ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 7 Сентябрь 1967 Октябрь № 5

УДК 518:517.944/.947

КЛАССЫ УСТОЙЧИВЫХ СХЕМ

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

В [1] при изложении метода регуляризации схем мы использовали теоремы о достаточных условиях устойчивости и априорных оценках для двухслойных и трехслойных схем. В данной статье мы даем доказательства этих теорем..

Пусть $\{H_N\}$ — последовательность вещественных унитарных пространств, $\{y_{N,\tau}(t)\}$ — последовательность абстрактных функций $y_{N,\tau}(t)$ дискретного аргумента $t \in \bar{\omega}_\tau$ со значениями в H_N, где $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ — сетка на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ с шагом τ. Рассматриваются линейные операторные двухточечные (трехточечные) уравнения, связывающие точки $y_{N,\tau}(t+\tau)$ и $y_{N,\tau}(t)$ (точки $y_{N,\tau}(t+\tau)$, $y_{N,\tau}(t)$, $y_{N,\tau}(t-\tau)$) пространства H_N. Эти уравнения естественно назвать двухслойными (трехслойными) операторно-разностными схемами.

Отправным пунктом исследования является каноническая форма записи схем. Рассматриваются множество двухслойных схем

$$B(t)\frac{y(t+\tau)-y(t)}{\tau}+A(t)y(t)=\varphi(t), \qquad 0 \leqslant t = t_j < t_0, \tag{0.1}$$

$$y(0)=y_0, \qquad y_0 \in H_N,$$

и множество трехслойных схем

$$B(t)\frac{y(t+\tau)-y(t-\tau)}{2\tau}+R(t)\left(y(t+\tau)-2y(t)+y(t-\tau)\right)+ \tag{0.2}$$

$$+A(t)y(t)=\varphi(t), \qquad y(0)=y_0, \qquad y(\tau)=y_1, \qquad y_0, y_1 \in H_N.$$

Здесь $y(t) = y_{N,\tau}(t)$ — искомая функция $t \in \bar{\omega}_\tau$; $\varphi_{N,\tau}(t)$ — заданная абстрактная функция $t \in \bar{\omega}_\tau$ со значениями в H_N; y_0 и y_1 — заданные векторы из H_N; $A(t) = A_{N,\tau}(t)$, $B(t) = B_{N,\tau}(t)$, $R(t) = R_{N,\tau}(t)$ — линейные (аддитивные и однородные) операторы, отображающие H_N на H_N.

Вводя предположения весьма общего характера относительно операторов схемы (например, положительность B и A, самосопряженность A для (0.1)), выделяем из множества всех возможных схем исходные семейства двухслойных схем (ИС-2) и трехслойных схем (ИС-3).

Устойчивость схем, следуя [2], [3], определяем как свойство равностепенной по N, τ непрерывности $\{y_{N,\tau}(t)\}$ относительно входных данных $\{\varphi_{N,\tau}(t)\}$, $\{y_{N,\tau}(0)\}$ и $\{y_{N,\tau}(\tau)\}$.

Ставится задача: выявить запас информации относительно операторов схемы, достаточный для устойчивости схемы.

Найдены необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойных схем (§ 2) и достаточные условия устойчивости трехслойных схем (§ 3). Эти условия выделяют классы устойчивых схем. Достаточные условия устойчивости имеют простой вид, например

$$(By,\ y)_N \geqslant 0.5\tau(Ay,\ y)_N \text{ для } (0.1), \tag{0.3}$$

$$(Ry,\ y)_N \geqslant 0.25(Ay,\ y)_N \text{ для } (0.2), \tag{0.4}$$

где $(\ ,\ )_N$ — скалярное произведение в H_N.

При изучении устойчивости для конкретных разностных схем, аппроксимирующих уравнения математической физики, необходимо привести схему к каноническому виду (0.1) или (0.2), ввести пространство сеточных функций H_N, проверить принадлежность схемы к ИС-2 или к ИС-3 и, наконец, проверить выполнение достаточных условий (0.3) или (0.4).

Применяемая автором методика вывода априорных оценок основана на использовании элементарных теорем функционального анализа и энергетических неравенств. Она является естественным развитием энергетического метода получения априорных оценок, применявшегося многими авторами при изучении устойчивости конкретных разностных схем для дифференциальных уравнений математической физики, а также для разностных аналогов этих уравнений. Сюда относятся, например, работы [4] — [23] и др. (в этих статьях можно найти ссылки на другие работы).

Мы не имеем возможности останавливаться на обзоре этих работ. Сделаем лишь одно замечание. Общая тенденция развития теории априорных оценок состоит в стремлении получить решение разностной задачи в возможно более сильной норме через правую часть в возможно более слабой норме. Это важно для исследования скорости сходимости схем для уравнений с разрывными коэффициентами, на неравномерных сетках и т. д.

В качестве примера приведем работу [8], где для неявной схемы, аппроксимирующей уравнение типа С. Л. Соболева, автор получил оценку решения y в сеточной норме W_2^1 через $\|\eta\|_{L_2}$, предварительно представив правую часть в дивергентном виде $\varphi = \operatorname{div}_h \eta$, где div_h — разностный аналог оператора div. Эта норма, как следует из § 1, совпадает с нормой $\|\varphi\|_{a^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}$ в энергетическом пространстве $H_{A^{-1}}$ для случая консервативного или дивергентного оператора $A = T^*ST$ при $S = E$ (ср. [10]). Оценки $\|y\|_{W_2^1}$ через $\|\eta\|_{L_2}$ были получены для разностных эллиптических задач в [9]—[10], оценки $\|y\|_{W_2^1}$ и $\|y\|_C$ через $\|\eta\|_{L_2}$ — в [18], оценки $\|y\|_C$ через $\|\eta\|_{L_1}$ — в [24] (для одномерной задачи). В [16] для схем с весами, являющихся разностными аналогами уравнений параболического и гиперболического типов, получены оценки, содержащие правую часть в норме вида $\|A^{-1}\varphi\| + \|A^{-1}\varphi\|$ и т. д. Простейшие априорные оценки для схемы Роте, аппроксимирующей абстрактную задачу Коши, имеются в [25].

Некоторые априорные оценки для операторно-разностных схем в гильбертовом пространстве приводятся в [3], [26].

Основные результаты работы изложены в § 2 и 3; § 1 содержит вспомогательный материал, используемый в § 2 и 3, а также некоторые априорные оценки для операторного уравнения I рода $Ay = \varphi$.

§ 1. Введение

Прежде чем переходить к теории устойчивости эволюционных (двухслойных и трехслойных) схем, введем необходимый математический аппарат и продемонстрируем возможности энергетического метода получения априорных оценок на примере уравнения I рода $Ay = \varphi$, где A — линейный оператор, заданный в вещественном унитарном пространстве. Полученные в пп. 2 и 3 априорные оценки представляют и самостоятельный интерес для теории разностных аппроксимаций краевых задач для эллиптических уравнений.

1. Некоторые неравенства и тождества.

Пусть H_N — вещественное унитарное пространство со скалярным произведением $(\,,\,)_N$ и нормой $\|x\|_N = \sqrt{(x,x)_N}$, A_N — линейный (однородный и аддитивный) оператор, заданный на H_N, где N принимает целые положительные значения. В общем случае $N = (N_1, N_2, \ldots, N_m)$ — составной индекс, т. е. набор целых чисел $N_1, N_2, \ldots, N_m$, $N_s > 0$, где m конечно. Условие $N \to \infty$ означает, что все $N_s \to \infty$, $s = 1, 2, \ldots, m$. Мы будем рассматривать последовательности пространств $\{H_N\}$ и операторов $\{A_N\}$. В тех случаях, когда рассматривается любое N, индекс N опускаем.

Нам понадобятся некоторые элементарные неравенства (x и y — любые векторы из H) [27]—[29]:

1) неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|; \tag{1}$$

2) неравенство Коши — Буняковского

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|; \tag{2}$$

3) обобщенное неравенство Коши — Буняковского

$$(Ax, y)^2 \leqslant (Ax, x)(Ay, y), \tag{3}$$

или

$$|(Ax, y)| \leqslant \|x\|_a \|y\|_a, \quad \|x\|_a = \sqrt{(Ax, x)}, \tag{3'}$$

где A — произвольный неотрицательный ($(Ax, x) \geqslant 0$ или $A \geqslant 0$) самосопряженный оператор;

4) неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \mu_\alpha \leqslant \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \mu_\alpha^2\right)^{1/2}, \tag{4}$$

где λ_α, μ_α — любые неотрицательные числа;

5) ε-неравенство

$$|ab| \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \tag{5}$$

где a, b, $\varepsilon > 0$ — любые числа.

Кроме того, мы будем пользоваться следующими свойствами линейных операторов (см. [27]—[29]).

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно, A — линейный оператор из X в Y. Для того чтобы обратный оператор A^{-1} существовал и был линейным (как оператор из Y в X), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $\delta > 0$, что для всех $x \in X$

$$\|Ax\|_2 \geqslant \delta \|x\|_1. \tag{6}$$

При этом справедлива оценка

$$\|A^{-1}\| \leqslant 1 / \delta. \tag{7}$$

Доказательство этой теоремы см. в [27]—[29].

Все последующие леммы и теоремы относятся к линейным операторам A в вещественном унитарном пространстве H.

Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в [1] (x, y — любые элементы из H, δ и c_* — положительные числа):

A неотрицателен, $A \geqslant 0$, если $(Ax, x) \geqslant 0$;

A положителен, $A > 0$, если $(Ax, x) > 0$ для всех $x \neq 0$;

A положительно определен, $A \geqslant \delta E$, если $(Ax, x) \geqslant \delta \|x\|^2$;

A полуограничен снизу, $A \geqslant -c_* E$, если $(Ax, x) \geqslant -c_* \|x\|^2$;

A самосопряжен, $A^* = A$, если $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Здесь E — единичный оператор.

Формулируем ряд элементарных лемм. Для полноты изложения приводим их доказательства.

Лемма 1.1. *Если A — положительно определенный оператор,*

$$A \geqslant \delta E, \tag{8}$$

то справедливы неравенства

$$\|Ax\|^2 \geqslant \delta (Ax, x), \tag{9}$$

$$\|Ax\| \geqslant \delta \|x\|, \tag{10}$$

$$\|A^{-1}\| \leqslant 1 / \delta. \tag{11}$$

Из (2) и (8) следует: $(Ax, x) \leqslant \|Ax\| \|x\| \leqslant \|Ax\| (1 / \sqrt{\delta}) \sqrt{(Ax, x)}$. После сокращения на $\sqrt{(Ax, x)}$ получаем (9). Неравенство (10) следует из (9) и (8): $\|Ax\|^2 \geqslant \delta (Ax, x) \geqslant \delta^2 \|x\|^2$; неравенство (11) — из (10) и (7).

Таким образом, положительной определенности оператора A достаточно для ограниченности обратного оператора A^{-1}.

Лемма 1.2. *Если $A > 0$ и выполнено условие*

$$\| Ax \|^2 \leqslant \Delta(Ax, x), \qquad \Delta > 0, \text{ для всех } x \in H, \tag{12}$$

то обратный оператор A^{-1} положительно определен

$$A^{-1} \geqslant \frac{1}{\Delta} E. \tag{13}$$

В самом деле, так как $A > 0$, то $A^{-1} > 0$. Обозначая $x = Ay$, $y = A^{-1}x$ и пользуясь условием (12), получим $\|x\|^2 = \|Ay\|^2 \leqslant \Delta(Ay, y) = \Delta(A^{-1}x, x)$, т. е. $A^{-1} \geqslant (1/\Delta)E$. Отсюда в силу леммы 1.1 следует, что $\|A^{-1}x\| \geqslant (1/\Delta)\|x\|$. Сравнивая с (7), находим $\|A\| \leqslant \Delta$. Условие (12) означает ограниченность A.

Лемма 1.3. *Если $A^* = A$ — линейный ограниченный и неотрицательный оператор, то*

$$\|Ax\|^2 \leqslant \|A\| (Ax, x). \tag{14}$$

Доказательство леммы дано в [33].

