ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 7 Январь 1967 Февраль № 1

УДК 518:517.944/.947

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

В данной статье изучается вопрос о возможности преобразования или регуляризации схем с целью получения устойчивых схем, удовлетворяющих дополнительным требованиям точности и экономичности.

Разностные схемы трактуются как операторные уравнения в вещественном линейном нормированном пространстве (см. [1], [2]). Рассматриваются двухслойные и трехслойные схемы в вещественном гильбертовом пространстве (точнее, в унитарном пространстве, так как требование полноты не используется). Выделяются классы устойчивых схем. Запись схем в канонической форме позволяет указать операторы, ответственные за устойчивость. Достаточные условия устойчивости накладывают слабые ограничения на произвол в выборе этих операторов, которые мы называем регуляризаторами. Меняя регуляризаторы и оставаясь при этом в классе устойчивых схем, можно получить экономичные схемы определенного порядка точности.

Общим для всех методов регуляризации, рассмотренных в статье, является использование в качестве регуляризаторов энергетически эквивалентных (эн. эк.) операторов (аналогичные операторы применяются в линейной алгебре, [3], ср. также [4], [16]).

Следует отметить, что различные схемы, известные в литературе, можно трактовать как схемы, полученные из естественных явных схем при помощи той или иной процедуры регуляризации.

Достаточно указать на широко используемые неявные схемы. При этом на верхнем слое (в качестве регуляризатора), как правило, берется тот же оператор, что и на нижнем слое (или его главная часть).

Примерами другого типа регуляризации являются явная трехслойная схема «ромб» [5] (схема Дюфорта — Франкела) и асимметричная двухслойная схема В. К. Саульева [6] для уравнения теплопроводности. Для обеих схем характерны следующие свойства: 1) схемы безусловно устойчивы, 2) счет идет по явным формулам, 3) порядок аппроксимации понижается по сравнению с обычными явными схемами. Схема «ромб» получается из абсолютно неустойчивой схемы «крест» (схемы Ричардсона) путем замены значения y_i^j полусуммой $0.5(y_i^{j+1}+y_i^{j-1})$. В книге Вазова и Форсайта [5] выражается удивление по поводу того, что столь неболь-

шое изменение превращает абсолютно неустойчивую схему в безусловно устойчивую схему. В п. 3, § 3 данной статьи будет показано, что преобразование схемы «крест» в схему «ромб» соответствует введению регуляризатора простейшего вида. В п. 4 выясняется характер регуляризатора для асимметричной схемы. Отметим, что многомерные аналоги этих схем могут быть использованы в качестве итерационных схем для решения эллиптических уравнений с переменными коэффициентами в областях произвольной формы (см., например, [7]).

Отправным пунктом для теории регуляризации разностных схем являются достаточные условия устойчивости и априорные оценки для двухслойных и трехслойных схем в вещественном гильбертовом пространстве (теоремы 1—4). Доказательства теорем 1—4 даны в следующей статье.

В § 3 сформулирован общий принцип регуляризации двухслойных и трехслойных схем, основанный на использовании сходных операторов. Некоторые примеры выбора эн. эк. операторов для эллиптических операторов 2-го порядка даны в § 4. Регуляризатор R в каждом конкретном случае должен выбираться таким образом, чтобы упростить задачу обращения оператора на верхнем слое и сохранить требуемый порядок аппроксимации.

В пп. 4 и 5 рассматриваются факторизованные схемы (ФС), т. е. схемы, у которых оператор на верхнем слое представим в виде произведения конечного числа операторов (факторизован).

Известно, что в последние годы появилось много интересных работ, посвященных экономичным разностным методам решения многомерных задач математической физики. Достаточно указать работы Писмена, Рекфорда, Дугласа, Бейкера, Олифанта, В. К. Саульева, Н. Н. Яненко, Е. Г. Дьяконова, С. К. Годунова, В. Б. Андреева и др. (необходимые ссылки см. [2], [5]—[11]). Несмотря на различие в исходных посылках, в форме записи и, наконец, в терминологии (метод переменных направлений, метод расщепления, схема с расщепляющимся оператором), многие из разностных схем, предложенных указанными авторами, обладают следующей общей особенностью: после приведения этих схем к каноническому виду получаются факторизованные схемы, которые (по определению) и аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение. Область изменения пространственных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$ есть p-мерный параллелепипед.

Для уравнений и систем уравнений математической физики большое число экономичных ФС было исследовано Е. Г. Дьяконовым (см., например, [9], [14], где имеется список литературы). Он рассматривал в качестве исходных схем, аппроксимирующих дифференциальные уравнения, двухслойные и трехслойные ФС специального вида, названные им схемами с расщепляющимся оператором. Устойчивость и сходимость этих схем была доказана при некоторых дополнительных ограничениях (достаточно мелкая сетка, гладкие коэффициенты, дополнительные, помимо естественных условий эллиптичности, ограниченная на матрицу коэффициентов пространственного оператора в случае наличия смешанных произ-

водных и др.). Необходимость снятия этих ограничений и, в частности, выяснения вопроса о применимости ФС (схем расщепления) для уравнений с разрывными коэффициентами отмечалась в [2]. Двухслойные и трехслойные ФС для параболических уравнений со смешанными производными, устойчивые при естественном условии параболичности, предложены В. Б. Андреевым.

В пп. 4 и 5, являющихся развитием работ [2], [10], дан общий метод построения ФС путем регуляризации некоторой исходной схемы, регуляризатор которой есть сумма конечного числа операторов $R = \sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha$. Даны достаточные условия устойчивости ФС в виде требований на операторы R_α, которые выделяют класс устойчивых ФС. Этот класс содержит семейства ранее известных ФС (в том числе схем с расщепляющимся оператором).

Доказано, что ФС устойчива на произвольной последовательности сеток, если исходная схема обладает этим свойством и, кроме того, $\{R_\alpha\}$ есть система перестановочных между собой самосопряженных и положительных операторов. Тем самым выделен весьма широкий класс безусловно устойчивых ФС.

Используя эн. эк. операторы, приведенные в § 4, получаем семейства безусловно устойчивых экономичных ФС для уравнений и систем уравнений параболического и гиперболического типов с переменными и даже разрывными коэффициентами. Так, например, в случае системы параболических уравнений со смешанными производными выбирается в качестве регуляризатора разностный эллиптический оператор с диагональной матрицей и постоянными коэффициентами. При этом решение разностной задачи сводится к последовательному применению формул одномерной прогонки (ср. [9]). Полученные ФС устойчивы при любых τ и h и естественном условии параболичности и сходятся в классе разрывных коэффициентов (если коэффициенты имеют разрывы I рода на гиперплоскостях, параллельных координатным гиперплоскостям). Выбирая специальные последовательности сеток $\omega_h(k)$ (см. [12]), можно получить схемы, имеющие точность $O(h^2+\tau)$ и $O(h^2+\tau^2)$ (трехслойные схемы) в классе разрывных коэффициентов. Мы ограничились изучением только уравнений второго порядка по $x_1, \ldots, x_p$. Теория ФС (см. § 3) применима и для уравнений более высокого порядка (в случае, например, периодических краевых условий это очевидно).

Каждому разностному оператору A можно поставить в соответствие по крайней мере один эн. эк. оператор более простой структуры, который можно использовать в качестве регуляризатора для двух- и трехслойных схем. Составление каталога регуляризаторов и выбор наилучших регуляризаторов является важной для вычислительной практики задачей. Для различных эллиптических операторов можно использовать один и тот же регуляризатор. Это делает возможным создание стандартных программ для решения классов задач. При этом программа для определения решения на новом слое не меняется, а конкретный вид оператора задачи учитывается при вычислении правой части.

Методы регуляризации могут быть применены для построения экономичных универсальных алгоритмов для стационарных задач, точнее для уравнений I рода

$$Au = f,$$

где A — линейный самосопряженный и положительно определенный оператор над H. Нами рассмотрены классы двухслойных и трехслойных итерационных схем с одним и несколькими релаксационными параметрами. При помощи общих теорем об устойчивости (см. § 2) удается найти оптимальные релаксационные параметры и оценки скорости сходимости. Эти результаты будут изложены отдельно.

§ 1. Схемы в абстрактных пространствах

1. Схемы как операторные уравнения

Мы будем рассматривать разностные схемы как операторные уравнения в абстрактных пространствах. Пусть $\{H_N,\ N = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность линейных нормированных пространств, являющаяся аналогом пространств сеточных функций, определенных на последовательности сеток в евклидовом пространстве (конечномерном или бесконечномерном). Пусть дан отрезок $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Введем на нем сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0,\ \tau = t_0 / j_0\}$ с шагом τ. Пусть $y_N(t)$ — абстрактная функция аргумента t со значениями в H_N, так что $y_N(t)$ при фиксированном $t = j\tau \in \bar{\omega}_\tau$ есть точка (вектор, элемент) пространства H_N. В дальнейшем мы всюду имеем дело с линейными операторами $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$, $S(t)$ и т. д. (вообще говоря, неограниченными), зависящими от параметра $t \in \bar{\omega}_\tau$ и при каждом $t \in \bar{\omega}_\tau$ отображающими H_N на H_N. Все операторы зависят, вообще говоря, от N и τ, так что $A = A(N, \tau; t)$; однако для упрощения записи, если это не вызовет недоразумений, зависимость от N, τ не указывается.

Пусть $B, S_1, S_2, \ldots, S_{r-1}$ — линейные операторы, заданные на H_N. По аналогии с [13] будем называть r-слойной (r-точечной) **линейной схемой** операторное уравнение $By^{j+1} = S_1 y^j + S_2 y^{j-1} + \ldots + S_{r-1} y^{j-r+2} + F^{j+1}$, $j \geqslant r - 1$, $y^{j'} = y(t_{j'}) \in H_N$, связывающее значения $y(t) \in H_N$ на r слоях $t = t_{j-r+1}, \ldots, t = t_{j+1}$. Начальные значения заданы при $j = 0, 1, \ldots, r - 2$.

Мы будем рассматривать здесь только двухслойные и трехслойные схемы.

2. Каноническая форма двухслойных схем

Рассмотрим сначала обычную двухслойную схему

$$By^{j+1} = Cy^j + \tau\varphi^{j+1}, \qquad j = 0, 1, \ldots, \qquad \varphi = \varphi(t) \in H_N \text{ для } t \in \omega_\tau. \quad (1.1)$$

При $j = 0$ задается начальное условие

$$y^0 = y(0) = y_0 \in H_N.$$

Введем обозначения

$$y^{j+1} = \hat{y}, \qquad y^j = y(t) = y, \qquad y_t = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \frac{\hat{y} - y}{\tau}$$

и перепишем (1.1) в виде

$$B\hat{y} = Cy + \tau\varphi, \qquad 0 \leqslant t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0.$$

Подставим сюда $\hat{y} = y + \tau y_t$, и положим $B = C + \tau A$. Тогда получим двухслойную схему в канонической форме

$$By_t + Ay = \varphi, \qquad 0 \leqslant t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0. \tag{1.2}$$

Представляя оператор B в виде суммы

$$B = E + \tau R,$$

получаем вторую каноническую форму двухслойной схемы

$$y_t + \tau R y_t + Ay = \varphi, \qquad 0 \leqslant t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0. \tag{1.3}$$

3. Канонические формы трехслойных схем

Трехслойные схемы связывают значения искомой функции $y(t) \in H$ $(t \in \bar{\omega}_\tau)$ на трех слоях $t = t_{j+1}$, $t = t_j$, $t = t_{j-1}$. Рассмотрим произвольную линейную трехслойную схему

$$B_1 y^{j+1} + B_2 y^j + B_3 y^{j-1} = \tau\varphi^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

где $B_s = B_s(N, \tau; t)$ $(s = 1, 2, 3,\ t = t_j)$ — линейные операторы, заданные на H_N.

