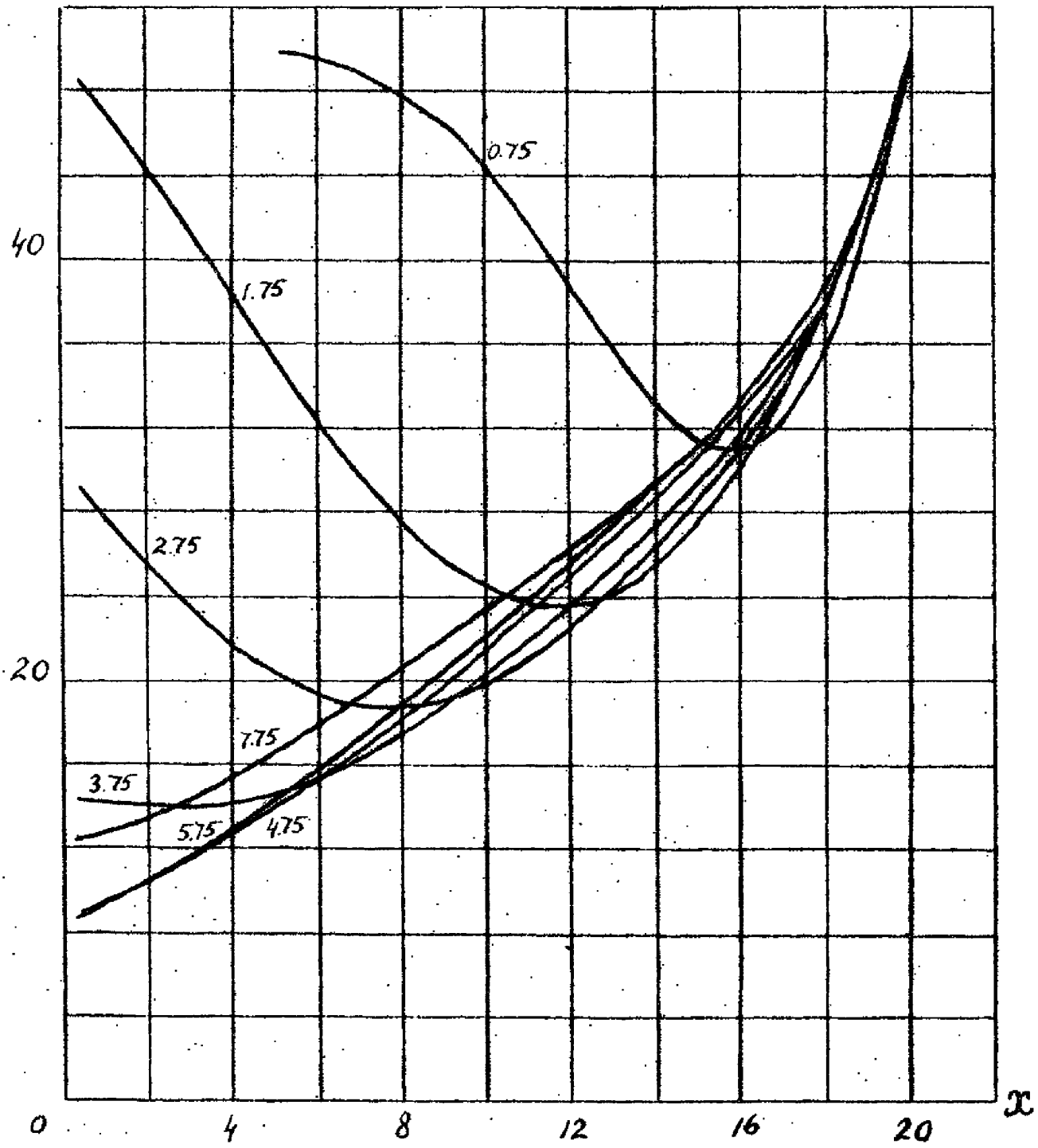
$$1/\sigma = a T^{-3/2} + 10^5 \rho T^{-6} \qquad (9.1)$$