Лемма 1.4. *Пусть $A^* = A$, $A > 0$. Тогда для любых y и φ из H выполняются неравенства*

$$|(y, \varphi)| \leqslant \|y\|_a \|\varphi\|_{a^{-1}}, \tag{15}$$

$$|(y, \varphi)| \leqslant \varepsilon \|y\|_a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_{a^{-1}}^2, \tag{16}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое число, а

$$\|y\|_a = \sqrt{(Ay, y)}, \qquad \|\varphi\|_{a^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}.$$

В самом деле, $(y, \varphi) = (A^{-1}\varphi, Ay) = (Ay, A^{-1}\varphi)$. Применим неравенство (3′): $|(y, \varphi)| = (Ay, A^{-1}\varphi) \leqslant \|y\|_a \|A^{-1}\varphi\|_a = \|y\|_a \|\varphi\|_{a^{-1}}$, так как $\|A^{-1}\varphi\|_a^2 = (A^{-1}\varphi, \varphi)$. Неравенство (16) следует из (15) и (5).

Лемма 1.5. *Если A — произвольный линейный оператор, то для любых $v, u \in H$ справедливо тождество*

$$(Av, v) + (Au, u) = {}^1/_2(A(v+u), v+u) + {}^1/_2(A(v-u), v-u). \tag{17}$$

В самом деле, $(A(v+u), v+u) + (A(v-u), v-u) = [(Av, v) + (Av, u) + (Au, v) + (Au, u)] + [(Av, v) - (Av, u) - (Au, v) + (Au, u)] = 2[(Av, v) + (Au, u)]$.

Замечание 1. Если $A = A^* > 0$, то (17) можно записать в виде

$$\|v\|_a^2 + \|u\|_a^2 = \frac{1}{2}\|v+u\|_a^2 + \frac{1}{2}\|v-u\|_a^2. \tag{18}$$

Лемма 1.6. *Если $A^* = A$, то*

$$(Av, u) = {}^1/_4(A(v+u), v+u) - {}^1/_4(A(v-u), v-u), \qquad v, u \in H. \tag{19}$$

Лемма доказывается по аналогии с леммой 1.5, если учесть, что $(Au, v) = (Av, u)$.

Лемма 1.7. *Если $A^* = A$, то*

$$(A(v+u), v-u) = (A(v-u), v+u) = (Av, v) - (Au, u). \tag{20}$$

Лемма 1.8. *Если* $A^* = A$, *то*

$$(A(v-u), v) = {}^1/_2[(Av, v) - (Au, u)] + {}^1/_2(A(v-u), v-u). \quad (21)$$

Для доказательства (20) и (21) достаточно написать выражения для $(A(v+u), v-u)$ и, соответственно, для $(A(v-u), v-u)$ и учесть, что $(Au, v) = (Av, u)$.

Лемма 1.9. *Для любого линейного неотрицательного оператора* $(A \geqslant 0)$ *и любых* $u, v \in H$

$$(A(v-u), v-u) \leqslant 2[(Av, v) + (Au, u)]. \quad (22)$$

В самом деле, в силу леммы 1.5 имеем $(A(v-u), v-u) = 2[(Av, v) + (Au, u)] - (A(v+u), v+u) \leqslant 2[(Av, v) + (Au, u)]$, так как $(Ax, x) \geqslant 0$ при любых $x = v - u$.

Замечание 2. Если $A^* = A > 0$, то (22) можно записать в виде

$$\| v - u \|_a^2 \leqslant 2 [\| v \|_a^2 + \| u \|_a^2]. \quad (23)$$

2. Априорные оценки для уравнения $Ay = \varphi$

Рассмотрим последовательность уравнений I рода

$$A_N y_N = \varphi_N, \quad \varphi_N \in H_N, \quad (24)$$

где A_N — линейный оператор, отображающий H_N на H_N.

Задача (24) поставлена корректно (задача (24) корректна) [27], если для любых $N \geqslant N_0$: 1) ее решение существует при всех $\varphi_N \in H_N$, 2) существует такое положительное число M, не зависящее от N, что

$$\|y_N\|_{(1_N)} \leqslant M \|\varphi_N\|_{(2_N)}, \quad (25)$$

где $\|\cdot\|_{(1_N)}$ и $\|\cdot\|_{(2_N)}$ — некоторые нормы на множестве H_N.

В дальнейшем рассматриваются унитарные вещественные пространства H_N (вообще говоря, бесконечномерные) со скалярным произведением $(,)_N$ и нормой $\|x\|_N = \sqrt{(x, x)_N}$. Если $A_N^* = A_N > 0$, то можно ввести на множестве H_N скалярное произведение $(A_N x, y)_N$ и норму $\|x\|_{a_N} = \sqrt{(A_N x, x)_N}$, т. е. рассматривать энергетическое пространство H_{A_N}. Чтобы не усложнять терминологию, будем говорить, что на H_N введены нормы $\|\cdot\|_{(1_N)}$, $\|\cdot\|_{(2_N)}$ и т. д., например $\|x\|_{(1_N)} = \|x\|_N$, $\|x\|_{(2_N)} = \|x\|_{a_N^{-1}}$ и т. д.

Ниже доказывается ряд простых теорем об устойчивости уравнения (24). Предполагается, что все постоянные, фигурирующие в априорных оценках, не зависят от N. Индекс N в дальнейшем всюду будем опускать и вместо (24) и (25) писать

$$Ay = \varphi, \quad (26)$$

$$\|y\|_{(1)} \leqslant M \|\varphi\|_{(2)}. \quad (27)$$

Теорема 1.1. *Если*

$$A = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha, \qquad A_\alpha^* = A_\alpha > 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, m,$$

то для решения уравнения (26) *верна оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \|y\|^2_{a_\alpha} \leqslant \sum_{\alpha=1}^{m} \|\varphi\|^2_{a_\alpha^{-1}}, \tag{28}$$

где φ_α — *произвольные векторы из* H, *удовлетворяющие условию нормировки* $\varphi_1 + \ldots, + \varphi_\alpha + \ldots + \varphi_m = \varphi$,

$$\|y\|^2_{a_\alpha} = (A_\alpha y, y), \qquad \|\varphi\|^2_{a_\alpha^{-1}} = (A_\alpha^{-1} \varphi_\alpha, \varphi_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m. \tag{29}$$

Умножив (26) скалярно на y, получим основное тождество

$$(Ay, y) = (\varphi, y). \tag{30}$$

Подставляя сюда $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_m$ и пользуясь оценкой $|(\varphi_\alpha, y)| \leqslant \leqslant \|y\|_{a_\alpha} \|\varphi_\alpha\|_{a_\alpha^{-1}}$ (лемма 1.4) и затем неравенством (4), получаем (28). Заметим, что из (30) и леммы 1.4 сразу следует оценка $\|y\|_a \leqslant \|\varphi\|_{a^{-1}}$.

Теорема 1.2. *Пусть даны операторы* A *и* $A_0^* = A_0 > 0$. *Если выполнено неравенство*

$$(Ay, y) \geqslant c_1 (A_0 y, y) = c_1 \|y\|_{a_0}^2, \text{ где } c_1 > 0, \tag{31}$$

то для решения уравнения (26) *верна оценка*

$$\|y\|_{a_0} \leqslant \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_{a_0^{-1}}. \tag{32}$$

В самом деле из тождеств (30), (31) и (15) следует

$$c_1 \|y\|_{a_0}^2 \leqslant \|\varphi\|_{a_0^{-1}} \|y\|_{a_0}, \text{ т. е. } c_1 \|y\|_{a_0} \leqslant \|\varphi\|_{a_0^{-1}}.$$

Теорема 1.3. *Пусть* $A = A_0 + A_1$, *где* $A_0^* = A_0 > 0$ *и*

$$|(A_1 x, x)| \leqslant \gamma (A_0 x, x), \qquad 0 < \gamma < 1, \qquad x \in H. \tag{33}$$

Тогда для решения уравнения (26) *справедлива оценка*

$$\|y\|_{a_0} \leqslant \frac{1}{1-\gamma} \|\varphi\|_{a_0^{-1}}. \tag{34}$$

Доказательство. Из тождества $(A_0 y, y) = (\varphi, y) - (A_1 y, y)$, леммы 1.5 и (33) следует $\|y\|_{a_0}^2 \leqslant \|\varphi\|_{a_0^{-1}} \|y\|_{a_0} + \gamma \|y\|_{a_0}^2$ или $(1-\gamma)\|y\|_{a_0} \leqslant \leqslant \|\varphi\|_{a_0^{-1}}$.

Теорема 1.4. *Пусть* $A = A_0 + A_1$, *где* $A_0^* = A_0 > 0$ *и*

$$\|A_1 y\| \leqslant \gamma \|A_0 y\|, \qquad 0 < \gamma < 1, \qquad y \in H. \tag{35}$$

Тогда для (26) *имеет место оценка*

$$\|A_0 y\| \leqslant \frac{1}{1-\gamma} \|\varphi\|. \tag{36}$$

Умножим (26) скалярно на $A_0 y$: $(A_0 y + A_1 y, A_0 y) = (\varphi, A_0 y)$ или $\|A_0 y\|^2 = (\varphi, A_0 y) - (A_1 y, A_0 y)$. Учитывая (2) и (35), находим $\|A_0 y\|^2 \leqslant \leqslant \|\varphi\| \|A_0 y\| + \gamma \|A_0 y\|^2$. Сокращая на $\|A_0 y\|$, получим (36).

Замечание. Из теорем 1.3 и 1.4 следуют априорные оценки в сеточных нормах W_2^1 и W_2^2 решения первой разностной краевой задачи для схемы повышенного порядка точности, аппроксимирующей уравнение Пуассона в p-мерном параллелепипеде ($p < 4$). Эти оценки были получены в [30], [23]. В данном случае $\gamma = (p-1)/3$, где p — число измерений.

3. Консервативные операторы

Пусть H и H_1 — два вещественных унитарных пространства со скалярным произведением $(,)$ и $(,]$ соответственно. Рассмотрим линейные операторы T, S, T^*, где T отображает H на H_1, S отображает H_1 на H_1, T^* отображает H_1 на H. Операторы T и T^* сопряжены друг другу так, что

$$(Ty, v] = (y, T^* v) \qquad \text{для любых } y \in H, \qquad v \in H_1. \tag{37}$$

Операторы вида

$$A = T^* S T, \tag{38}$$

заданные на H, будем называть консервативными (дивергентными) [3]. Оператор A самосопряжен, $(Ay, z) = (y, Az)$, если самосопряжен оператор S,

$$(Sv, w] = (v, Sw], \qquad v, w \in H_1.$$

В самом деле, $(Ay, z) = (T^* S T y, z) = (y, T^* S^* T z)$, $\quad y, z \in H$. Из тождества

$$(Ay, y) = (STy, Ty] \tag{39}$$

видно, что A положительно определен, если

$$(Sv, v] \geqslant c_1 \| v]|^2, \qquad \text{где } \| v]|^2 = (v, v], \qquad v \in H_1, \qquad c_1 > 0; \tag{40}$$

$$\| Ty]| \geqslant c_2 \| y \|, \qquad c_2 > 0. \tag{41}$$

Теорема 1.5. *Если* $S \geqslant c_1 E$ *и существует обратный оператор* $(T^*)^{-1}$, *то для решения уравнения* (26) *с оператором* (38) *справедлива оценка*

$$\| Ty]| \leqslant \frac{1}{c_1} \| (T^*)^{-1} \varphi]| \tag{42}$$

Эта теорема следует из теоремы 1.2, если учесть, что

$$A \geqslant c_1 A_0, \qquad \text{где } A_0 = T^* T, \qquad A_0^* = A_0, \tag{43}$$

и, следовательно,

$$\| y \|_{a_0}^2 = (T^* T y, y) = \| Ty]|^2, \text{ т. е. } \| y \|_{a_0} = \| Ty]|;$$

$$\| \varphi \|^2_{a_0^{-1}} = (A_0^{-1} \varphi, \varphi) = (T^{-1} (T^*)^{-1} \varphi, \varphi) = \| (T^*)^{-1} \varphi]|^2, \text{ т. е. } \| \varphi \|_{a_0^{-1}} = \| (T^*)^{-1} \varphi]|.$$