В дальнейшем будем пользоваться безындексными обозначениями:

$$\hat{y} = y^{j+1}, \qquad y = y(t) = y^j, \qquad \check{y} = y(t - \tau) = y^{j-1}, \qquad y_t = \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y),$$

$$y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}),$$

$$y_t = \hat{y}_{\bar{t}}, \qquad y_{\bar{t}} = \check{y}_t, \qquad y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{1}{2}(y_t + y_{\bar{t}}) = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau},$$

$$y_{\bar{t}t} = \frac{1}{\tau}(y_t - y_{\bar{t}}) = \frac{1}{\tau^2}(\hat{y} - 2y + \check{y}).$$

Любая трехслойная схема (1.4) может быть записана в канонической форме

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi(t), \qquad \tau \leqslant t \in \omega_\tau, \tag{1.5}$$

где B, R и A — линейные операторы из H в H.

В самом деле, подставляя в (1.4)

$$\hat{y} = y + \tau y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{1}{2}\tau^2 y_{\bar{t}t}, \qquad \check{y} = y - \tau y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{1}{2}\tau^2 y_{\bar{t}t}$$

и обозначая

$$(B_1 - B_3)\tau = B, \qquad B_1 + B_2 + B_3 = A, \qquad \frac{1}{2}(B_1 + B_3) = R,$$

получим (1.5).

Схема (1.5) пишется при $t = \tau, 2\tau, \ldots$. При $t = 0$ и $t = \tau$ должны быть заданы начальные условия $y(0) = y_0$, $y(\tau) = y_1$ или $y_t(0) = \bar{y}_0$, $y_0, \bar{y}_0, y_1 \in H$.

Замечание. Если трехслойная схема соответствует дифференциальному уравнению первого порядка по t, то известно лишь начальное условие $y(0)$ для функции. Для определения $y(\tau)$ либо используется исходное уравнение при $t=0$, либо двухслойная схема (см. [10]) вида $By_t + Ay = \varphi$ при $t=0$. Так как $y = y(0)$ известно, то и в этом случае можно считать, что задано $y_t(0)$ $(y_t(0) = B^{-1}(\varphi - Ay_0))$.

Итак, мы будем рассматривать задачу

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}\bar{t}} + Ay = \varphi, \qquad \tau \leqslant t \in \bar{\omega}_\tau, \qquad y(0) = y_0, \qquad y_t(0) = \bar{y}_0$$
$$\text{или } y(\tau) = y_1, \tag{1.6}$$

где $y = y(t)$, $\hat{y} = y(t+\tau)$, $\check{y} = y(t-\tau)$.

Формально заменяя $\tau^2 R$ на $E + \tau^2 R$, получаем вторую каноническую форму трехслойной схемы

$$y_{\bar{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}\bar{t}} + By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi, \qquad 0 < t \in \omega_\tau, \qquad y(0),\ y(\tau) \text{ заданы.} \tag{1.7}$$

4. Некоторые понятия теории разностных схем

По аналогии с [1], [13] введем понятие корректности разностных схем.

Вводя на линейном множестве H различные нормы, получим различные нормированные пространства, состоящие из одних и тех же элементов. Решения задач (1.2) и (1.6) и правую часть φ будем, вообще говоря, рассматривать как элементы разных пространств, отличающихся только нормами. Пусть $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$, ... — некоторые нормы на линейном множестве H.

Задача (1.2) поставлена корректно (схема (1.2) корректна), если можно указать такие числа τ_0, N_0, что при $\tau \leqslant \tau_0$, $N \geqslant N_0$

1) для любых $y_0 \in H$ и $\varphi(t) \in H$, $t \in \omega_\tau$, решение задачи (1.2) существует,

2) решение задачи (1.2) равномерно по N, τ непрерывно зависит от y_0, φ; эта зависимость может, например, иметь вид

$$\|y(t)\|_{(1)} \leqslant M_1 \|y_0\|_{(1)} + M_2 \max_{\omega_\tau} \|\varphi(t)\|_{(2)}. \tag{1.8}$$

Здесь и всюду в дальнейшем M_1, M_2, M, c_1, c_2, ... — положительные постоянные, не зависящие от τ и N.

Если решение задачи (1.2) непрерывно (равномерно по N, τ) зависит от y_0 и φ, то говорят, что схема (1.2) устойчива по начальным данным и по правой части. Требование устойчивости по правой части может быть более сильным: решение задачи (1.2) непрерывно зависит не только от $\varphi(t)$, но и от $\varphi_t(t)$. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться следующим определением корректности схемы.

Схема (1.2) корректна, если при $\tau \leqslant \tau_0$ и $N \geqslant N_0$

1) задача (1.2) разрешима для любых $y_0 \in H$, $\varphi(t) \in H$,

2) выполняется неравенство

$$\|y(t)\|_{(1)} \leqslant M_1 \|y_0\|_{(1)} + M_2 \max_{\omega_\tau} \|\varphi(t)\|_{(2)} + M_2' \max_{\omega_\tau} \|\varphi_t(t)\|_{(2^*)}, \tag{1.9}$$

где $M_2' \geqslant 0$ не зависит от N и τ.

Здесь $\|\cdot\|_{(2)}$ и $\|\cdot\|_{(2^*)}$ — вообще говоря, разные нормы.

Аналогично вводится понятие корректности для трехслойной схемы.

Обратимся к схеме (1.2). Она разрешима, если существует обратный оператор B^{-1}. Тогда

$$\hat{y} = B^{-1}Sy + \tau B^{-1}\varphi, \qquad S = B - \tau A.$$

Отсюда следует

$$\|\hat{y}\| \leqslant \|B^{-1}S\|\|y\| + \tau\|B^{-1}\varphi\|. \tag{1.10}$$

Существование B^{-1} и условие

$$\|B^{-1}S\| \leqslant 1 + c_1\tau, \qquad c_1 = \text{const} > 0, \tag{1.11}$$

очевидно, достаточны для устойчивости схемы (1.2), если

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|, \qquad \|\varphi\|_{(2)} = \|B^{-1}\varphi\|.$$

В самом деле, из (1.10), (1.11) следует

$$\|\hat{y}\| \leqslant (1 + c_1\tau)\|y\| + \tau\|B^{-1}\varphi\|,$$

$$\|y^j\| \leqslant \exp(c_1 t_j)\left[\|y_0\| + \sum_{j'=1}^{j} \tau\|B^{-1}\varphi\|^{j'}\right]. \tag{1.12}$$

Сравнивая с (1.9), видим, что неравенство (1.9) выполнено, причем

$$M_1 = \exp(c_1 t_0), \qquad M_2 = M_1 t_0.$$

Требуя ограниченности $\|B^{-1}\|$:

$$\|B^{-1}\| \leqslant c_2, \tag{1.13}$$

получим из (1.12) неравенство

$$\|y^j\| \leqslant \exp(c_1 t_j)\left[\|y_0\| + c_2 \sum_{j'=1}^{j} \tau\|\varphi^{j'}\|\right]. \tag{1.14}$$

Определения корректности и приведенные здесь достаточные условия (1.13), (1.14) справедливы для любых нормированных пространств.

Основным является вопрос: какими свойствами должны обладать операторы A и B, чтобы схема (1.2) была корректной? Ответ на него в эффективной форме можно получить, рассматривая схемы в вещественном гильбертовом пространстве (см. § 2).

Остановимся на понятии аппроксимации для схем и абстрактном пространстве H_N с нормой $\|\cdot\|_N$.

Рассмотрим пространство H_0 с нормой $\|\cdot\|_0$. Предположим, что существует линейный оператор P_N, ставящий в соответствие любому вектору $u \in H_0$ вектор $u_N = P_N u$ пространства H_N, и выполнено условие согласования норм

$$\lim_{N\to\infty} \|P_N u\|_N = \|u\|_0. \tag{1.15}$$

Пусть дано множество $V \in H_0$ (например, множество решений исходной задачи). Рассмотрим разность

$$z = y - P_N v, \qquad z(t) \in H_N \quad \text{при } t \in \omega_\tau,$$

где $v(t) \in V$, $y(t) \in H_N$ — решение уравнения (1.2). Подставив $y = z + P_N v$ в (1.2), получим $\Pi z = Bz_t + Az = \psi$, где $\psi = \varphi - (Bv_{t,N} + Av_N)$, $v_N = P_N v$, $\psi \in H_N$. Вектор $\psi = \psi(t;\ v)$ множества H_N называется погрешностью аппроксимации для схемы (1.2) на множестве $V \subset H_0$. Каждому H_N поставим в соответствие такое число $h_N > 0$, что последовательность $\{h_N\}$ сходится к нулю при $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} h_N = 0.$$

Будем говорить, что схема (1.2) обладает аппроксимацией $O(\tau^k + h_N{}^m)$ в норме $\|\cdot\|_{(2)}$ на V, если для любого $v \in V$ и при любых $N \geqslant N_0(h_N \leqslant h_0)$ и $\tau \leqslant \tau_0$ выполнено условие $\|\psi(t;\ v)\|_{(2)} = O(\tau^k + h_N{}^m)$ или $\|\psi(t,\ v)\|_{(2)} \leqslant M(\tau^k + h_N{}^m)$.

Рассмотрим две схемы: $\Pi_1 y = \varphi$, $\Pi_2 \tilde{y} = \tilde{\varphi}$.

Пусть $\psi(v)$ и $\tilde{\psi}(v)$ — соответствующие им погрешности аппроксимации на V.

Будем говорить, что схемы Π_1 и Π_2 принадлежат классу схем $S(k, m)$ или эквивалентны в смысле аппроксимации $O(\tau^k + h_N{}^m)$ на V в норме $\|\cdot\|_{(3)}$, если

$$\|\tilde{\psi}(v) - \psi(v)\|_{(3)} \leqslant M_1\tau^k + M_2 h_N{}^m,$$

где $M_1 \geqslant 0$, $M_2 \geqslant 0$ не зависят от τ и h_N; если $M_2 = 0$, то Π_1 и Π_2 принадлежат классу $S(k, \infty)$, при $M_1 = 0$ — классу $S(\infty, m)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать различные классы $S(k, m)$ эквивалентных по порядку аппроксимации схем.

§ 2. Достаточные условия устойчивости схем

1. Линейные операторы в гильбертовом пространстве

Пусть $H = H_N$ — вещественное унитарное пространство со скалярным произведением $(,)_N$ и нормой $\|y\|_N = \sqrt{(y,\ y)_N}$ (индексы N в дальнейшем не пишем). Будем рассматривать линейные операторы $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$ и т. д., зависящие от параметра $t \in \overline{\omega}_\tau$ (и τ, N) и при каждом $t \in \overline{\omega}_\tau$ отображающие H на H.

Напомним некоторые элементарные сведения о линейных операторах [4]. Пусть v, z — любые векторы из H. Будем писать

$$A \geqslant B, \text{ если } (Av, v) \geqslant (Bv, v)\ ^{*)};$$

$$A = B, \text{ если } Av = Bv \text{ для всех } v \in H.$$

Оператор A: самосопряжен, $A^* = A$, если $(Av,\ z) = (v,\ Az)$; положителен, $A > 0$, если $(Av,\ v) > 0$, $v \neq 0$; положительно определен, $A \geqslant \delta E$, если $(Av,\ v) \geqslant \delta \| v \|^2$ (E — единичный оператор, δ — положительное число); полуограничен снизу, $A \geqslant -\delta E$, если $(Av,\ v) \geqslant \delta \| v \|^2$.