$$\varkappa = \varkappa_0 T^3 \qquad (9.2)$$

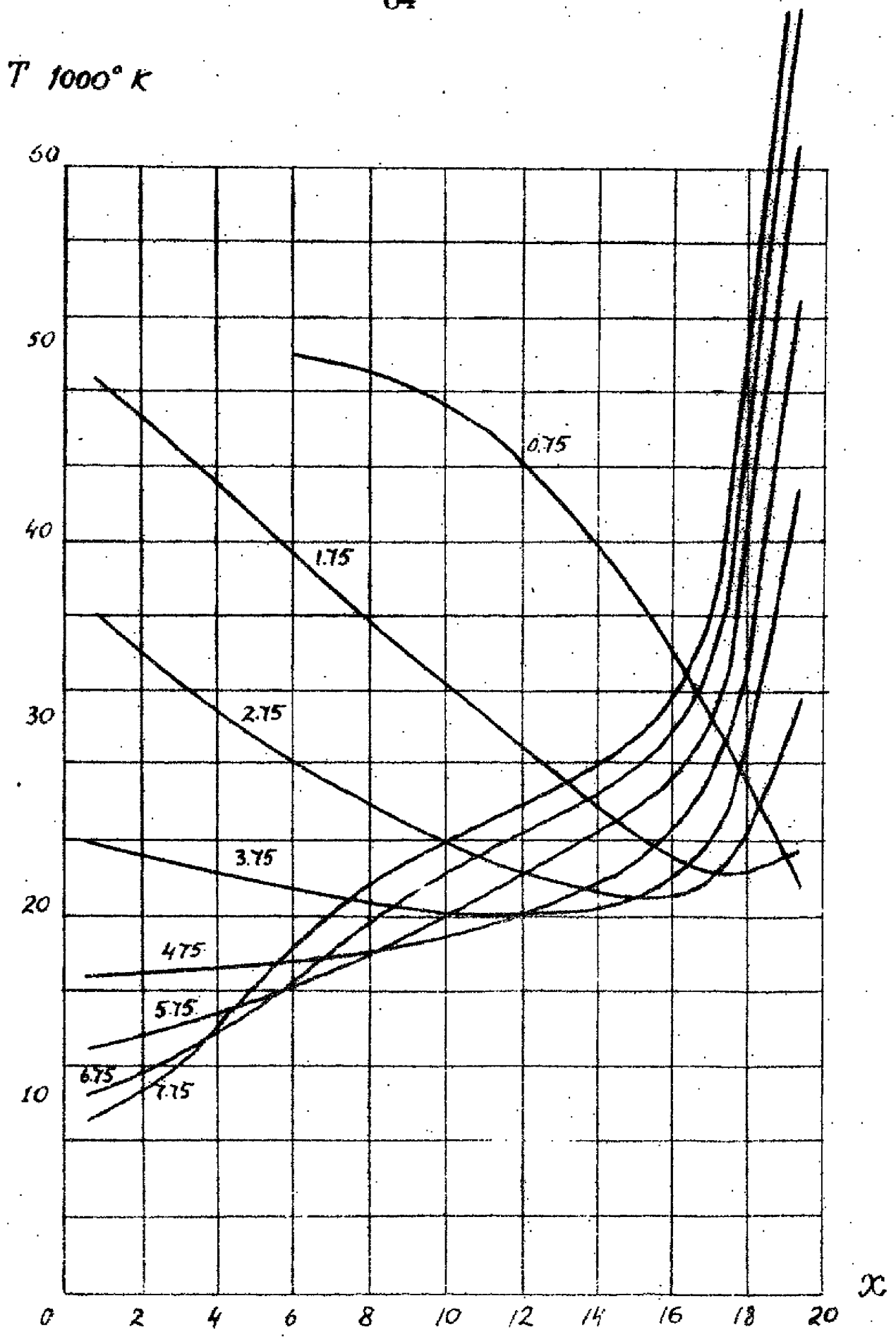
где a и $\varkappa_0$ постоянные, такие, что при $t = 0$ электропроводность $\sigma = 22 \frac{1}{\text{ом.см}}$