Рассмотрим случай «многомерного» консервативного оператора

$$A = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{p} T_\alpha^* S_{\alpha\beta} T_\beta, \tag{44}$$

являющегося аналогом разностного эллиптического оператора в пространстве p измерений. Если $S_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} S_{\alpha\alpha}$, то оператор

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} T_\alpha^* S_\alpha T_\alpha, \text{ где } S_\alpha = S_{\alpha\alpha}, \tag{45}$$

можно трактовать как аналог оператора $\operatorname{div}_h(k \operatorname{grad}_h)$, не содержащего смешанных производных. Пусть, H_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, p$) — пространство со скалярным произведением $(,]_\alpha$ и нормой $\| v]|_\alpha = \sqrt{(v, v]_\alpha}$, а T_α, $S_{\alpha\beta}$, T_α^* — линейные операторы, причем T_α действует из H в H_α, $S_{\alpha\beta}$ действует из H_β в H_α, а T_α^* — из H_α в H и выполнено условие

$$(T_\alpha y, v]_\alpha = (y, T_\alpha^* v), \qquad y \in H, \qquad v \in H_\alpha.$$

Условие (40) заменяется условием положительной определенности матрицы-оператора $S = (S_{\alpha\beta})$:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{p} (S_{\alpha\beta} v_\beta, v_\alpha]_\alpha \geqslant c_1 \sum_{\alpha=1}^{p} \| v_\alpha]|_\alpha^2 \text{ для любых } v_\alpha \in H_\alpha. \tag{46}$$

Теорема 1.6. *Если выполнено условие* (46) *и существуют обратные операторы* $(T_\alpha^*)^{-1}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, *то для решения уравнения*

$$Ay = \sum_{\alpha, \beta=1}^{p} T_\alpha^* S_{\alpha\beta} T_\beta y = \varphi, \qquad y, \varphi \in H \tag{47}$$

справедлива априорная оценка

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \| T_\alpha y]|_\alpha^2 \leqslant \frac{1}{c_1} \sum_{\alpha=1}^{p} \| (T_\alpha^*)^{-1} \varphi_\alpha]|_\alpha^2, \tag{48}$$

где φ_α — *произвольные векторы из* H, *удовлетворяющие условию нормировки*

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_\alpha + \ldots + \varphi_p = \varphi.$$

Теорема следует из теоремы 1.2, если учесть доказательство теоремы 1.1 и выбрать

$$A_0 = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \quad A_\alpha = T_\alpha^* T_\alpha, \quad A_\alpha^* = A_\alpha. \tag{49}$$

В самом деле, условие (46) при $v_\alpha = T_\alpha y$ дает

$$(Ay, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{p} (T_\alpha^* S_{\alpha\beta} T_\beta y, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{p} (S_{\alpha\beta} T_\beta y, T_\alpha y]_\alpha \geqslant c_1 \sum_{\alpha=1}^{p} \| T_\alpha y]|_\alpha^2 = c_1 (A_0 y, y.)$$

С другой стороны, имеем

$$(\varphi, y) = (Ay, y),$$

$$(\varphi_\alpha, y) \leqslant \| \varphi_\alpha \|_{a_\alpha^{-1}} \| y \|_{a_\alpha},$$

$$(\varphi, y) = \sum_{\alpha=1}^{p} (\varphi_\alpha, y) \leqslant \sum_{\alpha=1}^{p} \| \varphi_\alpha \|_{a_\alpha^{-1}} \| y \|_{a_\alpha},$$

где

$$\| \varphi_\alpha \|_{a_\alpha^{-1}} = \| (T_\alpha^*)^{-1} \varphi_\alpha]|_\alpha, \quad \| y \|_{a_\alpha} = \| T_\alpha y]|_\alpha.$$

Пользуясь затем неравенством (4), получаем

$$(\varphi,\ y) \leqslant \left[\sum_{\alpha=1}^{p} \| \varphi_\alpha \|^2_{\alpha^{-1}_\alpha}\right]^{1/2} \left[\sum_{\alpha=1}^{p} \| y \|^2_{\alpha_\alpha}\right]^{1/2}.$$

Отсюда и из неравенства

$$c_1 (A_0 y,\ y) = c_1 \sum_{\alpha=1}^{p} \| T_\alpha y] \|_{\alpha}{}^2 \leqslant (Ay,\ y) = (\varphi,\ y)$$

следует оценка (48).

Замечания. 1. Теоремы 1.5—1.6 доказаны без предположения самосопряженности оператора A.

2. Из теорем 1.5—1.6 следуют априорные оценки в норме $W_2{}^1$ для разностных аналогов эллиптических уравнений и систем уравнений.

3. Аналоги теорем 1.5 и 1.6 для самосопряженных эллиптических уравнений были получены в [9], [10], [18].

4. Теоремы 1.5 и 1.6 позволяют оценить скорость сходимости в норме $W_2{}^1$ разностных схем на неравномерных сетках для эллиптических уравнений и систем уравнений.

Чтобы применить теоремы 1.1—1.6 в теории разностных схем, надо предварительно ввести соответствующие пространства сеточных функций (зависящие от структуры A) и изучить свойства оператора A в этих пространствах.

§ 2. Классы устойчивых двухслойных схем

1. Двуслойные схемы

Пусть $\{\mathcal{B}_1{}^N\}$ и $\{\mathcal{B}_2{}^N\}$ — последовательности нормированных линейных пространств; $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0,\ 1, \ldots, j_0\}$ — сетка на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ с шагом $\tau = t_0 / j_0$; $A_N = A_{N,\tau}(t)$, $B_N = B_{N,\tau}(t)$ и т. д. — линейные (аддитивные и однородные) операторы, отображающие $\mathcal{B}_1{}^N$ на $\mathcal{B}_2{}^N$; $y_{N,\tau}(t)$ — абстрактная функция дискретного аргумента $t \in \bar{\omega}_\tau$ со значениями в $\mathcal{B}_1{}^N$; $\varphi_{N,\tau}(t)$ — функция $t \in \bar{\omega}_\tau$ со значениями в $\mathcal{B}_2{}^N$.

Двухслойной схемой мы называем линейное операторное уравнение, связывающее две точки $y_{N,\tau}(t+\tau)$ и $y_{N,\tau}(t)$ пространства $\mathcal{B}_1{}^N$:

$$B(t)\, y(t+\tau) = C(t)\, y(t) + \tau\varphi(t), \qquad t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0 \in \mathcal{B}_1{}^N, \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — заданная функция, $\omega_\tau = \{t_j,\ 0 \leqslant j < j_0\}$.

Зависимость функций y и φ, а также операторов от τ и N не указываем, выделяя лишь зависимость от t. При этом условимся относить операторы к «нижнему слою» $t = t_j$, что удобно для записи схемы в безындексной форме.

Любая двухслойная схема может быть записана в каноническом виде

$$B(t)\, \frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} + A(t)\, y(t) = \varphi(t). \tag{2}$$

В дальнейшем нам понадобятся обозначения

$$t = t_j, \qquad t + \tau = t_{j+1}, \qquad t - \tau = t_{j-1}, \qquad y = y(t_j) = y^j,$$

$$\hat{y} = y(t_{j+1}) = y^{j+1}, \quad \check{y} = y^{j-1}, \qquad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau} = \frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau},$$

$$y_{\bar t} = \frac{y - \check y}{\tau} = \frac{y(t) - y(t-\tau)}{\tau}, \qquad y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{\hat y - \check y}{2\tau} = \frac{1}{2}(y_t + y_{\bar t}),$$

$$y_{\bar t t} = \frac{1}{\tau}(y_t - y_{\bar t}) = \frac{\hat y - 2y + \check y}{\tau^2}, \qquad A = A(t),$$

$$\check A = A(t-\tau), \qquad A_{\bar t} = \frac{A - \check A}{\tau}.$$

Нетрудно заметить, что $y_t = \hat y_t$, $y_{\bar t} = \check y_t$.

Уравнение (2) можно также записать в виде

$$B^j \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + A^j y^j = \varphi^j. \tag{2'}$$

Пользуясь введенными выше обозначениями, вместо (2) и (2′) напишем

$$By_t + Ay = \varphi, \qquad t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0. \tag{3}$$

Определение корректности схемы (3) дано в [1]. Остановимся несколько подробнее на понятии устойчивости. Определение устойчивости относится не к одной конкретной схеме (3) при фиксированных N, τ, а к семейству схем, соответствующих всем возможным N и τ. Таким образом, рассматривается последовательность решений $\{y_{N,\tau}(t)\}$ задач (3), соответствующих входным данным $\{\varphi_{N,\tau}(t)\}$ и $\{y_{N,\tau}(0)\}$. Устойчивость схемы (3) означает равностепенную (по N и τ) непрерывность решения уравнения (3) относительно правой части и начальных данных.

Пусть $\|\cdot\|_{(1_N)}$ и $\|\cdot\|_{(2_N)}$ — нормы в $\mathscr{B}_1{}^N$ и $\mathscr{B}_2{}^N$. Обычно $\mathscr{B}_1{}^N$ и $\mathscr{B}_2{}^N$ состоят из одних и тех же векторов (сеточных функций) и отличаются лишь нормами. Нормы могут зависеть от t, так что $\|\cdot\|_{(1)} = \|\cdot\|_{(1,t)}$, $\|\cdot\|_{(2)} = \|\cdot\|_{(2,t)}$ и т. д. (индекс N опускаем).

Схема (3) называется устойчивой [2], [1], если существуют такие числа $N_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ и не зависящие от τ и N числа $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $M_2' \geqslant 0$, что при $\tau \leqslant \tau_0$ и $N \geqslant N_0$ для решения задачи (3) выполняется неравенство

$$\|y(t+\tau)\|_{(1,t)} \leqslant M_1 \|y(0)\|_{(1,0)} + M_2 \max_{0 \leqslant t' \leqslant t} \|\varphi(t')\|_{(2,t')} + \\ + M_2' \max_{0 < t' \leqslant t} \|\varphi_{\bar t}(t')\|_{(2,t')}. \tag{4}$$

Мы не стремимся дать максимально общее определение устойчивости и приводим его в той форме, в которой оно используется в данной статье.

Примерами норм, зависящих от t, могут служить энергетические нормы, связанные с операторами схемы (3) (см. п. 4):

$$\|y(t+\tau)\|_{(1,t)} = \|y(t+\tau)\|_{a(t)} = \sqrt{(A(t)y(t+\tau),\ y(t+\tau))},$$

$$\|y(t+\tau)\|_{(1,t)} = \|y(t+\tau)\|_{b(t)},$$

или

$$\|y^{j+1}\|_{a_j} = \|\hat y\|_a = \sqrt{(A\hat y, \hat y)}, \qquad \|y^{j+1}\|_{b_j} = \|\hat y\|_b = \sqrt{(B\hat y, \hat y)}.$$

Имея в виду зависимость $\|\cdot\|_{(1)}$ от t, мы иногда не будем ее указывать, а будем писать вместо $\|y^{j+1}\|_{a_j}$ просто $\|y^{j+1}\|_a = \|\hat y\|_a$, если это не вызовет недоразумений.