*) Если $(Av,\ v) = (Bv,\ v)$ для всех $v \in H$, то мы не пользуемся операторной записью этого условия.

Положительный оператор $A = A(t)$, зависящий от $t \in \bar{\omega}_\tau$, назовем липшиц-непрерывным по t, если

$$|(A_{\bar{t}} v, v)| \leqslant c_2 (\check{A} v, v), \tag{2.1}$$

где $c_2 = \text{const} > 0$, $A_{\bar{t}} = (A - \check{A})/\tau$, $A = A(t)$, $\check{A} = A(t - \tau)$, $t = t_j \in \omega_\tau$.

Для существования обратного оператора A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы $Av = 0$ только при $v = 0$. Поэтому A^{-1} существует, если A положителен ($A > 0$).

2. Двухслойные схемы.

Рассмотрим множество всех двухслойных схем:

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \tag{2.2}$$

где $B = B(t)$, $A = A(t)$ — произвольные линейные операторы, заданные на H.

Предположим, что для всех $t \in \bar{\omega}_\tau$

1) оператор $A = A(t)$:

$$\text{самосопряжен, } A^* = A; \tag{2.3}$$

$$\text{положителен, } A > 0; \tag{2.4}$$

$$\text{липшиц-непрерывен по } t: \quad |(A_{\bar{t}} z, z)| \leqslant c_2 (\check{A} z, z), \quad z \in H; \tag{2.5}$$

2) оператор $B = B(t)$

$$\text{положителен, } B > 0. \tag{2.6}$$

Множество двухслойных схем (2.2), операторы которых $A = A(t)$ и $B = B(t)$ удовлетворяют условиям (2.3)—(2.6), назовем исходным семейством двухслойных схем и обозначим его ИС2.

В дальнейшем всегда будем предполагать условия (2.3)—(2.6) выполненными, т. е. рассматривать только схемы, принадлежащие исходному семейству.

Воспользуемся определением корректности схемы (1.2), данным в п. 4, § 1. Решение задачи (1.2) будем оценивать в энергетической норме

$$\| y \|_{(1)} = \| y \|_a = \sqrt{(A(t) y, y)}. \tag{2.7}$$

Для правой части будем пользоваться нормами

$$\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\| \text{ и } \|\varphi\|_{(2)} = (A^{-1}, \varphi, \varphi)^{1/2} + (\check{A}^{-1} \varphi_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}). \tag{2.8}$$

Так как $B > 0$, то задача (1.2) разрешима при любых $y_0 \in H$, $\varphi(t) \in H$.

Сформулируем достаточные условия устойчивости для двухслойных схем (2.2) из ИС2. Всюду $c_1, c_2, \ldots$ обозначают положительные числа, не зависящие от N и τ.

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$B \geqslant {}^1/_2 \tau (1 - c_1 \tau) A, \tag{2.9}$$

то схема (2.2) *из ИС2 устойчива при достаточно малом* $\tau \leqslant \tau_0$, $\tau_0 < 1/2c_1$, *так что для решения задачи* (1.2) *выполняется неравенство*

$$\|y(t)\|_a \leqslant M_1 \|y_0\|_a + M_2 \max_{\omega_\tau} [(A^{-1}\varphi, \varphi)^{1/2} + (\check{A}^{-1}\varphi_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}})^{1/2}], \qquad (2.10)$$

где M_1, M_2 — *положительные постоянные, зависящие только от* c_1, c_2, t_0.

Следствие. Если

$$B \geqslant {}^1/_2\tau A, \qquad (2.11)$$

то схема (1.2) устойчива при любых $\tau > 0$ и M_1, M_2 зависит только от c_2, t_0.

Теорема 2. *Если*

$$B \geqslant \varepsilon E + {}^1/_2\tau(1 - c_1\tau)A, \qquad \varepsilon = \text{const} > 0, \qquad (2.12)$$

то справедлива априорная оценка

$$\|y(t)\|_a \leqslant M_1 \|y_0\|_a + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M_2 \max_{\bar{\omega}_\tau} \|\varphi(t)\| \ \textit{при} \ \tau < \frac{1}{2c_1}. \qquad (2.13)$$

Следствие. При

$$B \geqslant {}^1/_2\tau A + \varepsilon E, \ 0 < \varepsilon \leqslant 1, \qquad (2.14)$$

оценка (2.13) верна для всех $\tau > 0$.

Условия (2.9) и (2.12) выделяют из исходного семейства двухслойных схем (2.2) классы устойчивых схем.

В дальнейшем в качестве достаточных условий устойчивости будем, как правило, пользоваться условиями (2.9) и (2.12) при $c_1 = 0$, т. е. условиями (2.11) и (2.14).

Полагая $B = E + \tau R$, запишем схему (2.2) во второй канонической форме

$$y_t + \tau R y_t + Ay = \varphi. \qquad (2.15)$$

Из (11) следует

$$E + \tau R \geqslant \frac{1}{2}\tau A \quad \text{или} \quad R \geqslant \frac{1}{2}A - \frac{1}{\tau}E.$$

Это условие будет выполнено при *)

$$R \geqslant \sigma_0 A, \quad \text{где} \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}. \qquad (2.16)$$

В самом деле, если $R \geqslant \sigma_0 A$, т. е. $(Ry, y) \geqslant \sigma_0(Ay, y)$, то

$$(By, y) - {}^1/_2\tau(Ay, y) = ((E + \tau(R - {}^1/_2A))y, y) = \left[\|y\|^2 - \frac{1}{\|A\|}(Ay, y)\right] +$$
$$+ \tau((R - \sigma_0 A)y, y) \geqslant \tau((R - \sigma_0 A)y, y) \geqslant 0,$$

так как $(Ay, y) \leqslant \|A\| \|y\|^2$. Запись доказательства можно упростить, пользуясь операторными неравенствами и учитывая, что $E \leqslant (1/\|A\|)A$ и $E + \tau R \geqslant (1/\|A\|)A + \tau R$. Условие $E + \tau R \geqslant {}^1/_2\tau A$ будет выполнено, если $(1/\|A\|)A + \tau R \geqslant {}^1/_2\tau A$, т. е. $R \geqslant \sigma_0 A$.

---

*) Если A — неограниченный оператор, то всюду в (2.16), (2.17) и т. д. следует формально положить $1/\|A\| = 0$.

Аналогично убеждаемся в том, что условие (2.14) выполнено при

$$R \geqslant \sigma_\varepsilon A, \qquad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{\tau\|A\|}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{2.17}$$

Из теоремы 1 следует, что схема (2.2) устойчива по начальным данным при $R \geqslant \sigma_0 A$. Различие условий (2.16) и (2.17) связано с различным характером устойчивости по правой части. Сравнивая (2.16) и (2.17), видим, что оба условия выполнены, если

$$R \geqslant {}^1/_2 A. \tag{2.18}$$

При этом для любого $\tau > 0$ одновременно выполняются неравенства (2.10) и (2.23). В качестве примера рассмотрим схему с весами

$$y_t + Ay^{(\sigma)} = \varphi, \qquad y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y.$$

Учитывая, что $\hat{y} = y + \tau y_t$, приведем ее к каноническому виду

$$(E + \sigma\tau A)y_t + Ay = \varphi.$$

Сравнивая с (2.15), находим

$$R = \sigma A.$$

Достаточные условия (2.16) и (2.17) дают (ср. [1])

$$\sigma \geqslant \sigma_0, \tag{2.16'}$$

$$\sigma \geqslant \sigma_\varepsilon. \tag{2.17'}$$

В частности, явная схема ($\sigma = 0$)

$$y_t + Ay = \varphi$$

согласно (2.16′) устойчива при дополнительном условии $\tau \leqslant 2 / \| A \|$.

В [7] получены априорные оценки для схемы с весами в случае несамосопряженного оператора A.

3. Трехслойные схемы

Исходное семейство трехслойных схем (ИС3)

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \qquad 0 < t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = \varphi_1, \tag{2.19}$$

зададим при помощи условий: операторы $A = A(t)$ и $R = R(t)$ являются самосопряженными, положительными и липшиц-непрерывными по t операторами (см. 2.1)).

Всюду рассматриваются только схемы (2.19), принадлежащие исходному семейству.

Теорема 3. *Если выполнены условия*

$$B \geqslant -c_1\tau^2 A, \qquad c_1 = \text{const} > 0, \tag{2.20}$$

$$R \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} A, \qquad \varepsilon = \text{const}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{2.21}$$

то схема (2.19) *при достаточно малом* $\tau \leqslant \tau_0$, $\tau_0 < 1/4c_1$ *корректна и для решения задачи* (2.19) *справедлива оценка*

$$\|y(t)\|_{(1)} \leqslant M_1 \|y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{\omega_\tau} [(A^{-1}\varphi, \varphi) + (A^{-1}\varphi_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}})]^{1/2}, \tag{2.22}$$

$$\|y\|^2_{(1)} = {}^1/_4 (A(y+\check{y}),\ y+\check{y}) + \tau^2\ (R - {}^1/_4 A)\ y_{\bar{t}},\ y_{\bar{t}}), \qquad (2.23)$$

где M_1, M_2 — *положительные числа, зависящие только от* c_1, c_2, ε, t_0.

Заметим, что $B + 2\tau R \geqslant ((1+\varepsilon)/2 - c_1\tau)\tau A > 0$ при $\tau < 1/2c_1$. Следовательно, схема (2.19) разрешима.

Теорема 4. *Пусть*

$$B \geqslant \delta E, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad R \geqslant {}^1/_4(1+\varepsilon)A, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \qquad (2.24)$$

Тогда для (2.19) *имеет место оценка* (*при любых* $\tau > 0$)

$$\|y(t)\|_{(1)} \leqslant M_1 \|y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{\omega_\tau} \|\varphi(t)\|, \qquad (2.25)$$

где $M_1 = M(c_2, t_0, c_2/\varepsilon)$, $M_2 = M(1/\delta, c_2, t_0, c_2/\varepsilon)$.

Замечание 1. Если оператор $R - {}^1/_4 A \geqslant 0$ является липшиц-непрерывным по t, то теоремы 3 и 4 верны, если вместо условия $R \geqslant [(1+\varepsilon)/4]A$ поставить условие

$$R \geqslant {}^1/_4 A. \qquad (2.26)$$

Это, в частности, выполняется для постоянных операторов R и A.

Рассмотрим в качестве примера схему с весами

$$y_{\overset{\circ}{t}} + A(\sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \check{y}) = \varphi. \qquad (2.27)$$

Записывая ее в канонической форме (2.19), находим

$$B = E + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A, \qquad R = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) A. \qquad (2.28)$$

В силу теоремы 3 и замечания 1 схема (2.27) устойчива при

$$\sigma_1 - \sigma_2 \geqslant -\frac{1}{\tau\|A\|} - c_1\tau, \qquad \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant {}^1/_2. \qquad (2.29)$$

Требование $B \geqslant \delta E$ выполняется при

$$\sigma_1 - \sigma_2 \geqslant -\frac{1-\delta}{\tau\|A\|}, \qquad 0 < \delta \leqslant 1. \qquad (2.30)$$

В этом случае имеет место оценка (2.25).