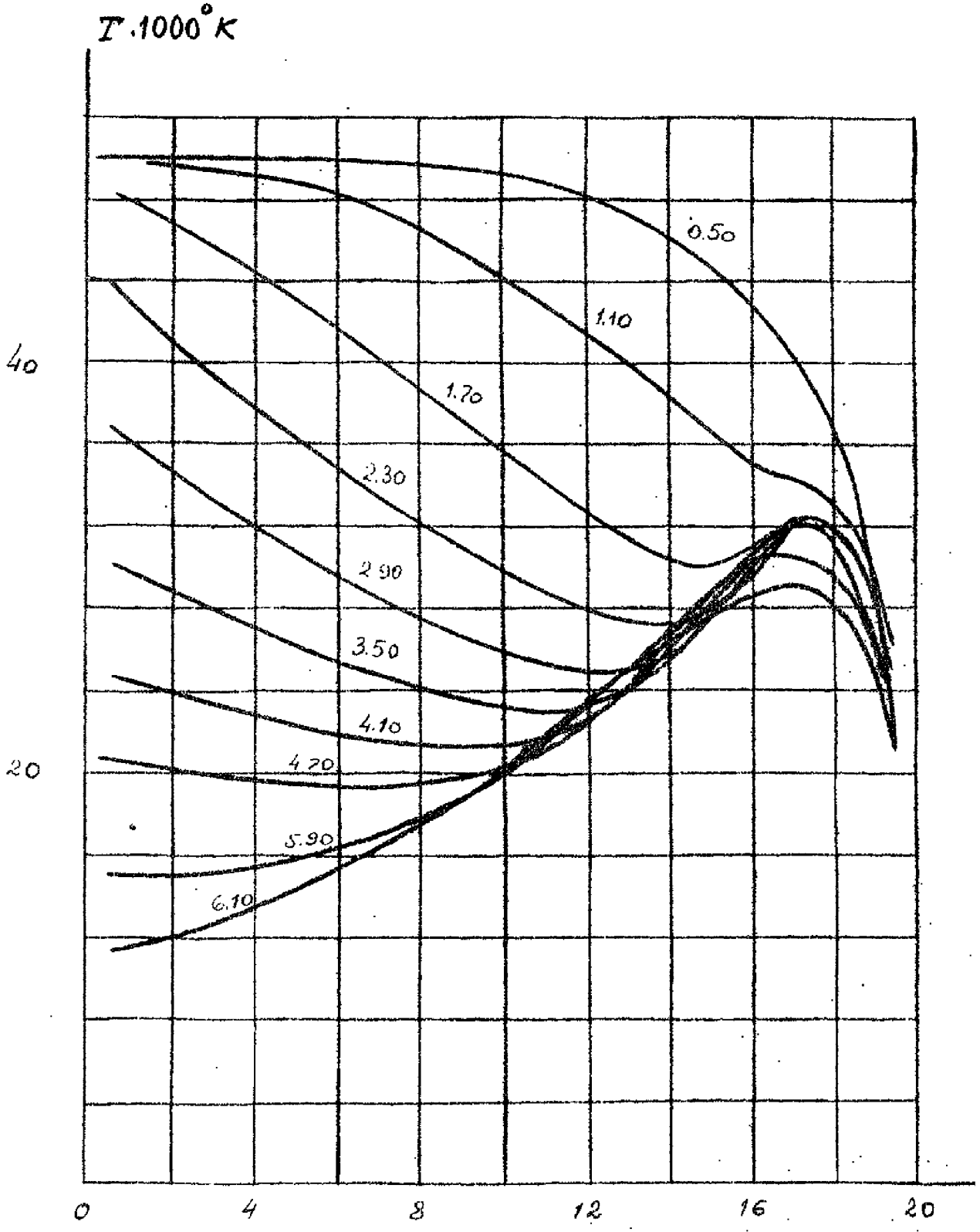
В отличие от [5], где коэффициент электропроводности рассматривался в виде $\sigma \sim T^{3/2}$ при любых значениях T, в формуле (9.I) учитывается отклонение от закона "трех вторых" (характерного для плотной полностью ионизованной плазмы