Изучение устойчивости по начальным данным и по правой части удобно проводить отдельно, т. е. рассматривать задачи

$$By_t + Ay = 0, \qquad t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0; \tag{3а}$$

$$By_t + Ay = \varphi, \qquad t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = 0. \tag{3б}$$

Решение задачи (3) представим в виде суммы $y = \tilde{y} + \bar{y}$, где $\tilde{y}$ — решение задачи (3а), а $\bar{y}$ — решение задачи (3б). В силу неравенства треугольника

$$\|y\|_{(1)} \leqslant \|\tilde{y}\|_{(1)} + \|\bar{y}\|_{(1)}. \tag{5}$$

Поэтому из устойчивости задач (3а) и (3б) следует устойчивость (3). Схема (3) устойчива по начальным данным, если для решения задачи (3а) верна оценка

$$\|y(t+\tau)\|_{(1,\,t)} \leqslant M_1 \|y(0)\|_{(1,\,0)}; \tag{6}$$

устойчива по правой части, если для (3б) верна оценка

$$\|y(t+\tau)\|_{(1,\,t)} \leqslant M_2 \max_{0 \leqslant t' \leqslant t} \|\varphi(t')\|_{(2,\,t')} + M_2' \max_{0 < t' \leqslant t} \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_{(2,\,t')}. \tag{7}$$

Если схема (3) устойчива по начальным данным на любом отрезке $[t' = j'\tau,\ t + \tau = (j+1)\tau]$, т. е.

$$\|y(t+\tau)\|_{(1,\,t)} \leqslant M_1 \|y(t')\|_{(1,\,t')}, \qquad t \geqslant t' \geqslant 0, \tag{8}$$

то она устойчива по правой части [2], так что для решения задачи (3б) верна оценка

$$\|y(t+\tau)\|_{(1,\,t)} \leqslant M_1 \sum_{t'=0}^{t} \tau \|\varphi(t')\|_{(2,\,t')} \tag{9}$$

при условии, что нормы $\|\cdot\|_{(2)}$ и $\|\cdot\|_{(1)}$ согласованы следующим образом:

$$\|\varphi(t)\|_{(2,\,t)} = \|B^{-1}(t)\varphi(t)\|_{(1,\,t)}. \tag{10}$$

Доказательство этого утверждения проведем методом суперпозиции (методом Дюамеля). Пусть $Y(t, t') = Y^{j,\,j'}$ — решение задачи

$$\frac{1}{\tau} B(t)[Y(t+\tau, t') - Y(t, t')] + A(t)Y(t, t') = 0 \text{ при } t' < t; \tag{11}$$

$$Y(t', t') = 0, \qquad B(t')Y(t'+\tau, t') = \varphi(t'), \tag{12}$$

т. е. $Y(t'+\tau,\ t') = B^{-1}(t')\varphi(t')$. Тогда решение задачи (3б) можно представить в виде

$$y(t) = \sum_{t'=0}^{t-\tau} \tau Y(t, t'). \tag{13}$$

В этом можно убедиться, если подставить (13) в (3) и учесть (11) и (12). В силу условия (8) имеем

$$\|Y(t+\tau, t')\|_{(1,\,t)} \leqslant M_1 \|Y(t'+\tau,\ t')\|_{(1,\,t')} = M_1 \|B^{-1}(t')\varphi(t')\|_{(1,\,t')} = \\ = M_1 \|\varphi(t')\|_{(2,\,t')}.$$

Пользуясь неравенством треугольника, получаем

$$\|y(t+\tau)\|_{(1,t)} \leqslant \sum_{t'=0}^{t} \|Y(t+\tau, t')\|_{(1,t)} \leqslant M_1 \sum_{t'=0}^{t} \tau \|\varphi(t')\|_{(2,t')}.$$

Условие согласования норм (10) ограничивает область применимости доказанной теоремы, поскольку для теории разностных схем важно оценить y в возможно более сильной норме через правую часть в возможно более слабой норме.

Основной задачей теории является формулировка достаточных условий устойчивости разностных схем.

Если B^{-1} существует, то из (1) следует, что

$$\hat{y} = B^{-1}Cy + \tau B^{-1}\varphi.$$

Отсюда видно, что схема (3) устойчива, если существует B^{-1} и

$$\|B^{-1}C\| \leqslant 1 + c_1\tau, \tag{14}$$

где $c_1 = \text{const} > 0$ не зависит от τ и N. При этом справедливы оценки (8) и (9).

Условие (14) означает, что $B^{-1}C$ равномерно по N, τ ограничен по норме числом $1 + c_1\tau$. В общем случае B и C (B и A) — неограниченные или неравномерно по N, τ ограниченные операторы. Какими свойствами должны обладать операторы B и C для выполнения этого условия? Ответ на этот вопрос удается получить в удобной для проверки форме, рассматривая схемы (3) в вещественном унитарном пространстве H.

2. Исходное семейство схем

Пусть H_N — линейная вещественная система, $A_N = A_{N,\tau}(t)$, $B_N = B_{N,\tau}(t)$, $C_N = C_{N,\tau}(t)$ и т. д.— линейные операторы, при каждом $t \in \omega_\tau$ отображающие H_N на H_N. На линейной системе H_N будем вводить скалярные произведения и нормы (индекс N всюду опускаем):

$$(y, v) \text{ и } \|y\| = \sqrt{(y, y)},$$

$$(y, v)_{a(t)} = (A(t)y, v) \text{ и } \|y(t+\tau)\|_{a(t)} = \sqrt{(y(t+\tau), y(t+\tau))_{a(t)}},$$

$$(y, v)_{b(t)} = (B(t)y, v) \text{ и } \|y(t+\tau)\|_{b(t)} = \sqrt{(y(t+\tau), y(t+\tau))_{b(t)}} \text{ и т. д.},$$

где $A(t)$, $B(t)$ — самосопряженные положительные операторы. Для оценки правой части $\varphi(t)$ будут использованы нормы $\|\varphi(t)\|_{(2)} = \|\varphi(t)\|$, $\|\varphi(t)\|_{(2)} = \|B^{-1}(t)\varphi(t)\|$, $\|\varphi(t)\|_{(2)} = \|\varphi(t)\|_{a^{-1}(t)} = \sqrt{(A^{-1}(t)\varphi(t), \varphi(t))}$ и т. д.

Будем рассматривать то же исходное семейство двухслойных схем (ИС-2), что и в [1], предполагая выполненными условия:

1) $A = A(t)$ самосопряжен, положителен и липшиц-непрерывен по t:

$$A^*(t) = A(t) > 0, \tag{15}$$

$$(A_{\bar{t}}y, y)| \leqslant c_2(\check{A}y, y) \quad \text{или} \quad (Ay, y) \leqslant (1 + c_2\tau)(\check{A}y, y), \ \check{A} = A(t-\tau), \tag{16}$$

$c_2 = \text{const} > 0$ не зависит от τ и N;

2) $B = B(t)$ положителен, $B(t) > 0$.

Отметим, что самосопряженности оператора $B(t)$ не требуется. Условие $B(t) > 0$ обеспечивает разрешимость схемы (3), так как при $B > 0$ существует обратный оператор B^{-1}.

3. Энергетические тождества и неравенства

Пользуясь очевидным тождеством

$$y = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) - \frac{1}{2}(\hat{y} - y) = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{2} y_t, \tag{17}$$

перепишем уравнение (3) в виде

$$(B - 0.5\tau A) y_t + 0.5A(\hat{y} + y) = \varphi. \tag{18}$$

Умножим (18) скалярно на $2\tau y_t = \hat{2}(y - y)$:

$$2\tau((B - 0.5\tau A) y_t, y_t) + (A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = 2\tau(\varphi, y_t). \tag{19}$$

Так как A — самосопряженный оператор, то, в силу леммы 1.7,

$$(A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y).$$

После подстановки этого выражения в (9) получаем основное энергетическое тождество для двухслойной схемы:

$$2\tau((B - 0.5\tau A) y_t, y_t) + (A\hat{y}, \hat{y}) = (Ay, y) + 2\tau(\varphi, y_t). \tag{20}$$

Учитывая, что $A = \check{A} + (A - \check{A}) = \check{A} + \tau A_{\bar{t}}$, перепишем (20) в виде

$$2\tau((B - 0{,}5\tau A) y_t, y_t) + \hat{\mathscr{E}} = \mathscr{E} + \tau(A_{\bar{t}} y, y) + 2\tau(\varphi, y_t), \tag{21}$$

где

$$\hat{\mathscr{E}} = \mathscr{E}(t + \tau) = (A\hat{y}, \hat{y}), \qquad \mathscr{E} = \mathscr{E}(t) = (\check{A}y, y), \tag{22}$$

$\hat{\mathscr{E}}$ — «энергия» оператора A. Пользуясь условием (16), получим энергетическое неравенство

$$2\tau((B - 0.5\tau A) y_t, y_t) + \hat{\mathscr{E}} \leqslant (1 + c_2\tau)\mathscr{E} + 2\tau(\varphi, y_t). \tag{23}$$

При изучении устойчивости схемы (3) мы будем исходить из энергетического тождества (21). В зависимости от условий на B и A слагаемое $2\tau(\varphi, y_t)$ оценивается различными способами. Укажем некоторые из них (см. лемму 1.4):

$$2\tau|(\varphi, y_t)| \leqslant 2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2, \tag{24}$$

$$2\tau|(\varphi, y_t)| \leqslant 2\tau\varepsilon(By_t, y_t) + \frac{\tau}{2\varepsilon}(B^{-1}\varphi, \varphi) \quad \text{при } B^* = B, \tag{25}$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$ — любое число.

Нам понадобится

Лемма 2.1. *Если* $A^*(t) = A(t) > 0$, *то при любых* $v(t)$, $\varphi(t) \in H$ *имеет место неравенство*

$$2\tau(\varphi, v_t) = 2\tau(\varphi, \hat{v}_{\bar{t}}) \leqslant 2\tau(\varphi, \hat{v})_{\bar{t}} + \tau\varepsilon(Av, v) + \frac{\tau}{\varepsilon}(A^{-1}\varphi_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}). \quad (26)$$

Воспользуемся тождеством

$$2\tau(\varphi, \hat{v}_{\bar{t}}) = 2\tau(\varphi, \hat{v})_{\bar{t}} - 2\tau(\varphi_{\bar{t}}, v), \quad (27)$$

в справедливости которого легко убедиться непосредственно:

$$2\tau(\varphi, \hat{v})_{\bar{t}} - 2\tau(\varphi_{\bar{t}}, v) = 2(\varphi, \hat{v}) - 2(\check{\varphi}, v) - 2(\varphi - \check{\varphi}, v) =$$
$$= 2(\varphi, \hat{v} - v) = 2\tau(\varphi, v_t).$$

Применяя для оценки $2\tau|(\varphi_{\bar{t}}, v)|$ лемму 1.4, получаем (26). В частности, при $v = y$ имеем

$$2\tau(\varphi, y_t) \leqslant 2(\varphi, \hat{y}) - 2(\check{\varphi}, y) + 2\tau\varepsilon(Ay, y) + \frac{\tau}{2\varepsilon}(A^{-1}\varphi_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}). \quad (28)$$

Подставляя в (21) оценки (24)—(26), (28), получим различные энергетические неравенства.

Для решения неравенств будем пользоваться разностным аналогом леммы Гронуола.

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathscr{E}(t)$ *и* $f(t)$ — *две неотрицательные функции, определенные на сетке* $\{t_j = j\tau,\ j = s, s+1, \ldots, j_0,\ s = 0, 1\}$, *и выполнено неравенство*

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant c_0 \sum_{t'=(s+1)\tau}^{t} \tau\mathscr{E}(t') + f(t), \qquad c_0 > 0, \qquad t = s\tau, (s+1)\tau, \ldots.$$

Если $f(t)$ — *неубывающая функция* $(f(t+\tau) \geqslant f(t))$, *то*

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant e^{c_0 t} f(t).$$

Если $f(t)$ — *произвольная неотрицательная функция, то*

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant f(t) + c_0 e^{c_0 t} \sum_{t'=st}^{t} \tau f(t').$$

Лемма 2.3. *Если* $f(t) \geqslant 0$ *и* $\mathscr{E}(s\tau) = 0$, *то из неравенства*

$$\mathscr{E}(t'+\tau) \leqslant (1 + c_0\tau)\mathscr{E}(t') + \tau f(t'), \qquad t' = s\tau, (s+1)\tau, \ldots,$$

следует оценка

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant e^{c_0 t} \sum_{t'=s\tau}^{t} \tau f(t').$$

Доказательство лемм 2.2 и 2.3 см., например, в [11], [16].