Симметричная схема ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$) устойчива, если

$$\sigma \geqslant {}^1/_4. \qquad (2.31)$$

Замечание 2. Полагая в (2.19) $R = 0$, получим явную схему

$$By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi,$$

которая неустойчива при любом операторе $B > 0$.

Напомним, что двухслойная явная схема ($R \equiv 0$)

$$y_t + Ay = \varphi$$

условно устойчива при $\tau \leqslant 2/\|A\|$.

Устойчивость трехслойной схемы обеспечивается только оператором R, двухслойной схемы — оператором $R + E/\tau$.

§ 3. О регуляризации схем

Перейдем теперь к изложению некоторых общих методов регуляризации схем.

1. Основной принцип регуляризации схем

Достаточные условия устойчивости

$$R \geqslant \sigma_0 A, \qquad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|}, \qquad \text{для двухслойной схемы,} \tag{3.1}$$

$$R \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} A, \qquad \varepsilon > 0, \qquad \text{для трехслойной схемы,} \tag{3.2}$$

накладывают весьма слабые ограничения на произвол в выборе оператора R. Поэтому открывается возможность преобразования (регуляризации) схем путем изменения оператора R так, чтобы условия (3.1) — (3.2) оставались выполненными. Оператор R в дальнейшем будем называть регуляризатором.

Рассмотрим, например, схему

$$(E + \tau R) y_t + Ay = \varphi, \qquad 0 \leqslant t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0. \tag{3.3}$$

Пусть выполнено условие (1), т. е. схема (3) устойчива. Тогда любая другая схема (3.3) с регуляризатором $\tilde{R} \geqslant R$ будет также устойчива. При регуляризации мы, оставаясь в классе устойчивых схем, можем в каждом конкретном случае выбирать R так, чтобы удовлетворить таким дополнительным требованиям, как экономичность (т. е. минимальный объем вычислений для нахождения решения разностной задачи), заданный порядок аппроксимации. Эти требования конкурируют друг с другом, и одновременное их выполнение является трудной задачей. Так как решение задачи (3.3) сводится к обращению оператора $E + \tau R$: $\hat{y} = (E + \tau R)^{-1}(E - \tau(A - R))y + (E + \tau R)^{-1}\varphi$, то следует выбирать R так, чтобы число действий $q(R)$, затрачиваемых на обращение оператора $E + \tau R$, было бы по возможности минимальным. Конкретные способы выбора R даны в § 4, а также в пп. 2 и 3 данного параграфа. Основной принцип регуляризации состоит в выборе в качестве регуляризаторов эн. эк. операторов *).

Положительные операторы $A = A(N, \tau; t)$ и $B = B(N, \tau; t)$ будем называть эн. эк. операторами, если для любых $y \in H_N$ и $t \in \omega_\tau$ выполнены неравенства

$$\gamma_1 (By, y) \leqslant (Ay, y) \leqslant \gamma_2 (By, y) \tag{3.4}$$

где γ_1, γ_2 — положительные числа, которые, вообще говоря, могут зависеть от τ и N. Если γ_1 и γ_2 не зависят от τ и N, то A и B будем называть равно-

*) Мы не рассматриваем тот случай, когда в процессе регуляризации меняется и оператор A.

мерно (по τ, N) эн. эк. операторами *).

В этой статье мы всюду, кроме п. 2, рассматриваем равномерно эн. эк. операторы. Условия (3.4) запишем в виде операторных неравенств

$$\gamma_1 B \leqslant A \leqslant \gamma_2 B. \tag{3.5}$$

Теорема 5. *Пусть оператор $A = A(t)$ положителен, самосопряжен и удовлетворяет условию липшиц-непрерывности*

$$|(A_{\bar t}(t)y, y)| \leqslant c_3(\check A^{(0)}y, y), \qquad \check A^{(0)} = A^{(0)}(t-\tau), \tag{3.6}$$

где $A^{(0)}(t)$ — равномерно эн. эк. с $A(t)$ оператор, так что

$$\gamma_1 A^{(0)} \leqslant A \leqslant \gamma_2 A^{(0)}. \tag{3.7}$$

Схема (3.3) *с регуляризатором $R = \sigma A^{(0)}$ устойчива, и для нее верны теоремы* 1 *и* 2 *при любом $\tau > 0$ и*

$$\sigma \geqslant {}^1/_2\gamma_2. \tag{3.8}$$

Доказательство. Из (3.6) и (3.7) следует, что

$$|(A_{\bar t}y, y)| \leqslant c_3(\check A^{(0)}y, y) \leqslant \frac{c_3}{\gamma_1}(\check A y, y) = c_2(\check A y, y), \qquad c_2 = \frac{c_3}{\gamma_1},$$

т. е. схема (3.3) принадлежит ИС2. Условия теорем 1 и 2 выполнены, так как $B = E + \tau R \geqslant E + {}^1/_2\tau\gamma_2 A^{(0)} \geqslant E + {}^1/_2\tau A$. Теорема 5 доказана.

Замечание 1. Теорема 5 сохраняет силу в каждом из следующих случаев: 1) $\sigma = \sigma_0\gamma_2$, $\sigma_0 = {}^1/_2 - 1/(\tau\|A\|)$; 2) A не зависит от t и вместо (3.7) выполнено условие $0 < A \leqslant \gamma_2 A^{(0)}$.

Замечание 2. Оператор $A^{(0)}$ может быть несамосопряженным.

Рассмотрим теперь трехслойную схему

$$By_{\mathring t} + \tau^2 R y_{\bar t t} + Ay = \varphi, \qquad 0 < t \in \omega_\tau, \qquad y(0),\ y(\tau) \text{ заданы}. \tag{3.9}$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (3.6) *и* (3.7), $A(t) > 0$, $A^*(t) = A(t)$. *Если оператор $A^{(0)}(t)$ самосопряжен и липшиц-непрерывен по t, т. е.*

$$|(A_{\bar t}^{(0)}(t)y, y)| \leqslant c_4(\check A^{(0)}y, y), \tag{3.10}$$

то для схемы (3.9) *с регуляризатором*

$$R = \sigma A^{(0)}$$

справедливы априорные оценки (2.22) *и* (2.25) *при*

$$\sigma \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4}\gamma_2, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{3.11}$$

*) В [15] разностный оператор B, удовлетворяющий (4), называется мажорантным по отношению к оператору A; в [16] операторы A и B, для которых выполнено условие (3.4), называются эквивалентными по спектру. Предполагается, что A и B — самосопряженные операторы, H — конечномерное пространство. Мы не предполагаем ни самосопряженности A и B, ни конечномерности H и не пользуемся какой-либо информацией о спектре операторов A и B.

Для доказательства этой теоремы достаточно убедиться в том, что схема (3.9) принадлежит ИСЗ. Отметим лишь, что условие (3.2) выполнено, так как

$$R \geqslant \frac{1}{4}(1+\varepsilon)\gamma_2 A^{(0)} \geqslant \frac{1}{4}(1+\varepsilon)A.$$

Замечание 3. Постоянные M_1 и M_2 в априорных оценках зависят от γ_1 и не зависят от γ_2. Поэтому требование независимости γ_1 от τ и N естественно. Если A и $A^{(0)}$ — постоянные операторы, то условие (3.7) может быть заменено более слабым условием

$$0 < A \leqslant \gamma_2 A^{(0)}.$$

Теоремы 5 и 6 сохраняют силу и в том случае, когда γ_2 зависит от τ и N. Зависимость γ_2 от τ и N сказывается только на погрешности аппроксимации схемы. В п. 2 будет рассмотрен случай, когда γ_2 зависит от $\| A \|$ и, следовательно, от N, τ.

Основным при конструировании устойчивых схем для конкретных задач является вопрос о выборе подходящего эн. эк. оператора. В § 4 для случая, когда $A = -\Lambda$, Λ — эллиптический разностный оператор, приведен ряд эн. эк. операторов $A^{(0)}$.

Здесь мы рассмотрим два простейших примера регуляризации разностных схем и покажем, что каждый из них соответствует определенному способу выбора эн. эк. оператора (регуляризатор R при этом согласно теоремам 5 и 6 выбирается равным $R = \sigma A^{(0)}$).

2. Явные трехслойные схемы

Простейшим эн.эк. оператором является единичный оператор

$$A^{(0)} = E.$$

Так как $A \leqslant \| A \| E$, то условие $A \leqslant \gamma_2 A^{(0)}$ будет выполнено при $\gamma_2 = \| A \|$. Для упрощения изложения предположим, что A — постоянный оператор (не зависит от t). Рассмотрим трехслойную схему. Для нее $R = \sigma A^{(0)}$, $\sigma \geqslant {}^1/_4\gamma_2$. Учитывая, что $\gamma_2 = \| A \|$, получаем $R = \sigma E$, где $\sigma \geqslant {}^1/_4\|A\|$. Соответствующая трехслойная схема имеет вид

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi.$$

Такая регуляризация имеет смысл, если B — либо единичный оператор, либо такой, что обращение оператора $B + 2\sigma\tau E$ проводится с затратой малого числа операций. При $B = E$ получаем явную трехслойную схему

$$y_{\overset{\circ}{t}} + \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \tag{3.12}$$

которая безусловно устойчива при

$$\sigma \geqslant {}^1/_4 \| A \|. \tag{3.13}$$

Во введении упоминалась схема «ромб» для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{3.14}$$

Зададим при $x = 0$ и $x = 1$ краевые условия I рода. Пусть
$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ h = 1 / N\}$ — сетка на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$,
$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, N_0,\ \tau = t_0 / N_0\}$ — сетка на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$,
$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j)\}$ — сетка в прямоугольнике

$$(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0),$$

H — пространство сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и обращающихся в нуль при $i = 0, N$,

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \qquad \|y\| = \sqrt{(y, y)}$$

суть скалярное произведение и норма в H.

Схема «ромб» имеет вид

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i-1}^{j} - (y_i^{j+1} + y_i^{j-1}) + y_{i+1}^{j}}{h^2} + \varphi_i^j.$$

Приведем ее к каноническому виду. Учитывая, что

$$y_i^{j+1} + y_i^{j-1} = \hat{y} + \check{y} = (\hat{y} - 2y + \check{y}) + 2y = 2y + \tau^2 y_{\bar{t}t},$$
$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 y_{\bar{x}x,i},$$

получаем

$$y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{1}{h^2}\tau^2 y_{\bar{t}t} = \Lambda y + \varphi, \qquad \Lambda y = y_{\bar{x}x}. \tag{3.15}$$

Сравнив (3.15) с (3.9), видим, что $Ay = -\Lambda y$, $Ry = y / h^2$. Так как $\| A \| = (4 / h^2) \cos^2 (\pi h / 2) < 4 / h^2$, то $R = E / h^2 > A / 4$, т. е. условие устойчивости выполнено. Для схемы «ромб» верны априорные оценки (2.22) и (2.25) при любых τ и h.

Сравнивая затем (3.15) с (3.12), видим, что схема «ромб» принадлежит классу трехслойных схем с регуляризатором $R = \sigma E$, где σ удовлетворяет неравенству (3.13).

Нетрудно написать аналог схемы (3.15) для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами в случае одной или нескольких пространственных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$. В (3.15) вместо Λy надо подставить разностный оператор, аппроксимирующий эллиптический оператор, и выбрать $\sigma \geqslant {}^1/_4\|A\|$. Остается лишь вычислить

$$\|A\| = \|\Lambda\| \leqslant c_2 \sum_{\alpha=1}^{p} 4h_\alpha^{-2},$$

где c_2 — максимум коэффициента теплопроводности, и положить $\sigma = c_2 \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^{-2}$ (рассуждения, для упрощения изложения, проведены в

предположении, что область изменения $x_1, \ldots, x_p$ есть p-мерный параллелепипед и сетка ω_h равномерна по каждому x_α; эти ограничения легко снимаются).