Н.316 э



Фиг. 10


T 1000° K
60
50
40
30
20
10
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
x
0.75
1.75
2.75
3.75
4.75
5.75
6.75
7.75



Фиг. 12

(см. [22]) при низких температурах, когда становится существенным влияние нейтральных частиц.

На фиг.10-11 изображено распределение напряженности магнитного поля и температуры по газу (в лагранжевых координатах) в различные моменты времени t для случая $\varkappa_0 = 0$. За единицу измерения на графиках выбрано значение $t = 10^{-4}$ сек.

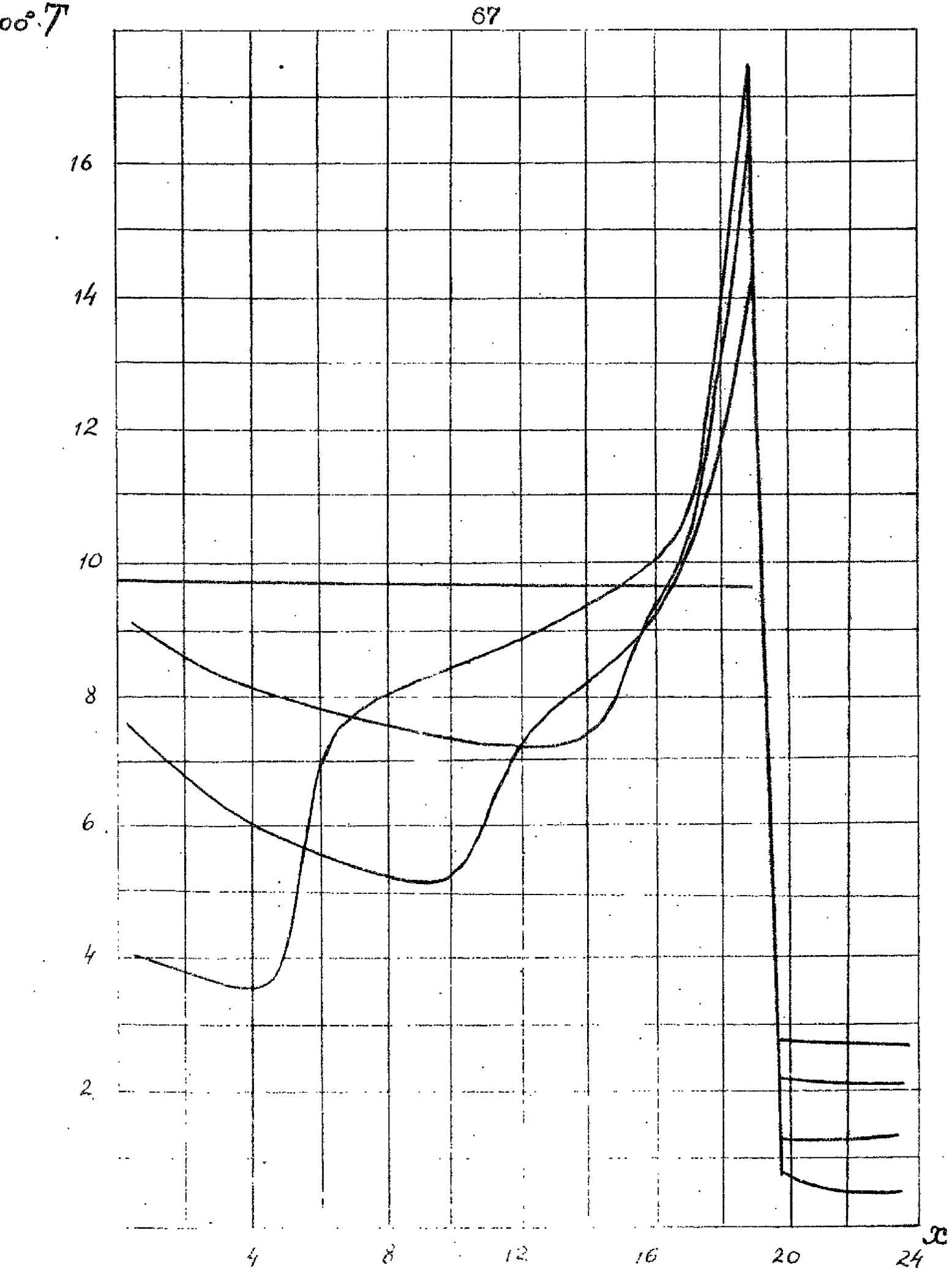
Сравнение с результатами, приведенными в [5], показывает, что на факт существования Т-слоя не влияют различные виды коэффициента электропроводности σ при низких температурах