4. Достаточные условия устойчивости и априорные оценки

Теорема 2.1. *Если выполнено условие*

$$B \geqslant 0.5\tau(1 - c_1\tau)A, \tag{29}$$

где $c_1 = \text{const} > 0$ *не зависит от* τ *и* N, *то схема* (3) *устойчива при*

$$\tau \leqslant \tau_0, \quad \tau_0 < {}^1/_4 c_1$$

и для решения задачи (3) *справедлива оценка*

$$\|y(t+\tau)\|_{a(t)} \leqslant M_1\|y(0)\|_{a(0)} + M_2 \max_{0\leqslant t'\leqslant t} \|\varphi(t')\|_{a^{-1}(t')} + \tag{30}$$
$$+ M_2' \max_{0<t'\leqslant t} \|\varphi_{\bar t}(t')\|_{a^{-1}(t')}$$

где M_1, M_2, M_2' — *положительные постоянные, зависящие только от* c_1, c_2, t_0.

Доказательство. Обратимся к тождеству (21). Условие (29) и лемма 1.7 дают

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) \geqslant -c_1\tau^3(Ay_t, y_t) \geqslant -2c_1\tau[(A\hat y, \hat y) + (Ay, y)].$$

Подставим эту оценку в (21):

$$(1 - 2c_1\tau)(A\hat y, \hat y) \leqslant (1 + 2c_1\tau)(Ay, y) + 2\tau(\varphi, y_t). \tag{31}$$

1. Устойчивость по начальным данным. Полагая $\varphi = 0$ и учитывая, что $4c_1\tau < 1$, получим для задачи (3_a) неравенства

$$(1 - 2c_1\tau)\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant (1 + 2c_1\tau)(1 + c_2\tau)\mathscr{E}(t) < (1 + 2(c_1 + c_2)\tau)\mathscr{E}(t),$$
$$\mathscr{E}(t+\tau) < (1 + 4(c_1 + c_2)\tau)\mathscr{E}(t) \quad \text{при } t > 0, \tag{32}$$
$$\mathscr{E}(\tau) < (1 + 4(c_1 + c_2)\tau)\|y(0)\|^2_{a(0)} \quad \text{при } t = 0.$$

Отсюда находим $\mathscr{E}(t+\tau) < \exp[4(c_1 + c_2)t]\,\|y(0)\|^2_{a(0)}$, т. е.

$$\|y(t+\tau)\|_{a(t)} \leqslant M_1\|y(0)\|_{a(0)}, \text{ где } M_1 = \exp[2(c_1 + c_2)t_0]. \tag{33}$$

2. Устойчивость по правой части. Для решения задачи (3_a) вместо (32) получим неравенство

$$(1 - 2c_1\tau)(A(0)y(\tau), y(\tau)) \leqslant 2(\varphi(0), y(\tau)). \tag{34}$$

Подставим в (31) оценку (26):

$$(1 - 2c_1\tau)(A\hat y, \hat y) \leqslant (1 + 2(c_1 + \varepsilon)\tau)(Ay, y) + 2(\varphi, \hat y) -$$
$$- 2(\check\varphi, y) + \frac{\tau}{2\varepsilon}(A^{-1}\varphi_{\bar t}, \varphi_{\bar t}).$$

Учитывая затем липшиц-непрерывность $A(t)$ и выбирая ε так, что $2(c_1 + \varepsilon)\tau < 1$, получаем

$$(1 - 2c_1\tau)\mathscr{E}(t' + \tau) \leqslant (1 + 2(c_1 + c_2 + \varepsilon)\tau)\mathscr{E}(t') + \tag{35}$$
$$+ 2(\varphi(t'), y(t' + \tau)) - 2(\varphi(t' - \tau), y(t')) + \frac{\tau}{2\varepsilon}(A^{-1}\varphi_{\bar t}(t'), \varphi_{\bar t}(t')),$$

так как $(1+2(c_1+\varepsilon)\tau)(1+c_2\tau) = 1+[2(c_1+\varepsilon)+c_2]\tau + 2(c_1+\varepsilon)\tau c_2\tau < 1+2(c_1+c_2+\varepsilon)\tau$ при $2(c_1+\varepsilon)\tau < 1$.

Просуммируем (35) по $t' = \tau, 2\tau, \ldots, t$, учтем (34) и воспользуемся леммой 1.4:

$$2(\varphi, \hat{y}) \leqslant \varepsilon_1 \hat{\mathscr{E}} + \frac{1}{\varepsilon_1}(A^{-1}\varphi, \varphi).$$

Выбирая $\varepsilon_1 = 1/4$, приходим к неравенству

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant c_0 \sum_{t'=\tau}^{t} \tau \mathscr{E}(t') + \Phi(t), \qquad t \geqslant 0,$$

где

$$\Phi(t) = 4(A^{-1}\varphi, \varphi) + \frac{2\tau}{\varepsilon}\sum_{t'=\tau}^{t}(A^{-1}(t')\varphi(t'), \varphi(t')),$$

$$c_0 = 4(2c_1 + c_2 + \varepsilon).$$

Применив теперь лемму 2.2 и выбрав ε так, чтобы $2(c_1+\varepsilon)\tau < 1$, найдем

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant \Phi(t) + c_0 e^{c_0 t} \sum_{t'=0}^{t} \tau \Phi(t').$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\|y(t+\tau)\|_{a(t)} \leqslant M_2 \max_{0<t'\leqslant t} \|\varphi(t')\|_{a^{-1}(t')} + M_2' \max_{0<t'\leqslant t} \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_{a^{-1}(t')}, \tag{36}$$

где $y = \bar{y}$ — решение задачи ($3_б$). Из (33) и (36) в силу (5) следует оценка (30). Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Если выполнено условие*

$$B \geqslant \varepsilon E + 0.5\tau A, \qquad \varepsilon > 0, \tag{37}$$

то для решения задачи (3) *справедлива априорная оценка*

$$\|y(t+\tau)\|_{a(t)} \leqslant M_1 \left[\|y(0)\|_{a(0)} + \frac{1}{\sqrt{(2\varepsilon)}}\left(\sum_{t'=0}^{t} \tau \|\varphi(t')\|^2\right)^{1/2}\right]. \tag{38}$$

Доказательство 1. При $\varphi = 0$ неравенство (23) дает

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant (1+c_2\tau)\mathscr{E}(t) \quad \text{при } t > 0,$$

$$\mathscr{E}(\tau) \leqslant (1+c_2\tau)\|y(0)\|^2_{a(0)} \quad \text{при } t = 0.$$

Отсюда следует $\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant e^{c_2 t}\mathscr{E}(\tau) \leqslant e^{c_2 t_0}\|y(0)\|^2_{a(0)}$, т. е.

$$\|y(t+\tau)\|_{a(t)} \leqslant M_1\|y(0)\|_{a(0)}, \qquad \text{где } M_1 = \exp(0.5c_2 t_0). \tag{39}$$

2. При $y(0) = 0$ имеем

$$2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \mathscr{E}(t+\tau) \leqslant (1+c_2\tau)\mathscr{E}(t) + 2\tau(\varphi, y_t),$$

$$\frac{2\varepsilon}{\tau}\|y(\tau)\|^2 + \mathscr{E}(\tau) \leqslant 2(\varphi(0), y(\tau)).$$

Подставим в эти неравенства оценку (24) и получим

$$\mathscr{E}(t'+\tau) \leqslant (1+c_2\tau)\mathscr{E}(t') + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi(t')\|^2 \quad \text{при } t' > 0,$$

$$\mathscr{E}(\tau) \leqslant \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi(0)\|^2 \quad \text{при } t' = 0.$$

Суммируя по $t' = \tau, 2\tau, \ldots, t$ и пользуясь леммой 2.2, находим

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant \frac{1}{2\varepsilon} M_1^2 \sum_{t'=0}^{t} \|\varphi(t')\|^2. \tag{40}$$

Из (39) и (40) следует (38).

Замечания. 1. Может оказаться, что схема (3) принадлежит ИС-2 при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0'$ и достаточно большом $N \geqslant N_0'$. Тогда теорема 2.1 верна при $\tau \leqslant \tau_0^*$ и $N \geqslant N_0'$, где $\tau_0^* = \min(\tau_0, \tau_0')$, а теорема 2.2 — при $\tau \leqslant \tau_0'$ и $N \geqslant N_0'$ Чтобы не усложнять формулировки, мы будем предполагать, что принадлежность схемы (3) исходному семейству ИС-2 имеет место при любых τ и N. Это не является ограничением общности, если иметь в виду сказанное выше.

2. Теорема 2.2 сохраняет силу, если $A = A_0 + A_1$, где $A_0(t)$ удовлетворяет (15) и (16), а $A_1(t)$ — несамосопряженный оператор, подчиненный $A_0(t)$:

$$\| A_1(t) y \| \leqslant c_3 \| y \|_{a_0(t)},$$

где $c_3 = \text{const} > 0$ не зависит от τ и N. При этом в (38) вместо $\| y \|_a$ будет стоять $\| y \|_{a_0}$.

Условие (29) выделяет из ИС-2 класс K_0 устойчивых схем. Схемы, удовлетворяющие условию (37), очевидно, принадлежат K_0.

5. О необходимых условиях устойчивости

Нами найдено достаточное условие устойчивости (29) схемы (3) из ИС-2. Рассмотрим вопрос о необходимом условии устойчивости по начальным данным в норме $\|y\|_{(1)} = \|y\|_a$. Выделим из ИС-2 класс схем K_1, удовлетворяющих дополнительным требованиям: B — самосопряженный оператор, $B^* = B$, A и B не зависят от t.

Теорема 2.3. *Для устойчивости любой схемы* (3) *из класса* K_1 *по начальным данным необходимо, чтобы выполнялось условие* (29).

Доказательство. Пусть схема (3) из K_1 устойчива по начальным данным, т. е. существует такое число $M_1 > 0$, не зависящее от τ и N, что для решения задачи (3_a) выполнено неравенство $\|y(t)\|_a \leqslant M_1 \|y_0\|_a$ для всех $t \in \omega_\tau$ и, в частности,

$$\|y(t_0)\|_a \leqslant M_1 \|y_0\|_a \qquad (t_0 = j_0\tau). \tag{41}$$

Так как оператор A положителен и самосопряжен, то существует оператор $A^{1/2} = (A^{1/2})^* > 0$. Перепишем теперь схему (3_a) в виде $A^{1/2}\hat{y} = (E - \tau A^{1/2}B^{-1}A^{1/2})A^{1/2}y$ и обозначим

$$x = A^{1/2}y, \qquad \hat{x} = A^{1/2}\hat{y}, \qquad C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}. \tag{42}$$

Тогда схема (3_a) преобразуется в явную схему

$$x_t + Cx = 0, \text{ или } \hat{x} = (E - \tau C)x, \qquad x(0) = x_0, \qquad x_0 = A^{1/2}y_0. \quad (43)$$

Неравенство (41) принимает вид

$$\|x(t_0)\| \leqslant M_1\|x_0\|, \text{ так как } \|x\| = \|y\|_a. \quad (44)$$

Пользуясь затем уравнением $\hat{x} = (E - \tau C)x$, найдем $x(t_0) = (E - \tau C)^{j_0}x_0$, $\|x(t_0)\| = \|(E - \tau C)^{j_0}x_0\|$. Отсюда и из (44) следует

$$\|(E - \tau C)^{j_0}\| = \|E - \tau C\|^{j_0} \leqslant M_1, \text{ т. е. } \|E - \tau C\| \leqslant M_1^{1/j_0} = M_1^{\tau/t_0}.$$

Для любого M_1 можно указать такое число $c_1 > 0$, не зависящее от τ и N, что будет выполнено неравенство $M_1^{\tau/t_0} \leqslant 1 + 2c_1\tau$. Для этого достаточно положить, например, $c_1 = (1/2t_0)M_1 \ln M_1$. Таким образом, из (44) следует оценка

$$\|E - \tau C\| \leqslant 1 + 2c_1\tau. \quad (45)$$

В силу известной теоремы функционального анализа [28], $\|E - \tau C\| = \max_{\|x\|} |((E - \tau C)x, x)|$ при $\|x\| = 1$, так как $E - \tau C = (E - \tau C)^*$. Поэтому $|((E - \tau C)x, x)| \leqslant (1 + 2c_1\tau\|x\|^2$, т. е.

$$-(1 + 2c_1\tau)E \leqslant E - \tau C \leqslant (1 + 2c_1\tau)E. \quad (46)$$

Отсюда находим $E \geqslant 0.5\tau C / (1 + c_1\tau)$. Так как $C^* = C$, то $C^{-t} \geqslant 0.5\tau E / (1 + c_1\tau)$, или

$$(C^{-1}x, x) \geqslant \frac{0.5\tau}{1 + c_1\tau}\|x\|^2.$$

Подставляя сюда (42), получим

$$(By, y) \geqslant \frac{0.5\tau}{1 + c_1\tau}(Ay, y) \geqslant 0.5\tau(1 - c_1\tau)(Ay, y),$$

т. е. условие (29) выполнено. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь класс схем K_2 (см. п. 6), который выделяется из ИС-2 дополнительным требованием $B(t) = B^*(t)$. Для схем из K_2 имеет место следующее утверждение (оно доказывается тем же методом, что и теорема 2.3):

пусть схема (3) из K_2 устойчива по начальным данным. Тогда найдутся такие векторы $y \in H$, для которых выполнено условие

$$(By, y) \geqslant 0.5\tau(1 - c_1\tau^\gamma)(Ay, y), \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1, \qquad c_1 > 0, \quad (46')$$

где c_1 и γ не зависят от τ и N.