Хорошо известно, что явная трехслойная схема имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 h^{-2} + h^2)$ и сходится со скоростью $O(\tau + h^2)$ при условии $\tau h^{-2} \leqslant c_0 = \text{const}$. Можно доказать, что она сходится равномерно при $p \leqslant 3$.

3. Асимметричные схемы

Оператор R для двухслойной схемы может быть несамосопряженным. Рассмотрим тот случай, когда $A^{(0)}$ представим в виде суммы двух сопряженных друг другу операторов

$$A^{(0)} = A_1 + A_2, \qquad A_2 = A_1^*.$$

Тогда справедливо равенство

$$(A_1 y, y) = (A_2 y, y) = 0.5(A^{(0)} y, y).$$

В качестве регуляризатора R можно взять операторы

$$R_1 = \gamma_2 A_1 \text{ или } R_2 = \gamma_2 A_2, \qquad R_2 = R_1^*. \tag{3.16}$$

Так как $(A_1 y, y) = (A_2 y, y) = 0.5(A^{(0)} y, y)$, $\gamma_2 (A^{(0)} y, y) \geqslant (Ay, y)$, $(R_1 y, y) = (R_2 y, y) = 0.5\gamma_2 (A^{(0)} y, y) \geqslant 0.5(Ay, y)$, то получаемые при этом схемы являются устойчивыми и для них верна теорема 5.

В частности, при $A^{(0)} y = Ay$ $(\gamma_1 = \gamma_2 = 1)$ имеем

$$R_1 y = A_1 y, \qquad R_2 y = A_2 y, \qquad R_2 = R_1^*. \tag{3.17}$$

Схемы с регуляризаторами (3.16) назовем асимметричными или треугольными.

Приведем в качестве примера асимметричную схему [6] для уравнения теплопроводности (3.14) с краевыми условиями I рода. Здесь $Ay = -\Lambda y$, $\Lambda y = y_{\bar{x}x}$ (см. п. 2). Замечая, что $(y, y_x) = 0.5h\|y_{\bar{x}}\|^2$, $-(y, y_x) = 0.5h\|y_{\bar{x}}\|^2 = (y, y_{\bar{x}})$, $Ay = -y_{\bar{x}x} = -y_x / h + y_{\bar{x}} / h$, представим A в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где $A_1 y = y_{\bar{x}} / h$, $A_2 y = -y_x / h$. Полагая затем $R = A_1$ и $R = A_2$, получим две асимметричные схемы (записанные в канонической форме, ср. [6]):

$$y_t + \frac{\tau}{h} y_{\bar{x}t} = y_{\bar{x}x} + \varphi, \qquad R_1 y = \frac{1}{h} y_{\bar{x}}, \tag{3.18}$$

$$y_t - \frac{\tau}{h} y_{xt} = y_{\bar{x}x} + \varphi, \qquad R_2 y = -\frac{1}{h} y_x. \tag{3.19}$$

Каждая из этих схем безусловно устойчива, так как $(R_1 y, y) = (R_2 y, y) = 0.5(Ay, y)$. Устойчивость здесь достигается за счет ухудшения аппроксимации: схемы (3.18) и (3.19) дают аппроксимацию $O(\tau / h + h^2)$, в то время как явная схема $y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi$ — аппроксимацию $O(\tau + h^2)$. В [6] было предложено для повышения точности чередовать схемы (3.18) и (3.19) от слоя к слою. Полученная перемежающаяся схема имеет точность (см. [17]) $O(\tau^2 h^{-2} + h^2) = O(h^2)$ при $\tau h^{-2} \leqslant c_0 = \text{const}$.

Пользуясь теоремой 5, нетрудно написать асимметричные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f, \qquad 0<c_1\leqslant k\leqslant c_2. \tag{3.20}$$

В этом случае $Ay=-(ay_{\bar{x}})_x$, например, $a(x,t)=k(x-0.5h,t)$,

$$\gamma_1=c_1, \qquad \gamma_2=c_2, \qquad A^{(0)}y=-y_{\bar{x}x}, \qquad R_1y=\frac{c_2}{h}y_{\bar{x}}, \quad R_2y=-\frac{c_2}{h}y_x.$$

Для многомерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}+f(x,t), \qquad p>1, \qquad x=(x_1,\ldots,x_p)\in G,$$

$$0\leqslant t\leqslant t_0, \qquad u|_\Gamma=\mu, \tag{3.21}$$

можно написать большее число асимметричных схем (4 при $p=2$ и 8 при $p=3$). Пусть $p=2$. В этом случае в качестве регуляризаторов можно выбрать операторы

$$R_1y=\frac{1}{h_1}y_{\bar{x}_1}+\frac{1}{h_2}y_{\bar{x}_2}, \qquad R_2y=-\frac{1}{h_1}y_{x_1}-\frac{1}{h_2}y_{x_2}, \qquad R_2=R_1^*, \tag{3.22}$$

$$R_3y=\frac{1}{h_1}y_{\bar{x}_1}-\frac{1}{h_2}y_{x_2}, \quad R_4y=\frac{1}{h_2}y_{\bar{x}_2}-\frac{1}{h_1}y_{x_1}, \qquad R_4=R_3^*, \tag{3.23}$$

где h_1 и h_2 — шаги сетки $\omega_h(G)$ по x_1 и x_2. Для простоты будем считать, что $G=G_0$ есть p-мерный параллелепипед. Если ω_h неравномерна, то в (3.22) и (3.23) следует заменить h_α на $\hbar_\alpha=0.5(h_\alpha+h_\alpha^{(+1_\alpha)})$. Операторы R_1 и R_2, R_3 и R_4 попарно сопряжены. Все 4 схемы безусловно устойчивы. Чередуя R_1 и R_2, R_3 и R_4 от слоя к слою, получим перемежающиеся схемы (явные схемы переменных направлений), имеющие точность $O(\tau^2h^{-2}+h^2)$, где $h=\min(h_1,h_2)$. Такие схемы были предложены в [6]. Для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами теплопроводности используются те же регуляризаторы, умноженные на c_2, где c_2 — максимум коэффициента теплопроводности. Переход к произвольному числу измерений не представляет труда. Можно взять

$$R_1y=\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{h_\alpha}y_{\bar{x}_\alpha}, \qquad R_2y=-\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{h_\alpha}y_{x_\alpha}$$

и т. д. Полученные схемы являются экономичными, так как счет при определении $\hat{y}$ на новом слое ведется по явным формулам.

4. Метод факторизации. Факторизованные двухслойные схемы

Для численного решения многомерных задач математической физики предложено большое число экономичных схем (см. Введение). После приведения многих из них к каноническому виду (в случае двухслойных схем) получаются схемы (3.3), у которых оператор B — произведение нескольких операторов. Для этих схем применяется различная терминоло-

гия, может быть еще не установившаяся (метод переменных направлений, схемы расщепления, схемы расщепляющегося оператора, метод дробных шагов и др.). Схемы, у которых оператор на верхнем слое: B в случае двух слойных схем, $B + 2\tau R$ в случае трехслойных схем есть произведение конечного числа операторов, например

$$B = \prod_{s=1}^{m} B_s = B_1 \ldots B_s \ldots B_m, \tag{3.24}$$

мы будем называть факторизованными схемами (ФС), не претендуя на окончательный характер такого названия. Отметим лишь, что этот термин отражает специальный характер процедуры регуляризации — факторизацию оператора на верхнем слое.

Перейдем к изложению формального метода построения ФС (ср. с [10], [12]) *).

Пусть дана некоторая схема, имеющая определенный порядок аппроксимации. Если она неустойчива, то, следуя п. 1, преобразуем ее при помощи соответствующего выбора R в устойчивую схему. При этом порядок аппроксимации, вообще говоря, меняется (может понизиться или повыситься).

Рассмотрим тот случай, когда R — сумма:

$$R = \sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha \tag{3.25}$$

и удовлетворяет условию устойчивости

$$R \geqslant \sigma_0 A, \qquad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|}, \tag{3.26}$$

так что исходная схема имеет вид

$$\left(E + \tau \sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha\right) y_t + Ay = \varphi. \tag{3.27}$$

Рассмотрим схему

$$y_t + \tau \tilde{R} y_t + Ay = \varphi, \tag{3.28}$$

принадлежащую тому же классу устойчивых схем ($\tilde{R} \geqslant \sigma_0 A$). Выберем $\tilde{R}$ так, чтобы оператор $\tilde{B} = E + \tau \tilde{R}$ был факторизован, например

$$E + \tau \tilde{R} = \prod_{\alpha=1}^{m} (E + \tau R_\alpha). \tag{3.29}$$

*) В [8] ФС рассматривались в качестве исходных схем. В [20] было замечено, что известный ранее (см. [21]) экономичный алгоритм решения многомерного уравнения теплопроводности (с постоянными коэффициентами в параллелепипеде) может быть получен при помощи формального приема «приближенной» факторизации оператора на верхнем слое, в результате которого естественная многомерная схема заменяется факторизованной схемой (см. также [11]).

Тогда схема (28) будет иметь вид

$$\prod_{\alpha=1}^{m}(E+\tau R_\alpha)y_t+Ay=\tilde{\varphi},\qquad y(0)=y_0. \tag{3.30}$$

Сравнивая (3.28) с (3.30), видим, что

$$\tilde{R}=R+\tau Q,\qquad \tilde{B}=E+\tau\tilde{R}=E+\tau R+\tau^2 Q, \tag{3.31}$$

$$Q=\sum_{\alpha<\beta}R_\alpha R_\beta+\tau\sum_{\alpha<\beta<\gamma}R_\alpha R_\beta R_\gamma+\ldots+\tau^{m-2}\prod_{\alpha=1}^{m}R_\alpha. \tag{3.32}$$

Перейдем к выяснению условий устойчивости ФС (3.30). Так как $\tilde{B}=E+\tau R+\tau^2 Q$, то достаточное условие устойчивости

$$\tilde{B}\geqslant 0.5\,\tau(1-2c_1\tau)A \tag{3.33}$$

будет выполнено, если

$$Q\geqslant -c_1A,$$

где c_1 — произвольная положительная постоянная, не зависящая от τ и N. Тем самым доказана

Теорема 7. *Пусть исходная схема* (3.27) *устойчива, т. е.* $R\geqslant\sigma_0 A$. *Тогда ФС* (3.30) *будет устойчива в норме* $\|y\|_a=\sqrt{(Ay,y)}$ *при достаточно малом* $\tau\leqslant\tau_0$, $\tau_0<1/4c_1$, *если выполнено условие* (3.33). *Для решения задачи* (3.30) *верна оценка* (2.10).

Замечание 1. Если

$$Q\geqslant -c_1R,\qquad R\geqslant 0.5A, \tag{3.34}$$

то ФС (3.30) устойчива при $\tau\leqslant 1/c_1$ и для нее верны оценки (2.10) и (2.12) (при $\varepsilon=1$).

В самом деле, $\tilde{B}=E+\tau R+\tau^2Q\geqslant E+\tau(1-c_1\tau)R\geqslant 0.5\tau(1-c_1\tau)A+E$, т. е. $\tilde{B}\geqslant E$, так как $R\geqslant 0.5A$, $1-c_1\tau\geqslant 0$.