На фиг.12 приводятся графики температуры для различных моментов t при учете в среде теплопроводности вида (8.2).

Сравнение графиков, приведенных га фиг. 11 и фиг.12 показывает, что теплопередача, которая рассматривается существенно нелинейной, снижает температуру в Т-слое, однако, не уничтожает Т-слой как явление и не меняет характера протекания процесса.

2. В предыдущем примере рассматривалась плазма, непосредственно граничащая с заданным внешним магнитным полем. Рассмотрим теперь двухобластную задачу.

Предположим что область 1 представляет собой плотную плазму с высокой температурой ($T = 10000^0$К), а область 2 - "балластный" газ, температура которого значительно меньше температуры плазмы ($T = 3000^0$К). В начальный момент задан определенный профиль скорости, т.е. и плазма и балластный газ предполагаются разогнанными на предшествующей стадии процесса. Правая граница области 2 предполагается движущей-



Фиг. 13

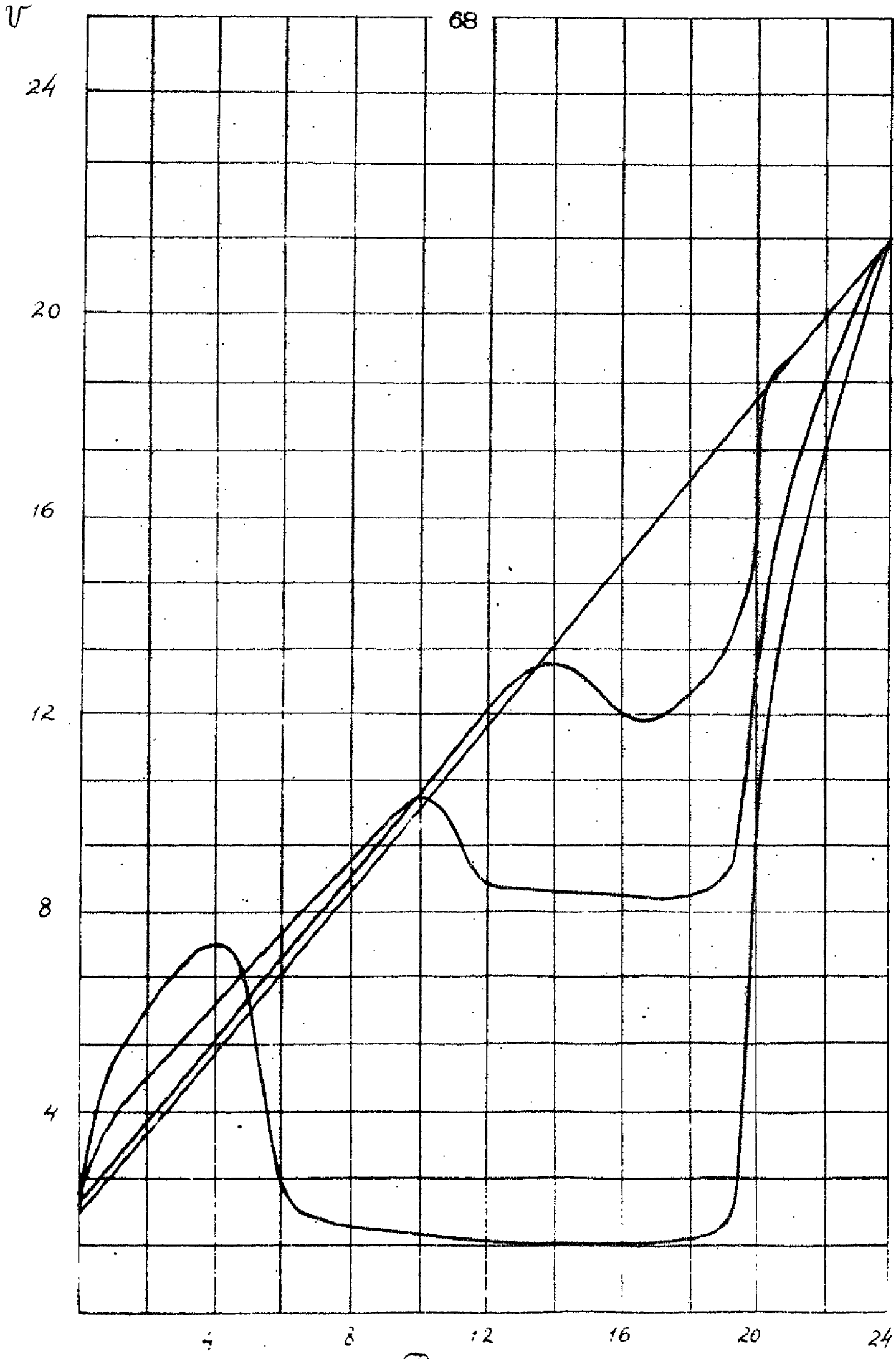


Рис 14