Из этого утверждения следует, что условие

$$(Bx, x) \leqslant 0.5\tau(1 - c_1\tau^{\gamma})(Ax, x) \text{ для всех } x \in H \tag{47}$$

достаточно для неустойчивости схемы (3) из K_2.

Отметим, что условие (46′), выполненное для всех $y \in H$, при $\gamma = 1$ совпадает с достаточным условием устойчивости (29).

6. Случай самосопряженного оператора $B(t)$

При определении исходного семейства ИС-2 мы не предполагали самосопряженности и непрерывности по t оператора $B(t)$.

Рассмотрим теперь другое исходное семейство ИС-2* схем (3), определяемое требованиями:

1) $B^*(t) = B(t) > 0$;

2) $B(t)$ липшиц-непрерывен по t с постоянной c_2,

$$|(B_{\bar{t}}\, y, y)| \leqslant c_2 (\check{B}y, y); \tag{48}$$

3) $A^*(t) = A(t) \geqslant 0$.

При этом мы не требуем непрерывности $A(t)$ по t.

Для схем, принадлежащих ИС-2*, можно получить априорные оценки в норме

$$\| y(t+\tau) \|_{(A,\, t)} = \| y(t+\tau) \|_{b(t)} = \sqrt{(B(t)\, y(t+\tau), y(t+\tau))}.$$

Выведем сначала энергетическое тождество. Для этого умножим уравнение (3) скалярно на $2\tau\hat{y}$:

$$2\tau(By_t, \hat{y}) + 2\tau(Ay, \hat{y}) = 2\tau(\varphi, \hat{y}). \tag{49}$$

Применяя лемму 1.7 при $v = {}^1/_2(\hat{y} + y)$, $u = {}^1/_2(\hat{y} - y)$ и лемму 1.8 при $v = \hat{y}$, $u = y$, находим

$$(Ay, \hat{y}) = {}^1/_4(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) - {}^1/_4(A(\hat{y} - y), \hat{y} - y) = \tag{50}$$
$$= \frac{1}{4}\| \hat{y} + y \|_a^2 - \frac{\tau^2}{4}\| y_t \|_a^2,$$

$$2\tau(By_t, \hat{y}) = \tau(B\hat{y}, \hat{y})_{\bar{t}} + \tau^2(By_t, y_t) - \tau(B_{\bar{t}}\, y, y). \tag{51}$$

Подставив (50) и (51) в (49), получим энергетическое тождество

$$(B\hat{y}, \hat{y}) + \tau^2\left[(By_t, y_t) - \frac{\tau}{2}(Ay_t, y_t)\right] + \frac{\tau}{2}(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) = \tag{52}$$
$$= (\check{B}y, y) + \tau(B_{\bar{t}}\, y, y) + 2\tau(\varphi, \hat{y}).$$

Отсюда видно, что выражение в квадратных скобках неотрицательно при

$$B \geqslant \frac{\tau}{2} A. \tag{53}$$

При этом условии из тождества (52) следует неравенство

$$\|\hat{y}\|_b^2 + \frac{\tau}{2}\|\hat{y} + y\|_a^2 \leqslant (1 + c_2\tau)\|y\|_{\check{b}}^2 + 2\tau(\varphi, \hat{y}), \tag{54}$$

если учесть, что $(By, y) = (\check{B}y, y) + \tau(B_{\bar{t}}y, y) \leqslant (1 + \tau c_2)(\check{B}y, y) = (1 + \tau c_2)\|y\|_{\check{b}}^2$ в силу условия (48). Перепишем (54) в виде

$$\mathscr{E}(t + \tau) + \frac{1}{2}\tau\|y(t + \tau) + y(t)\|_{a(t)}^2 \leqslant (1 + c_2\tau)\mathscr{E}(t) + 2\tau(\varphi, \hat{y}), \quad t > 0, \tag{55}$$

где

$$\mathscr{E}(t + \tau) = \|y(t + \tau)\|_{b(t)}^2 = \|\hat{y}\|_b^2. \tag{56}$$

Теорема 2.4. *Если схема* (3) *из* ИС-2* *удовлетворяет условию* (53), *то для решения задачи* (3) *имеет место априорная оценка*

$$\|y(t + \tau)\|_{b(t)} \leqslant M_1\|y(0)\|_{b(0)} + M_2\left[\sum_{t'=0}^{t}\tau\|\varphi(t')\|_{b^{-1}(t')}^2\right]^{1/2}, \tag{57}$$

где $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ *зависят только от* c_2 *и* t_0, $\|\varphi\|_{b^{-1}}^2 = (B^{-1}\varphi, \varphi)$.

Доказательство. Так как $A \geqslant 0$, то из (55) следует

$$\mathscr{E}(t + \tau) \leqslant (1 + c_2\tau)\mathscr{E}(t) + 2\tau(\varphi(t), y(t + \tau)) \quad \text{при } t > 0. \tag{58}$$

1. Устойчивость по начальным данным. Если $\varphi = 0$, то $\mathscr{E}(t + \tau) \leqslant (1 + c_2\tau)\mathscr{E}(t) \leqslant e^{c_2 t}\mathscr{E}(\tau) \leqslant e^{c_2 t_0}\|y(0)\|_{b(0)}^2$, так как $\mathscr{E}(\tau) \leqslant \|y(0)\|_{b(0)}^2$. Отсюда следует для (3а) оценка

$$\|y(t + \tau)\|_{b(t)} \leqslant M_1\|y(0)\|_{b(0)}, \quad \text{где } M_1 = \exp(0.5c_2t_0). \tag{59}$$

2. Устойчивость по правой части. Пусть $y(0) = 0$. Тогда уравнение (3) при $t = \tau$ примет вид

$$By(\tau) = \tau\varphi(0).$$

Умножая его на $y(\tau)$, получим

$$\mathscr{E}(\tau) = \tau(\varphi(0), y(\tau)).$$

Подставив в (58) оценку $2\tau(\varphi, \hat{y}) \leqslant \tau\varepsilon(B\hat{y}, \hat{y}) + \frac{\tau}{\varepsilon}(B^{-1}\varphi, \varphi)$, получим

$$(1 - \tau\varepsilon)\mathscr{E}(t' + \tau) \leqslant (1 + \tau c_2)\mathscr{E}(t') + \frac{1}{\varepsilon}\tau\|\varphi(t')\|_{b^{-1}(t')}^2 \text{ при } t' > 0,$$

$$(1 - \tau\varepsilon)\mathscr{E}(\tau) \leqslant \frac{\tau}{4\varepsilon}\|\varphi(0)\|_{b^{-1}(0)}^2 \qquad \text{при } t' = 0,$$

где $0 < \varepsilon < 1/\tau$.

Отсюда суммированием по $t' = 0, \tau, \ldots, t$ находим

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant \frac{c_2+\varepsilon}{1-\varepsilon\tau} \sum_{t'=\tau}^{t} \tau \mathscr{E}(t') + \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon\tau)} \sum_{t'=0}^{t} \tau \|\varphi(t')\|^2_{b^{-1}(t')}.$$

Применяя теперь лемму 2.2 и выбирая ε из условия минимума M_2', получаем

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant M_2' \sum_{t'=0}^{t} \|\varphi(t')\|^2_{b^{-1}(t')}, \tag{60}$$

где M_2' зависит только от c_2 и t_0. Объединяя (59) и (60), получим (57).

Теорема 2.5. *Если схема* (3) *из* ИС-2* *удовлетворяет условиям*

$$B \geqslant 0.5\tau(1+\varepsilon)A, \qquad A(t) > 0, \tag{61}$$

где $\varepsilon > 0$ — *любое число, то справедлива априорная оценка*

$$\|y(t+\tau)\|_{b(t)} \leqslant M_1 \|y(0)\|_{b(0)} + M_2 \left[\sum_{t'=0}^{t} \tau \|\varphi(t')\|^2_{a^{-1}(t')} \right]^{1/2}, \tag{62}$$

Доказательство. Достаточно найти оценку для задачи ($3_б$). Учитывая, что $\hat{y} = 0.5(\hat{y}+y) + 0.5(\hat{y}-y)$, и пользуясь леммой 1.4, имеем

$$2\tau(\varphi, \hat{y}) = \tau(\varphi, \hat{y}+y) + \tau(\varphi, \hat{y}-y),$$

$$2\tau(\varphi, \hat{y}) \leqslant \frac{1}{2}\tau(\|\hat{y}+y\|_a^2 + \|\varphi\|^2_{a^{-1}}) + \frac{\tau^3}{2}\varepsilon\|y_t\|_a^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2_{a^{-1}} \text{ при } t > 0.$$

Так как $A \leqslant (2/\tau)B$, то $\tau(\varphi(0), y(\tau)) \leqslant {}^1/_4\,\tau(A(0)y(\tau), y(\tau)) + \tau(A^{-1}(0)\varphi(0), \varphi(0)) \leqslant {}^1/_2(B(0)y(\tau), y(\tau)) + \tau\|\varphi(0)\|^2_{a^{-1}(0)} = \frac{1}{2}\mathscr{E}(\tau) + \tau\|\varphi(0)\|^2_{a^{-1}(0)}$.

Подставим эти оценки в (55):

$$\|\hat{y}\|_b^2 + \tau^2\left[\|y_t\|_b^2 - \frac{1}{2}\tau(1+\varepsilon)\|y_t\|_a^2\right] \leqslant (1+\tau c_2)\|y\|_{\check{b}}^2 + \frac{1}{2}\tau\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|\varphi\|^2_{a^{-1}},$$

$$\mathscr{E}(t'+\tau) \leqslant (1+\tau c_2)\mathscr{E}(t') + \frac{1}{2}\tau\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|\varphi(t')\|^2_{a^{-1}(t')} \quad \text{при } t' > 0,$$

$$\mathscr{E}(\tau) \leqslant 2\tau\|\varphi(0)\|^2_{a^{-1}(0)} \quad \text{при } t' = 0. \tag{63}$$

Применяя лемму 2.3, получаем (62).

Замечания. 1. Если оператор B постоянен, т. е. не зависит от t, то в (57) и (62) следует положить $M_1 = 1$, так что для схемы ($3_а$) получим оценку

$$\|y(t+\tau)\|_b \leqslant \|y(t)\|_b \quad \text{или} \quad \|y^{j+1}\|_b \leqslant \|y^j\|_b. \tag{64}$$

2. Оценка решения задачи ($3_а$) по норме $\|y\|_b$ в конечномерном случае применялась в [31], [32] в связи с изучением сходимости двухслойных итерационных схем для решения системы алгебраических уравнений $Av = \varphi$. Спектральным методом была получена оценка

$$\|y^{j+1}\|_b \leqslant \rho\|y^j\|_b \tag{65}$$

при двусторонних ограничениях на оператор B вида

$$\gamma_1 A \leqslant B \leqslant \gamma_2 A, \qquad \gamma_1 > 0, \qquad \gamma_2 > 0, \tag{66}$$

и найдено значение

$$\tau = \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \tag{67}$$

при котором достигается минимум ρ, равный

$$\rho_{\min} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}. \tag{68}$$

Этот же результат может быть получен на основании теоремы 2.3 без предположения о конечномерности H.