Для сходимости схемы, как известно, достаточно, чтобы она аппроксимировала дифференциальное уравнение и была устойчива асимптотически, т. е. на достаточно мелких сетках. Для реализуемости схемы необходимо, чтобы она была устойчивой на практически допустимых (на «грубых») сетках. В случае переменных коэффициентов это требование становится особенно важным. Условие малости шагов сетки вида $\tau\leqslant\tau_0$ и $h\leqslant h_0$, где τ_0 и h_0 зависят от коэффициентов дифференциального уравнения, является слишком обременительным и может привести к нереализуемости схемы на практике.

Выделим класс ФС, которые свободны от этого недостатка — устойчивы при любых τ.

Теорема 8. *Пусть* $R_1,\ldots,R_m$ — *самосопряженные* ($R_s^*=R_s$), *неотрицательные* ($R_s\geqslant 0$) *и перестановочные между собой операторы* ($R_sR_k=R_kR_s$ *для всех* $s,k=1,\ldots,m$). *Тогда схема* (3.30) *устойчива*

при любом τ, *если*

$$R = \sum_{s=1}^{m} R_s \geqslant \sigma_0 A. \tag{3.35}$$

Доказательство. В силу теоремы из [22], [23] имеем $R_s R_k \geqslant 0$, если $R_s \geqslant 0$, $R_k \geqslant 0$ и, следовательно, $Q \geqslant 0$. Так как $R \geqslant \sigma_0 A\,(E + \delta R \geqslant \geqslant 0.5\tau A)$, то $\tilde{R} = R + \tau Q \geqslant R \geqslant \sigma_0 A$ при любом τ. Схема (3.30) безусловно устойчива.

Замечание 2. Говоря о безусловной устойчивости, мы подразумеваем, что все условия для операторов схемы A (см. § 2, п. 2) и R_s выполнены при любых τ и $N(h_N)$.

Замечание 3. Если $m = 2$, то теорема верна, если R_1 и R_2 не являются самосопряженными операторами, но сопряжены друг другу ($R_2 = R_1^*$, см. п. 4) и $R = R_1 + R_2 \geqslant \sigma_0 A$. В самом деле, $\tilde{B} = E + \tau R + + \tau^2 R_1 R_2 > E + \tau R \geqslant 0.5\tau A$, так как $(R_1 R_2 y, y) = (R_2^* R_2 y, y) = = \|R_2 y\|^2 > 0$.

При факторизации мы должны соблюдать два условия:

1) ФС (3.30) принадлежит тому же классу устойчивых схем, что и исходная схема (3.27),

2) ФС (3.30) и исходная схема (3.27) эквивалентны по порядку аппроксимации на некотором множестве гладких функций $V \subset H_0$ в смысле определения, данного в § 1, п. 4.

Может оказаться, что сохранение порядка аппроксимации требует изменения правой части. Это имеет место, в частности, при решении задачи с неоднородными краевыми условиями (см. [8]). При операторной записи разностного уравнения краевые условия учитываются изменением правой части в ближайших к границе области узлах сетки. Введение дополнительного оператора $\tau^2 Q$ требует изменения в этих узлах φ на $\tilde{\varphi}$ (см. [2]).

Для погрешности $z = y - P_N v$ получаем задачу

$$(E + \tau R + \tau^2 Q) z_t + Az = \tilde{\psi}, \qquad 0 \leqslant t \in \omega_\tau, \qquad z(0) = 0, \tag{3.36}$$

где $\tilde{\psi}$ — погрешность аппроксимации для схемы (3.30). Пусть $\tilde{\varphi} = \varphi$. Тогда можно написать

$$\tilde{\psi} = \mathring{\psi} + \psi, \qquad \mathring{\psi} = Q\eta, \qquad \eta = \tau^2 P_N v_t,$$

где ψ — погрешность аппроксимации для исходной схемы (3.27). Чтобы судить об эквивалентности по порядку аппроксимации схем (3.27) и (3.30), надо оценить $\mathring{\psi} = Q\eta$ в некоторой норме $\|\cdot\|_{(3)}$. Эта норма имеет вид

$$\|\mathring{\psi}\|_{(3)} = \|\eta\|_q = \sqrt{(Q\eta, \eta)},$$

если Q — самосопряженный положительный оператор. Представим $Q\eta$ в виде

$$Q\eta = \sum_{s=2}^{m} \tau^s Q_s \bar{\eta}, \qquad \eta = \tau^2 \bar{\eta}, \qquad \bar{\eta} = P_N v_t,$$

и введем обозначение

$$\|\bar{\eta}\|_{q_s} = \sqrt{(Q_s\bar{\eta}, \bar{\eta})}$$

(предполагая при этом, что Q_s — положительный самосопряженный оператор).

Теорема 9. *Пусть*

$$R = \sum_{s=1}^{m} R_s, \qquad R_s^* = R_s > 0, \qquad R_s R_k = R_k R_s$$

для всех $s, k = 1, 2, \ldots, m$, $R \geqslant \sigma_0 A$.

Тогда для ФС (3.36) *с правой частью*

$$\tilde{\psi} = Q\eta + \psi \tag{3.37}$$

справедливы при любом $\tau > 0$ *априорные оценки*

$$\|z(t)\|_a \leqslant M \max_{\omega_\tau} [\tau\|\bar{\eta}\|_q + \|\psi\|], \tag{3.38}$$

$$\|z(t)\|_a \leqslant M \max_{\omega} \left[\sum_{s=3}^{m} \tau^{(s+1)/2} \|\bar{\eta}(t)\|_{q_s} + \|\psi(t) + \tau^2 Q\bar{\eta}\| \right], \tag{3.39}$$

где $\|z(t)\|_a = \sqrt{(A(t)z(t), z(t))}$.

Замечание 4. Пусть выполнены условия

$$Q \geqslant \varepsilon_0 \bar{Q} - c_1 A, \qquad \varepsilon_0 > 0, \qquad c_1 > 0, \tag{3.40}$$

$$|(Q_s y, v)| \leqslant \varepsilon_0 (\bar{Q}_s v, v) + \frac{1}{\varepsilon_0} M'(\bar{Q}_s y, y), \tag{3.41}$$

где

$$\bar{Q} = \prod_{\alpha=1}^{m} (E + \tau\bar{R}_\alpha) - (E + \tau\bar{R}) = \sum_{s=2}^{m} \tau^s \bar{Q}_s, \tag{3.42}$$

$\bar{R}_s$, $s = 1, 2, \ldots, m$,— операторы, которые удовлетворяют условиям теоремы 9. Тогда при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$, имеют место оценки (3.38) и (3.39), в которых следует заменить $\|\bar{\eta}\|_q$ на $\|\bar{\eta}\|_{\bar{q}}$ и $\|\bar{\eta}\|_{q_s}$ на $\|\bar{\eta}\|_{\bar{q}s}$. Условия (3.40), (3.41) выполняются для ряда ФС, аппроксимирующих уравнения параболического типа в параллелепипеде ($0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$). Для них в [9] были получены оценки, аналогичные указанным выше.

Мы не имеем возможности подробно останавливаться на оценках более сложного типа. Если, например, выполнены условия теоремы 9 и ψ имеет вид

$$\tilde{\psi} = Q\eta + \psi^* + \sum_{\alpha=1}^{m} \bar{\psi}_\alpha,$$

то для решения задачи (3.36) справедлива оценка

$$\|z(t)\|_a \leqslant M \max_{\omega_\tau} \|\widetilde{\psi}(t)\|_{(2)}, \tag{3.43}$$

где

$$\|\psi\|^2_{(2)} = \|\psi^* + \tau^2 Q_2 \bar{\eta}\|^2 + \sum_{s=1}^{m} \tau^{s+1} \|\bar{\eta}\|^2_{q_s} + \tag{3.44}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{m} [((A_\alpha^{(0)})^{-1} \bar{\psi}_\alpha, \bar{\psi}_\alpha) + ((A_\alpha^{(0)})^{-1} \bar{\psi}_{\alpha\bar{t}}, \bar{\psi}_{\alpha\bar{t}})],$$

$A_\alpha^{(0)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$,— самосопряженные положительные операторы, причем $A^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha^{(0)}$ — эн. эк. с A оператор $(\gamma_1 A^{(0)} \leqslant A \leqslant \gamma_2 A^{(0)})$.

5. Трехслойные факторизованные схемы

Факторизацию трехслойных схем можно произвести несколькими способами. Мы рассмотрим здесь три способа для схемы

$$y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \qquad 0 < t \in \omega_\tau, \quad y(0),\ y_t(0) \text{ заданы}, \tag{3.45}$$

принадлежащей ИСЗ, предполагая, что

$$R = \sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha.$$

Учитывая соотношения

$$y_{\overset{\circ}{t}} = {}^1/_2 (y_t + y_{\bar{t}}), \qquad \tau y_{\bar{t}t} = y_t - y_{\bar{t}},$$

перепишем (3.45) в виде

$$(E + 2\tau R) y_t = -F_1, \qquad F_1 = (E - 2\tau R) y_{\bar{t}} + 2Ay - 2\varphi. \tag{3.46}$$

После подстановки $\tau y_{\bar{t}t} = 2y_{\overset{\circ}{t}} - 2y_{\bar{t}}$ в (3.45) получим

$$(E + 2\tau R) y_{\overset{\circ}{t}} = -F_2, \qquad F_2 = Ay - 2\tau R y_{\bar{t}} - \varphi. \tag{3.47}$$

Так как $y_{\overset{\circ}{t}} = y_{\bar{t}} + {}^1/_2 \tau y_{\bar{t}t}$, то из (3.45) следует

$$(E + 2\tau R) y_{\bar{t}t} = -F_3, \qquad F_3 = \frac{2}{\tau}(y_{\bar{t}} + Ay - \varphi). \tag{3.48}$$

Правые части F_1, F_2, F_3 известны. Определение $\hat{y}$ сводится к обращению оператора $E + 2\tau R$. Заменяя его оператором $E + 2\tau\widetilde{R}$ и полагая

$$E + 2\tau\widetilde{R} = \prod_{\alpha=1}^{m} (E + 2\tau R_\alpha) = E + 2\tau R + 4\tau^2 Q, \tag{3.49}$$

$$Q = \sum_{\alpha<\beta} R_\alpha R_\beta + 2\tau \sum_{\alpha<\beta<\gamma} R_\alpha R_\beta R_\gamma + \ldots + (2\tau)^{m-2} \prod_{\alpha=1}^{m} R_\alpha, \tag{3.50}$$

получим три ФС, которые после очевидных преобразований записываются в виде

$$(E + 4\tau^2 Q) y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 (R + 2\tau Q) y_{\bar{t}t} + Ay = \tilde{\varphi}, \tag{3.51}$$

$$(E + 4\tau^2 Q) y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \tilde{\varphi}, \tag{3.52}$$

$$y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 (R + 2\tau Q) y_{\bar{t}t} + Ay = \tilde{\varphi}. \tag{3.53}$$

Сформулируем некоторые достаточные условия устойчивости схем (3.51) — (3.53).