ся с постоянной скоростью $V_0 = 2$ км/сек. Магнитное поле, заданное во внешней области ($H_0 = 16000$ э) легко проникает через относительно холодный газ и сильно взаимодействует с плазмой.

Подбором констант в уравнениях состояния для областей I и 2

$$P_1 = 3{,}6\rho T \quad , \qquad P_2 = 36\rho T$$

достигается равенство давлений в этих областях в начальный момент времени ($P(0,x) = 10$ атм).

На фиг.I3 и I4 изображены соответственно профили функции температуры и скорости по массовой координате x для различных моментов времени („0" — $t=0$, „1" — $t = 0{,}0195 \cdot 10^{-2}$ сек, „2" — $t = 0{,}0570 \cdot 10^{-2}$ сек , „3" — $t = 0{,}157 \cdot 10^{-2}$ сек.)

Анализ результатов показывает, что в этой задаче Т-слой образуется на границе I и 2 области и приводит к резкому торможению движения области I.

Магнитное поле H слабо проникает в плазму, а в холодной области 2 все время процесса практически равно постоянному значению, заданному на границе τ_2 .

Цитируемая литература

1 В.Ф.Дьяченко, В.С.Имшенник. Сходящаяся цилиндрическая ударная волна в плазме с учетом структуры фронта. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1963, № 5, 915-925.