В самом деле, полагая $y(t_j) = \rho^j v(t_j)$, $t_j = j\tau$, получим для v задачу

$$\rho B v_t + \tilde{A} v = 0, \qquad v(0) = y(0), \qquad \tilde{A} = A - \frac{1-\rho}{\tau} B.$$

Условия $\rho B \geqslant 0.5\tau\tilde{A}$, $\tilde{A} \geqslant 0$ дают

$$\frac{\tau}{1+\rho} A \leqslant B \leqslant \frac{\tau}{1-\rho} A. \tag{69}$$

Сравнивая (69) с (66), убеждаемся в том, что минимум ρ достигается при

$$\frac{\tau}{1+\rho} = \gamma_1, \qquad \frac{\tau}{1-\rho} = \gamma_2.$$

Отсюда и следуют (67) и (68).

7. Априорные оценки для схем с весами

Рассмотрим однопараметрическое семейство схем (схем с весами)

$$y_t + A(\hat{\sigma y} + (1-\sigma) y) = \varphi, \qquad t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0, \tag{70}$$

где $A(t)$ — положительный линейный оператор. Устойчивость схемы (70) зависит от выбора вещественного параметра σ.

Чтобы применить теоремы 2.1 и 2.2, запишем схему в каноническом виде (3):

$$(E + \sigma\tau A) y_t + A y = \varphi, \qquad t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0, \qquad B = E + \sigma\tau A, \tag{71}$$

воспользовавшись тождеством $\hat{\sigma y} + (1-\sigma) y = y + \sigma\tau y_t$. Так как $A(t) > 0$, то существует обратный оператор A^{-1}. Применяя оператор A^{-1} к уравнению (71), получим

$$\tilde{B} y_t + \tilde{A} y = \tilde{\varphi}, \qquad t \in \omega_t, \qquad y(0) = y_0; \tag{72}$$

$$\tilde{B} = A^{-1} + \sigma\tau E, \qquad \tilde{A} = E, \qquad \varphi = A^{-1}\varphi. \tag{73}$$

При выводе априорных оценок будем пользоваться записью (70) в одной из форм (71) или (72).

Теорема 2.6. *Если* $A^*(t) = A(t) > 0$ *и*

$$\sigma \geqslant \sigma_0, \qquad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}, \tag{74}$$

то схема (70) *устойчива и для решения задачи верна оценка*

$$\|y(t+\tau)\| \leqslant \|y(0)\| + M_2 \max_{0\leqslant t'\leqslant t} \|A^{-1}(t')\varphi(t')\| + M_2' \max_{0<t'\leqslant t} \|(A^{-1}(t')\varphi(t'))_{\bar t}\|, \tag{75}$$

где M_2 *и* M_2' *зависят только от* t_0.

Замечания. 1. Требование самосопряженности $A(t)$ можно заменить требованием (см. [34])

$$\|Ax\|^2 \leqslant \Delta(Ax, x), \qquad x \in H. \tag{76}$$

Теорема сохраняет силу при

$$\sigma \geqslant \sigma_0, \qquad \tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\Delta}, \tag{77}$$

так как из (76) следует, что $A^{-1} \geqslant (1/\Delta)E$ (лемма 1.2).

2. При $\sigma \geqslant 0.5$ оценка сохраняет силу для любого несамосопряженного оператора $A(t) > 0$.

3. Если $A(t)$ — неограниченный оператор, то в (74) следует формально положить $1/\|A\| = 0$, так что $\sigma \geqslant 0.5$.

4. Если $A(t) = A^*(t) > 0$ и выполнено условие липшиц-непрерывности $A(t)$ по t, то верна оценка (38) при

$$\sigma \geqslant \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{\tau\|A\|}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{78}$$

Теорема 2.7. *Если* $A(t) = A^*(t) > 0$ *и выполнено условие* (78), *то для решения задачи* (70) *имеет место априорная оценка*

$$\|y(t+\tau)\| \leqslant \|y(0)\| + \frac{1}{\sqrt{(2\varepsilon)}} \left[\sum_{t'=0}^{t} \tau \|\varphi(t')\|^2_{a^{-1}(t')} \right]^{1/2}. \tag{79}$$

Воспользуемся тождеством (20) для схемы (72) с $\tilde A = E$:

$$2\tau((\tilde B - 0.5\tau\tilde A)y_t, y_t) + \|\hat y\|^2 = \|y\|^2 + 2\tau(\tilde\varphi, y_t), \quad \tilde\varphi = A^{-1}\varphi.$$

Учитывая, что из $\sigma \geqslant \sigma_\varepsilon$ следует $\tilde B - 0.5\tau\tilde A \geqslant \varepsilon A^{-1}$, так как

$$\tilde B - 0.5\tau\tilde A = \varepsilon A^{-1} + (1-\varepsilon)A^{-1} + (\sigma - 0.5)\tau E \geqslant \varepsilon A^{-1} + \\ + \left[(1-\varepsilon)\frac{1}{\Delta\tau} + (\sigma - 0.5)\right] E \geqslant \varepsilon A^{-1},$$

получаем

$$2\tau\varepsilon(A^{-1}y_t, y_t) + \|\hat y\|^2 \leqslant \|y\|^2 + 2\tau(A^{-1}\varphi, y_t).$$

Подставив сюда оценку, следующую из (1.3) и (1.5),

$$2\tau(A^{-1}\varphi, y_t) \leqslant 2\tau\varepsilon(A^{-1}y_t, y_t) + \frac{\tau}{2\varepsilon}(A^{-1}\varphi, \varphi), \tag{80}$$

имеем

$$\|\hat y\|^2 \leqslant \|y\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2_{a^{-1}}.$$

Отсюда следует (79).

Запишем схему с весами (70) в виде $(E+\sigma\tau A)\hat{y} = (E-(1-\sigma)\tau A)y+\tau\varphi$ и найдем $\hat{y} = (E+\sigma\tau A)^{-1}(E-(1-\sigma)\tau A)y + \tau(E+\sigma\tau A)^{-1}\varphi$. Отсюда получаем

$$\|\hat{y}\| \leqslant \|(E+\sigma\tau A)^{-1}(E-(1-\sigma)\tau A)\|\,\|y\| + \tau\|(E+\sigma\tau A)^{-1}\|\,\|\varphi\|. \tag{81}$$

Пусть $\varphi = 0$. Тогда из замечания 1 к теореме 2.6 следует

$$\|(E+\sigma\tau A)^{-1}(E-(1-\sigma)\tau A)\| \leqslant 1 \quad \text{при } \sigma \geqslant {}^1/_2 - 1/\tau\Delta, \tag{82}$$

если $\|Ax\|^2 \leqslant \Delta(Ax, x)$. Из условия (76) следует, что

$$E \geqslant \frac{1}{\Delta}A, \qquad E+\sigma\tau A = (\sigma-\sigma_\varepsilon)\tau A + 0.5\tau A + \varepsilon E +$$

$$+(1-\varepsilon)\left(E - \frac{1}{\Delta}A\right) \geqslant 0.5\tau A + \varepsilon E > \varepsilon E$$

при

$$\sigma \geqslant \sigma_\varepsilon, \qquad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{\tau\Delta} \tag{78'}$$

и, следовательно, (лемма 1.1),

$$\|(E+\sigma\tau A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}. \tag{83}$$

Подставляя (83) и (82) в (81), видим, что верна

Теорема 2.8. *Если выполнены условия* (76) *и* (78′), *то для решения задачи* (70) *имеет место оценка*

$$\|y(t+\tau)\| \leqslant \|y(0)\| + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{t'=0}^{t}\tau\|\varphi(t')\|. \tag{84}$$

Если $A(t) > 0$ — произвольный несамосопряженный оператор, то при $\sigma \geqslant 0.5$ справедлива оценка (84) *с $\varepsilon = 1$.*

Замечание 5. Пусть $A(t)$ полуограничен снизу, $A(t) \geqslant -c_*E$, $c_* = \text{const} > 0$. Тогда при $0.5 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $\tau \leqslant \tau_0$, $\tau_0 < 1/2c_*$ имеет место оценка

$$\|y(t+\tau)\| \leqslant M_1\|y(0)\| + M_2\sum_{t'=0}^{t}\tau\|\varphi(t')\|, \tag{85}$$

где M_1 и M_2 зависят только от c_* и t_0.

Доказательство этой теоремы опускаем.

Теорема 2.9. *Пусть $A > 0$ — постоянный оператор и $\sigma \geqslant 0.5$. Тогда для задачи* (70) *имеет место оценка*

$$\|Ay(t+\tau)\| \leqslant \|Ay(0)\| + M_2\max_{0\leqslant t'\leqslant t}\|\varphi(t')\| + M_2'\max_{0<t'\leqslant t}\|\varphi_{\bar{t}}(t')\|, \tag{86}$$

где $M_2 > 0$, $M_2' > 0$ зависят только от t_0.

Перепишем (71) в виде

$$(E+(\sigma-0.5)\tau A)y_t + 0.5A(\hat{y}+y) = \varphi \tag{87}$$

и умножим (87) скалярно на $2\tau A y_t = 2A(\hat{y} - y)$:

$$2\tau(Ay_t, y_t) + 2\tau^2(\sigma - 0.5)\,\|Ay_t\|^2 + \|\hat{A}y\|^2 = \|Ay\|^2 + 2\tau(\varphi, y_t).$$

Если $\varphi = 0$, то отсюда сразу следует

$$\|Ay(t+\tau)\| \leqslant \|Ay(0)\| \qquad \text{при } \sigma \geqslant 0.5.$$

Преобразуем

$$2\tau(\varphi, Ay_t) = 2\tau(\varphi, A\hat{y})_{\bar{t}} - 2\tau(\varphi_{\bar{t}}, Ay) \leqslant 2\tau(\varphi, A\hat{y})_{\bar{t}} +$$
$$+ \varepsilon\tau\|Ay\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon}\|\varphi_{\bar{t}}\|^2 \text{ при } t > 0,$$

так что

$$2\tau(Ay_t, y_t) + \|A\hat{y}\|^2 \leqslant (1 + \varepsilon\tau)\,\|Ay\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon}\|\varphi_{\bar{t}}\|^2 + 2\tau(\varphi, A\hat{y})_{\bar{t}}.$$

Дальше проводятся те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.1 при $y(0) = 0$.

Замечания. 6. Самосопряженности оператора A не требуется. Если $\|Ax\|^2 \leqslant \Delta(Ax, x)$, то теорема 2.9 верна при $\sigma \geqslant \sigma_0$, $\sigma_0 = {}^1/_2 - 1/\tau\Delta$. Если $A = A^*$, то верна оценка

$$\|Ay(t+\tau)\|^2 \leqslant \|Ay(0)\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{t'=0}^{t}\tau\|\varphi(t')\|_a^2.$$

7. Теорема 2.9 сохраняет силу в случае зависящего от t оператора $A(t)$, удовлетворяющего условию

$$\|A_{\bar{t}}y\| \leqslant c_2\|\check{A}y\|.$$

Априорные оценки вида (86) для многомерных двухслойных схем, аппроксимирующих уравнение теплопроводности, были получены в [23].

§ 3. Классы устойчивых трехслойных схем

1. Исходное семейство трехслойных схем

Рассмотрим множество трехслойных схем

$$By_{\bar{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \qquad 0 < t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0, \qquad y(\tau) = y_1, \quad (1)$$

где y_0 и y_1 — любые векторы из H; B, R и A — линейные операторы из H на H.

Исходное семейство трехслойных схем ИС-3 задается при помощи условий (ср. с [1]):

1) $A^*(t) = A(t)$, $A(t) > 0$;

2) $R^*(t) = R(t)$, $R(t) > 0$;

3) $A(t)$ и $R(t)$ липшиц-непрерывны по t с постоянной c_2, не зависящей от τ и N.