Теорема 10. *Пусть выполнены условия*

$$R_s^* = R_s, \qquad R_s R_k = R_k R_s \quad \text{для всех} \quad s, k = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.54}$$

$$R = \sum_{s=1}^{m} R_s \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} A, \tag{3.55}$$

где R_s не зависят от t. Тогда каждая из схем (3.51) — (3.53) *устойчива при любом $\tau > 0$ и для решения задач* (3.51) — (3.53) *верны оценки* (2.22) *и* (2.25), *в которых следует положить*

$$\|\hat{y}\|^2_{(1)} = \frac{1}{4}\Big(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y\Big) + \tau^2 \left(\left(R + 2\tau Q - \frac{1}{4}A\right) y_t, y_t\right) \tag{3.56}$$

для схем (3.51) *и* (3.53),

$$\|\hat{y}\|^2_{(1)} = \frac{1}{4}\Big(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y\Big) + \tau^2 \left(\left(R - \frac{1}{4}A\right) y_t, y_t\right) \tag{3.57}$$

для схемы (3.52).

Для доказательства этой теоремы достаточно проверить выполнение условия теорем 3 и 4. Заметим, что условия (3.54) этой теоремы носят конструктивный характер. Выбор операторов R_α, например, для систем параболических уравнений не представляет труда. Нетрудно убедиться в том, что из теорем 3 и 4 следует

Теорема 11. *Если выполнены условия*

$$R = \sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} A, \qquad Q \geqslant -c_1 R, \tag{3.58}$$

то при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0(c_1)$ для схем (3.51) — (3.53) *верны оценки* (2.22) *и* (2.25).

Представим $\tau^2 Q$ в виде суммы $\sum_{s=2}^{m} \tau^2 Q_s$.

При оценке порядка точности схем (3.51) — (3.53) используется

Теорема 12. *Для решения любого из уравнений* (3.51) — (3.53) *с правой частью*

$$\tilde{\varphi} = \sum_s \tau^s Q_s \eta \tag{3.59}$$

и с однородными начальными условиями $y(0) = y_t(0) = 0$ *имеет место априорная оценка*

$$\|y(t)\|_{(1)} \leqslant M \max_{\omega_\tau} \sum_s \tau^{(s+1)/2} \|\eta\|_{q_s}, \qquad \|\eta\|_{q_s} = \sqrt{(Q_s\eta, \eta)}, \tag{3.60}$$

если выполнены условия теоремы 10; *при этом* $\|y\|_{(1)}$ *определяется по формулам* (3.56), (3.57).

При оценке порядка точности ФС погрешность аппроксимации в общем случае представляется в виде суммы нескольких слагаемых ($\psi = \psi_1 + \ldots + \psi_k$), каждое из которых оценивается в своей норме. Комбинируя теоремы 11 и 12, получаем оценку для погрешности $z = y - P_N u$, где u — решение исходной задачи, вида

$$\|z(t)\|_{(1)} \leqslant M \max_{\omega_\tau} \sum_{s=1}^{k} \|\psi_s\|_{(2_s)}$$

(ср. с п. 4). Для решения каждого из уравнений можно предложить ряд алгоритмов. Все они сводятся к последовательному обращению операторов $E + 2\tau R_\alpha$. Перепишем, например, схему (3.51) в виде

$$\prod_{\alpha=1}^{m} (E + 2\tau R_\alpha) y_t = -F_1. \tag{3.61}$$

Обозначая $w = y_t$, определим $\hat{y}$, решая последовательно уравнения (ср. [10])

$$(E + 2\tau R_1) w_1 = -F_1, \qquad (E + 2\tau R_\alpha) w_\alpha = w_{\alpha-1}, \qquad 1 < \alpha \leqslant m,$$
$$\hat{y} = y + \tau w_m. \tag{3.62}$$

Схемы (3.52) и (3.53) запишем в виде

$$\prod_{\alpha=1}^{m} (E + 2\tau R_\alpha) y_{\overset{\circ}{t}} = -F_2, \tag{3.63}$$

$$\prod_{\alpha=1}^{m} (E + 2\tau R_\alpha) y_{\bar{t}t} = -F_3. \tag{3.64}$$

Положив затем $w = y_{\overset{\circ}{t}}$, $w = y_{\bar{t}t}$, получим

$$(E + 2\tau R_1) w_1 = -F_2, \qquad (E + 2\tau R_\alpha) w_\alpha = w_{\alpha-1}, \qquad 1 < \alpha \leqslant m,$$
$$\hat{y} = \check{y} + 2\tau w_m, \tag{3.65}$$

$$(E + 2\tau R_1) w_1 = -F_3, \qquad (E + 2\tau R_\alpha) w_\alpha = w_{\alpha-1}, \qquad 1 < \alpha \leqslant m,$$
$$\hat{y} = 2y - \check{y} + \tau^2 w_m. \tag{3.66}$$

При реализации алгоритмов (3.65) и (3.66) требуется помнить 3 вектора, в то время как для алгоритма (3.62) надо помнить два вектора (y, $w_{\alpha-1}$). Однако по объему вычислений все три алгоритма совпадают. Алгоритмы (3.62), (3.65) и (3.66) применялись ранее для решения многомерного уравнения теплопроводности в параллелепипеде (см. [10], [14]).

Рассмотрим два случая, когда можно факторизовать схему

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \qquad 0 < t \in \omega_\tau, \qquad y(0),\ y(\tau) \text{ заданы}, \tag{3.67}$$

не предполагая, что B — единичный оператор.

1. Пусть B, R_1, $R_2, \ldots, R_m$ — самосопряженные, постоянные, положительные и перестановочные друг с другом операторы, причем

$$R = \sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4} A.$$

Заменяя оператор $B + 2\tau R$ оператором

$$B \prod_{\alpha=1}^{m} (E + 2\tau B^{-1} R_\alpha) = B + 2\tau R + 4\tau^2 Q,$$

получим факторизованную схему, аналогичную схеме (3.51):

$$(B + 4\tau^2 Q) y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 (R + 2\tau Q) y_{\bar{t}t} + Ay = \tilde{\varphi}, \qquad y(0) = y_0, \qquad y(\tau) = y_1 \tag{3.68}$$

которая будет устойчивой, так как $Q > 0$, $Q^* = Q$. Для решения задачи (3.68) можно воспользоваться алгоритмом

$$(B + 2\tau R_1) w_1 = -F_1, \qquad (B + 2\tau R_\alpha) w_\alpha = B w_{\alpha-1}, \qquad \alpha > 1,$$

$$\hat{y} = y + \tau w_m. \tag{3.69}$$

2. Пусть $A^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha$, $B^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^{m} B_\alpha$ — эн. эк. с A и B постоянные операторы, так что

$$0 < A \leqslant \gamma_1 A^{(0)}, \qquad 0 < B \leqslant \gamma_2 B^{(0)}. \tag{3.70}$$

Положим

$$R = \frac{1}{\tau}\left(E + \sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha\right) - \frac{1}{2\tau} B, \qquad R_\alpha = R_\alpha^{(a)} + R_\alpha^{(b)},$$

$$R_\alpha^{(a)} = \frac{1+\varepsilon}{4} \gamma_1 A_\alpha, \qquad R_\alpha^{(b)} = \frac{1}{2} \gamma_2 B_\alpha, \qquad \varepsilon > 0.$$

Учитывая, что $y_{t^\circ} - {}^1/_2 \tau y_{\bar{t}t} = y_{\bar{t}}$, перепишем (3.67) в виде

$$\tau\left(E + \sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha\right) y_{\bar{t}t} + By_{\bar{t}} + Ay = \varphi, \qquad y(0) = y_0, \qquad y(\tau) = y_1. \tag{3.71}$$

Факторизуем эту схему, заменяя $E + \sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha$ произведением $\prod_{\alpha=1}^{m} (E + R_\alpha)$:

$$\tau \prod_{\alpha=1}^{m} (E + R_\alpha) y_{\bar{t}t} + By_{\bar{t}} + Ay = \varphi. \tag{3.72}$$

Приведем ФС (3.72) к каноническому виду:

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2\left(R + \frac{1}{\tau} Q\right) y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1.$$

(3.7

Формулируем условия, при которых эта схема устойчива: 1) $B^* = B > 0$, $A_\alpha{}^* = A_\alpha > 0$, $B_\alpha{}^* = B_\alpha > 0$; 2) $A_1, A_2, \ldots, A_m$, $B_1, B_2, \ldots, B_m$ перестановочны между собой. Условие $\tilde{R} = R + Q/\tau \geqslant (1+\varepsilon)A/4$ выполнено, так как $Q > 0$, $R \geqslant E/\tau + {}^1/_4(1+\varepsilon)A$ по построению. Схема (3.73) принадлежит ИСЗ, и для нее справедливы теоремы 3 и 4, причем

$$\|\hat{y}\|^2_{(1)} = {}^1/_4(A(\hat{y}+y), \hat{y}+y) + \tau^2\left(\left(R + \frac{1}{\tau}Q - {}^1/_4 A\right)y_t, y_t\right). \quad (3.74)$$

Решение уравнения (3.72) находится последовательным обращением операторов $E + R_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ (ср. с (3.66)). ФС (3.73) может быть использована для решения задач математической физики, приводящих к абстрактной задаче Коши

$$\mathcal{B}(t)\frac{du}{dt} + \mathcal{A}(t)u = f(t) \quad (3.75)$$

в вещественном гильбертовом пространстве. Соответствующая ФС (3.73) имеет первый порядок точности по τ. Рассматривая схемы с бóльшим числом слоев, можно построить экономичные схемы второго порядка точности по τ.

Трехслойные схемы вида

$$y_{\bar{t}t} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \bar{y}_0, \qquad R = \sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha, \quad (3.76)$$

факторизуются по аналогии со схемой (3.45). При этом вместо $E + 2\tau R$ в (3.46)—(3.48) надо писать $E + \tau^2 R$. В результате получаются факторизованные схемы

$$(E + \tau^2 R + {}^1/_2\tau^4 Q)\, y_{\bar{t}t} + \tau^3 Q y_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi, \quad (3.77)$$

$$(E + \tau^2 R)\, y_{\bar{t}t} + \tau^3 Q y_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi, \quad (3.78)$$

$$(E + \tau^2 R + \tau^4 Q)\, y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \quad (3.79)$$

аналогичные схемам (3.51)—(3.53). Здесь

$$Q = \sum_{\alpha<\beta} R_\alpha R_\beta + \tau^2 \sum_{\alpha<\beta<\gamma} R_\alpha R_\beta R_\gamma + \ldots + \tau^{2m-2}\prod_{\alpha=1}^{m} R_\alpha. \quad (3.80)$$

Достаточные условия устойчивости аналогичны условиям для (3.51)—(3.53). Мы не имеем возможности давать их формулировку здесь.

§ 4. Примеры

1. Проиллюстрируем методы регуляризации, указанные в § 3, на ряде примеров для уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \qquad u = u(x,t), \qquad x = (x_1, \ldots, x_p) \in G, \quad (4.1)$$

и гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x,t), \quad (4.2)$$

где Lu — эллиптический оператор 2-го порядка.

Пусть G — область p-мерного евклидова пространства, Γ — ее граница. Будем рассматривать только краевые условия I рода, заданные на Γ.