2 В.Ф.Дьяченко, В.С.Имшенник. О сходящейся цилиндрически симметричной ударной волне при наличии диссипативных эффектов. Прикл.матем.и мех., 1965, 29, № 6, 993

3 В.Ф.Дьяченко, В.С.Имшенник. К магнитно-гидродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме. ИАЭ, препринт, 1965.

4 К.В.Брушлинский, Н.М.Зуева, А.И.Морозов. Установление квазиодномерного течения плазмы в профилированном канале. Изв. АН СССР, механика, 1965, № 5, 3-6.

5 А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Л.А.Заклязьминский, П.П.Волосевич, Л.Д.Дегтярев, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, В.С. Соколов, А.П.Фаворский. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1967, 173, № 4, 80-83.

6 J. Neumann, R. Richtmyer. „A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks." J. Appl. Phys., 1950, 21, № 1, 232-237

7 Р.Д.Рахтмайер. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во ин.лит. 1960.

8 А.А.Самарский, В.Я.Арсенин. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости. Ж.вычисл. матем. и матем.физ., 1961, 1, № 2, 357-360.

9 А.А.Самарский. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения. Тр.Всес.совещания по дифф.уравнениям (Ереван, ноябрь, 1958). Ереван. изд-во АН Арм.ССР, 1960, 148-160.

10 А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Однородные разностные схемы. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1961, 1, № 1, 4-63.

11 А.А.Самарский. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1962, 2, № 1, 25-56.

12 А.А.Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для параболических уравнений. Ж.вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 2, 266-298.

13 П.П.Волосевич, С.П.Курдюмов, Л.Н.Бусурина, В.П.Крус. Решение однородной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроврдном газе. Ж.вычисл.матем. и матем. физ., 1963, 3, № 4, 702-719.

14 А.А.Самарский, С.П.Курдюмов, П.П.Волосевич. Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью. Ж. вычисл. матем. и матем.физ., 1965, 5, № 2, 199-217.

15 Н.Н.Яненко, В.Е.Неуважаев. Один метод расчета газодинамических движений с нелинейной теплопроводностью. Труды матем.инст.им.В.А.Стеклова. Разностные методы решения задач мат.физики ч.1 138-140.

16 П.П.Волосевич, Е.И.Леванов. Автомодельная задача о движении плоского поршня в теплопроводном газе при наличии вмороженного магнитного поля. В сборнике "Численные

методы решения задач математической физики". М.Изд-во "Наука", 1966, 87-102.

17 П.П.Волосевич. Движение газа перед поршнем в магнитном поле в случае нелинейной теплопроводности и проводимости. В сб."Численные методы решения задач математической физики", М., Изд-во "Наука", 1966, 103-112.

18 Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.

19. А.А.Самарский, И.М.Соболь. Примеры числеаного расчета температурных волн. Ж.вычисл.матем.и матем.физ., 1963, 3, № 4, 702-719.

20 Г.И.Марчук. Численные методы расчета ядерных реакторов, М.Атомиздат, 1958.

21 И.М.Гельфанд, О.В.Локуциевский. Метод "прогонки" для решения разностных уравнений. В кн. С.К.Годунова и В.С. Рябенького "Введение в теорию рнзностных схем",Физматгиз, 1962 .

22 Л.Спитцер. Физика полностью ионизованного газа. Изд-во "Мир", 1965.

23. Л.Д.Дегтярев, А.П.Фаворский. Потоковый вариант метода прогонки. Ж.вычисл.матем.и матем.физ. 1967, 7, № 6.

24. Л.Д.Дегтярев, А,П.Фаворский. Потоковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами. Ж.вычисл.матем.и матем.физ. (в печати).

25. У.Маршалл. Мтруктура магнитно-гидродинамической ударной волны. Проблемы совр.физики, 1957, 7.

26. В.Ф.Куропатенко. Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики. Изв. высш.учебн.завед.,математика, 1962, 3 (28).