Для применения теории § 3 надо сначала построить разностные операторы Λ, аппроксимирующие дифференциальные операторы L. Пусть $\overline{\omega}_h(\overline{G})$ — прямоугольная сетка, заданная в области $G+\Gamma=\overline{G}$. Рассмотрим множество сеточных функций, заданных во внутренних узлах ω_h сетки $\overline{\omega}_h$, и введем на нем скалярное произведение (см. [24]).

$$(y, v)=\sum_{\omega_h} y(x) v(x) H, \qquad H=\prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha, \qquad \hbar_\alpha={}^1/_2(h_\alpha+h_\alpha^{(+1\alpha)}),$$

где h_α — шаг сетки по переменному x_α (сетка может быть неравномерной), и норму $\|y\|=\sqrt{(y, y)}$. В результате получим пространство H. Введем оператор A, отображающий H на H. Значения Ay совпадают с значениями $-\Lambda y$ на множество $\overline{\Omega}_0$ сеточных функций, обращающихся в нуль на границе γ_h сетки. Пользуясь разностными формулами Грина, нетрудно найти эн. эк. с A оператор $A^{(0)}$. В качестве сходных операторов мы выбираем, как правило, разностный оператор Лапласа

$$\Lambda^{(0)} y=\sum_{\alpha=1}^{p} y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, \qquad A^{(0)} y=-\Lambda^{(0)} y \tag{4.3}$$

или оператор без смешанных производных вида

$$\Lambda^{(0)} y=\sum_{\alpha=1}^{p}(\bar{a}_\alpha(x_\alpha) y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}, \qquad A^{(0)} y=-\Lambda^{(0)} y. \tag{4.4}$$

Зная операторы $A^{(0)}$, можно воспользоваться теоремами 5 и 6.

2. Начнем с простейшего оператора

$$\Lambda y=(a(x) y_{\bar{x}})_x, \qquad 0<c_1 \leqslant a \leqslant c_2,$$

на сетке $\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=0, 1, \ldots, N,\ h=1/N\}$, соответствующего дифференциальному оператору $Lu=(k(x) u')'$. В этом случае (обозначения см. [12])

$$(y, v)=\sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \qquad \|y\|=\sqrt{(y, y)}. \tag{4.5}$$

Разностная формула дает

$$(-\Lambda y, y)=(a, y_{\bar{x}}^2] \leqslant c_2(1, y_{\bar{x}}^2)=c_2(-\Lambda^{(0)} y, y), \qquad \Lambda^{(0)} y=y_{\bar{x}x},$$

и, следовательно,

$$c_1(A^{(0)} y, y) \leqslant(A y, y) \leqslant c_2(A^{(0)} y, y), \qquad A y=-(a y_{\bar{x}})_x, \tag{4.6}$$

$$A^{(0)} y=-y_{\bar{x}x}. \tag{4.7}$$

3. Рассмотрим теперь самосопряженный эллиптический оператор

$$\Lambda y=\sum_{\alpha=1}^{p}(a_\alpha(x) y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}, \qquad 0<c_1 \leqslant a_\alpha(x) \leqslant c_2, \tag{4.8}$$

соответствующий дифференциальному оператору

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right). \tag{4.9}$$

При помощи разностной формулы Грина убеждаемся в том, что

$$c_1(-\Lambda^{(0)}y,\ y) \leqslant (-\Lambda y,\ y) \leqslant c_2(-\Lambda^{(0)}y,\ y), \qquad y \in \overline{\Omega}_0,$$

где

$$\Lambda^{(0)}y = \sum_{\alpha=1}^{p} y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}.$$

Таким образом, в этом случае

$$\begin{gathered} Ay = -\Lambda y, \qquad A^{(0)}y = -\Lambda^{(0)}y = -\sum_{\alpha=1}^{p} y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, \\ A^{(0)}y = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y, \qquad A_\alpha y = -y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Если $a_\alpha(x)$ удовлетворяет неравенству

$$c_1\bar{a}_\alpha(x_\alpha) \leqslant a_\alpha(x) \leqslant c_2\bar{a}_\alpha(x_\alpha), \qquad \alpha = 1, \ldots, p, \tag{4.11}$$

то в качестве эн. эк. с A оператора выбираем оператор с разделяющимися переменными

$$A^{(0)}y = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y, \qquad A_\alpha y = -(\bar{a}_\alpha(x_\alpha)y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}. \tag{4.12}$$

4. Рассмотрим разностный эллиптический оператор со смешанными производными

$$\Lambda y = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{p} [(k_{\alpha\beta}(x)\, y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}(x)\, y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}], \tag{4.13}$$

соответствующий дифференциальному оператору

$$Lu = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right). \tag{4.14}$$

Предположим: 1) выполнены условия

$$c_1\sum_{\alpha=1}^{p}\xi_\alpha^2 \leqslant \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{p} k_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leqslant c_2\sum_{\alpha=1}^{p}\xi_\alpha^2;$$

2) область $G = G_0$ есть p-мерный параллелепипед $(0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p)$; 3) сетка $\overline{\omega}_h = \{(i_1h_1, \ldots, i_ph_p),\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha,\ h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, p\}$ равномерна по каждому из x_α.

Эн. эк. с оператором $Ay = -\Lambda y$ является оператор

$$A^{(0)}y = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y, \qquad A_\alpha y = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \qquad y \in \overline{\Omega}_0, \tag{4.15}$$

так что $c_1A^{(0)} \leqslant A \leqslant c_2A^{(0)}$. Сравнивая (4.15) с (4.10), видим, что оператор (4.15) эн. эк. с операторами (4.8) и (4.13).

5. Рассмотрим оператор для системы эллиптических уравнений

$$\Lambda y^i = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}[(k_{\alpha\beta}^{ij}(x)\,y^j_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}^{ij}(x)\,y^j_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.16}$$

$$c_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{p}(\xi_\alpha^i)^2 \leqslant \sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{p} k_{\alpha\beta}^{ij}\xi_\beta^j\xi_\alpha^i \leqslant c_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{p}(\xi_\alpha^i)^2. \tag{4.17}$$

Обозначив через $y = (y_1, \ldots, y_n)$ вектор, $k_{\alpha\beta} = (k_{\alpha\beta}{}^{ij})$ — матрицу $n \times n$, запишем (4.16) в виде

$$\Lambda y = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{p}[(k_{\alpha\beta}(x)\,y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}(x)\,y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}]. \tag{4.18}$$

Область $G = G_0$ — параллелепипед, сетка ω_h равномерна по x_α.

Учитывая (4.17), можно в качестве эн. эк. с $Ay = -\Lambda y$ оператора выбрать оператор $A^{(0)}$, имеющий диагональную матрицу коэффициентов, так что

$$A^{(0)}y = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y, \qquad (A_\alpha y)^i = -y^i_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \tag{4.19}$$

$$c_1(A^{(0)}y,\ y) \leqslant (Ay,\ y) \leqslant c_2(A^{(0)}y,\ y).$$

Оператор без смешанных производных

$$\Lambda y^i = \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_\alpha{}^{ij}y^j_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}, \tag{4.20}$$

$$c_1\sum_{i=1}^{n}(\xi_\alpha{}^i)^2 \leqslant \sum_{i,\,j=1}^{n} a_\alpha{}^{ij}\xi_\alpha{}^i\xi_\alpha{}^j \leqslant c_2\sum_{i=1}^{n}(\xi_\alpha{}^i)^2$$

можно рассматривать на неравномерной сетке в произвольной области $\bar{G}$. Для него имеем

$$A^{(0)}y = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y, \qquad (A_\alpha y)^i = -y^i_{\bar{x}_\alpha\hat{x}_\alpha}. \tag{4.21}$$

6. После того как найдены эн. эк. операторы $A^{(0)}$, регуляризаторы R для двух- и трехслойных схем выбираются на основании теорем 5 и 6:

$$R = \sigma A^{(0)},$$

где $\sigma \geqslant {}^1/_2c_2$ для двухслойной схемы, $\sigma \geqslant ((1+\varepsilon)/4)c_2$ для трехслойной схемы. Все написанные выше операторы A и $A^{(0)}$ являются самосопряженными и положительно определенными.

Пусть $\bar{G} = \bar{G}_0 = (0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p)$ есть p-мерный параллелепипед. Тогда операторы A_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, перестановочны друг с другом. В этом случае для решения параболических уравнений (4.1) и систем уравнений ($u = (u_1, \ldots, u_n)$ — вектор) можно пользоваться фак-

торизованными схемами из § 3, пп. 3 и 4, полагая $R_\alpha = \sigma A_\alpha$. В результате мы получим экономичные схемы для решения первой краевой задачи, устойчивые для любых $\tau > 0$ на произвольных сетках ω_h при естественном условии параболичности и имеющие точность $O(|h|^2 + \tau)$ в случае двухслойных схем и $O(|h|^2 + \tau^2)$ в случае трехслойных схем. Независимо от того, рассматривается ли одно уравнение без смешанных производных или система уравнений со смешанными производными, во всех случаях переход со слоя на слой осуществляется путем обращения трехточечных разностных операторов 2-го порядка по обычным формулам прогонки.

Полученные факторизованные схемы сходятся в том случае, когда коэффициенты многомерного параболического уравнения имеют конечное число разрывов I рода на гиперплоскостях, параллельных координатным гиперплоскостям. Исследование погрешности аппроксимации для ФС проводится в окрестности разрыва так же, как и в случае обычных многомерных схем [18], [24]. Так, например, в случае двухслойных схем основную роль играет априорная оценка для задачи

$$z_t + \tau(R + \tau Q) z_t + Az = \psi, \qquad z|_{t=0} = 0,$$

с правой частью $\psi = -\tau R\eta$, $\eta = u_t$. Мы не будем выписывать эту оценку ввиду ее аналогии с оценками из [18], [19]. Для ослабления требований гладкости коэффициентов и решения даже в случае непрерывных $k_\alpha(x, t)$ используются аналоги теорем 9 и 12.

Результаты общей теории легко применить и для построения экономичных ФС в случае краевых условий III рода.

Поскольку для схем, аппроксимирующих уравнения гиперболического типа (4.2), используются те же регуляризаторы, что и для трехслойной схемы, соответствующей уравнению (4.1), то нет необходимости останавливаться отдельно на описании ФС для (4.2). С точки зрения общей теории § 3 их написание не представляет труда.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность А. Н. Тихонову за обсуждение результатов и В. Б. Андрееву за ряд редакционных замечаний.

Поступила в редакцию
1.04.1966

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. К теории разностных схем. Докл. АН СССР, 1965, **165**, № 5, 1007—1011.
2. А. А. Самарский. О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики. Aplik. Mat., 1965, **10**, № 2, 146—164.
3. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
4. Л. В. Канторович. Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук, 1948, **3**, вып. 6, 89—185.
5. В. Вазов, Дж. Форсайт. Разностные методы дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во ин. лит., 1963.
6. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.

7. А. А. Самарский. Некоторые вопросы теории разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 4, 665—686.
8. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 4, 549—568.
9. Е. Г. Дьяконов. О применении разностных схем с расщепляющимся оператором для некоторых систем уравнений параболического и гиперболического типов. Сибирский матем. ж., 1965, 4, № 3, 509—515.
10. А. А. Самарский. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 5, 812—840.
11. Н. Н. Яненко. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1966.
12. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 2, 266—238.
13. В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
14. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных параболических уравнений с переменными коэффициентами. В сб. «Вычисл. методы и программирование». М., Изд-во МГУ, 1965, вып. 3, 163—190.
15. Е. Г. Дьяконов. Метод мажорирующего оператора для решения некоторых сильно эллиптических систем. Успехи матем. н., 1964, 19, вып. 5, 197—198.
16. Е. Г. Дьяконов. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 1, 12—34.
17. А. А. Самарский. Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 3, 580—585.
18. А. А. Самарский. О сходимости и точности однородных разностных схем для одномерных и многомерных параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 4, 603—633.
19. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 6, 972—1000.
20. Н. Н. Яненко. О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности. Изв. ВУЗов. Сер. матем., 1961, № 4(23), 148—157.
21. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, 125, № 6, 1207—1210.
22. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965.
23. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
24. А. А. Самарский. Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 1, 5—63.