Требования на оператор $B(t)$ формулируются по ходу изложения. Основные оценки получены без предположения самосопряженности $B(t)$ и его непрерывности по t.

2. Энергетическое тождество

Для вывода априорных оценок используется энергетическое тождество, соответствующее схеме (1). Учитывая, что

$$y = \frac{\hat{y} + \check{y}}{2} - \frac{\tau^2}{2} y_{\bar{t}t},$$

перепишем схему (1) в виде

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 (R - {}^1/_2 A) y_{\bar{t}t} + {}^1/_2 A (\hat{y} + \check{y}) = \varphi. \tag{2}$$

Умножим (2) скалярно на $2\tau y_{\overset{\circ}{t}} = \tau (y_t + y_{\bar{t}}) = \hat{y} - \check{y}$ и учтем, что $\tau y_{\bar{t}t} = y_t - y_{\bar{t}}$:

$$2\tau (By_{\overset{\circ}{t}}, y_{\overset{\circ}{t}}) + \tau^2 ((R - {}^1/_2 A)(y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}}) + \\ + {}^1/_2 (A (\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = 2\tau (\varphi, y_{\overset{\circ}{t}}). \tag{3}$$

Нам понадобится

Лемма 3.1. *Если A и R — самосопряженные операторы, то*

$$(A (\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = (A\hat{y}, \hat{y}) - (A\check{y}, \check{y}), \tag{4}$$

$$((R - {}^1/_2 A)(y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}}) = ((R - {}^1/_2 A) y_t, y_t) - ((R - {}^1/_2 A) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}). \tag{5}$$

Эта лемма является следствием леммы 1.6, если положить $v = \hat{y} + \check{y}$, $u = \hat{y} - \check{y}$ и $v = y_t - y_{\bar{t}}$, $u = y_t + y_{\bar{t}}$ (заменив A оператором $R - {}^1/_2 A$).

Прибавим и вычтем справа в (3) (Ay, y), после чего воспользуемся леммой 1.5 при $v = \hat{y}$, $u = y$ и $v = y$, $u = \check{y}$:

$$(A (\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = [(A\hat{y}, \hat{y}) + (Ay, y)] - [(Ay, y) + (A\check{y}, \check{y})] = \\ = {}^1/_2 [(A (\hat{y} + y), \hat{y} + y) + (A(\hat{y} - y), \hat{y} - y)] - \\ - {}^1/_2 [(A (y + \check{y}), y + \check{y}) + (A (y - \check{y}), y - \check{y})],$$

так что

$$(A (\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = {}^1/_2 [(A (\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2 (Ay_t, y_t)] - \\ - {}^1/_2 [(A (y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2 (Ay_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})]. \tag{6}$$

Подставляя выражения (4) и (6) в (3), получим

$$2\tau (By_{\overset{\circ}{t}}, y_{\overset{\circ}{t}}) + \{{}^1/_4 (A (\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2 ((R - {}^1/_4 A) y_t, y_t)\} = \\ = \{{}^1/_4 (A (y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2 ((R - {}^1/_4 A) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})\} + 2\tau (\varphi, y_{\overset{\circ}{t}}).$$

Операторы A и R зависят от t, так что

$$A = A(t), \qquad R = R(t), \qquad t = t_j.$$

Учтем теперь, что

$$(A (t) v, v) = (\check{A} v, v) + ((A - \check{A}) v, v) = (\check{A} v, v) + \tau (A_{\bar{t}} v, v).$$

В результате получаем основное энергетическое тождество для трехслойной схемы

$$2\tau (By_{\overset{\circ}{t}}, y_{\overset{\circ}{t}}) + \hat{\mathscr{E}} = \mathscr{E} + \tau F + 2\tau (\varphi, y_{\overset{\circ}{t}}), \tag{7}$$

где

$$\hat{\mathscr{E}} = {}^1/_4 (A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2 ((R - {}^1/_4 A) y_t, y_t), \qquad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau},$$

$$\mathscr{E} = {}^1/_4 (\check{A}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2 ((\check{R} - {}^1/_4 \check{A}) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}), \qquad y_{\bar{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \tag{8}$$

$$F = {}^1/_4 (A_{\bar{t}}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2 ((R - {}^1/_4 A)_{\bar{t}} y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}). \tag{9}$$

Тождество (7) справедливо для любой трехслойной схемы в предположении, что $A(t)$ и $R(t)$ — самосопряженные операторы.

Операторы $A(t)$ и $R(t)$, по условию, липшиц-непрерывны по t. Поэтому справедлива оценка

$$|F| \leqslant c_2 \mathscr{E} + {}^1/_2 c_2 \tau^2 (\check{A} y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}). \tag{9'}$$

В самом деле,

$$|F| \leqslant \frac{c_2}{4} (\check{A}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2 c_2 (\check{R} y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) +$$

$$+ {}^1/_4 \tau^2 c_2 (\check{A} y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) = c_2 \mathscr{E} + {}^1/_2 c_2 \tau^2 (\check{A} y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}).$$

Если $R - {}^1/_4 A = \widetilde{R}$ удовлетворяет условию

$$|((R - {}^1/_4 A)_{\bar{t}} y, y)| \leqslant c_2 ((\check{R} - {}^1/_4 \check{A}) y, y),$$

то вместо (9′) получаем оценку

$$|F| \leqslant c_2 \mathscr{E}. \tag{9''}$$

В дальнейшем будем полагать $A(0) = A(\tau)$, $R(0) = R(\tau)$.

3. О корректности схемы

Корректность схемы (1), по аналогии с § 2, означает ее разрешимость и устойчивость. Запишем уравнение (1) в виде

$$(B + 2\tau R)\hat{y} = \Phi(y, \check{y}, \varphi),$$

где Φ зависит от φ и уже известных векторов y, $\check{y}$. Отсюда видно, что схема (1) разрешима, если существует обратный оператор $(B + 2\tau R)^{-1}$. Для этого достаточно, чтобы

$$B + 2\tau R > 0. \tag{10}$$

Условие (10) выполнено, в частности, при

$$B \geqslant 0.$$

Будем говорить, что схема (1) устойчива по начальным данным и по правой части или просто устойчива, если найдутся такие числа $\tau_0 > 0$ и $N_0 > 0$, что при $\tau \leqslant \tau_0$ и $N \geqslant N_0$ для решения задачи (1) имеет место одна из оценок:

$$\|y(t + \tau)\|_{(1,t)} \leqslant M_1 \|y(\tau)\|_{(1,0)} + M_2 \max_{0 < t' \leqslant t} \|\varphi(t')\|_{(2,t')}, \tag{11}$$

$$\|y(t + \tau)\|_{(1,t)} \leqslant M_1 \|y(\tau)\|_{(1,0)} + M_2 \max_{0 < t' \leqslant t} \|\varphi(t')\|_{(2,t')} + M_2' \max_{0 < t' \leqslant t} \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_{(2,t')}, \tag{12}$$

где $\|\cdot\|_{(1)}$ — норма вида

$$\|y(t+\tau)\|^2_{(1)} = \|y(t+\tau)+y(t)\|^2_{(1_1)} + \|y(t+\tau)-y(t)\|^2_{(1_2)}, \qquad (13)$$

$\|\cdot\|_{(1_1)}$, $\|\cdot\|_{(1_2)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ — некоторые нормы на линейной системе H_N (зависящие, вообще говоря, от t), M_1, M_2, M_2' — положительные постоянные, не зависящие от τ и N.

Если (11) или (12) выполнены при любых τ и N, то схема (1) называется абсолютно устойчивой (при этом, разумеется, предполагается, что схема (1) принадлежит ИС-3 при любых τ и N).

Перейдем к изучению достаточных условий устойчивости схем (1) из ИС-3. Для удобства изложения решение задачи (1) представим в виде суммы $y = \tilde{y} + \bar{y}$, где $\tilde{y}$ — решение задачи

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = 0, \qquad 0 < t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0, \qquad y(\tau) = y_1, \qquad (1_а)$$

а $\bar{y}$ — решение неоднородного уравнения с однородными начальными условиями

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \qquad 0 < t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\tau) = 0. \qquad (1_б)$$

5. Достаточные условия устойчивости. Априорные оценки

При выводе априорных оценок будем исходить из тождества (7). Отметим прежде всего, что

$$\hat{\mathscr{E}} \geqslant {}^1/_4 \|\hat{y} - y\|^2_a \quad \text{при } R \geqslant {}^1/_4 A, \qquad (14)$$

$$\hat{\mathscr{E}} \geqslant \frac{1-\varepsilon_0}{4}\|\hat{y}+y\|^2_a + \frac{\varepsilon_0}{4}(\|\hat{y}+y\|^2_a + \tau^2\|y_t\|^2_a) \geqslant \qquad (14')$$

$$\geqslant \frac{1-\varepsilon_0}{4}\|\hat{y}+y\|^2_a + \frac{\varepsilon_0}{2}(\|\hat{y}\|^2_a + \|y\|^2_a) \quad \text{при } R \geqslant \frac{1+\varepsilon_0}{4}A,$$

где $\varepsilon_0 > 0$.

Всюду используются нормы

$$\|y(t+\tau)\|_{(1,\,t)} = \|\hat{y}\|_{(1)} = \sqrt{(\mathscr{E}(t+\tau))}, \qquad (15)$$

где $\mathscr{E}(t+\tau) = \hat{\mathscr{E}}$ определяется формулой (8).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия*

$$B \geqslant -c_1\tau^2 A, \qquad (16)$$

$$R \geqslant \frac{1+\varepsilon_0}{4}A, \qquad (17)$$

где $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$, $c_1 = \text{const} > 0$ *не зависят от* τ *и* N. *Тогда схема* (1) *из* ИС-3 *устойчива при достаточно малом* $\tau \leqslant \tau_0(c_1)$ *и для решения задачи* (1) *верна оценка* (12), *в которой* $\|\cdot\|_{(1)}$ *определяется по формуле* (15),

$$\|\varphi(t)\|_{(2,\,t)} = \sqrt{(A^{-1}(t)\varphi(t), \varphi(t))} = \|\varphi(t)\|_{a^{-1}(t)} \text{ или } \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{a^{-1}}, \qquad (18)$$

M_1, M_2 *и* M_2' *зависят только от* c_1, c_2, t_0, ε_0 *и* $\tau_0 < 1/4c_1$.

Доказательство. Используем условие (16). Для этого нам понадобится лемма 1.9, в силу которой

$$(Bv_{\bar t}, v_{\bar t}) \geqslant -c_1\tau^2 (Av_{\bar t}, v_{\bar t}) \geqslant -2c_1 [(Av, v) + (A\check v, \check v)].$$

Подставляя сюда $v = \hat y + y$, будем иметь

$$2\tau (By_{\overset{\circ}{t}}, y_{\overset{\circ}{t}}) = \frac{\tau}{2} (B(\hat y + y)_{\bar t}, \ (\hat y + y)_{\bar t}) \geqslant \tag{19}$$

$$\geqslant -c_1\tau [(A(\hat y + y), \hat y + y) + (A(y + \check y), y + \check y)].$$

Замечая, что

$$\mathscr{E} \geqslant \frac{1}{4} \| y + \check y \|^2_{\check a} + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \tau^2 \| y_{\bar t} \|^2_{\check a} \quad \text{при } R \geqslant \frac{1 + \varepsilon_0}{4} A, \tag{20}$$

и пользуясь оценкой (9′), получим

$$|F| \leqslant c_2 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon_0}\right) \mathscr{E}. \tag{21}$$

Подставим (19) и (21) в (7):

$$-c_1\tau (A(\hat y + y), \hat y + y) + \hat{\mathscr{E}} \leqslant \left(1 + c_2 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon_0}\right) \tau\right) \mathscr{E} + \tag{22}$$

$$+ c_1\tau (A(y + \check y), y + \check y) + 2\tau (\varphi, y_{\overset{\circ}{t}}).$$

1. Устойчивость по начальным данным. Пусть $\varphi = 0$. Учитывая (20) и из § 2 формулу (16), будем иметь

$$(1 - 4c_1\tau) \hat{\mathscr{E}} \leqslant (1 + c_2(1 + 2/\varepsilon_0)\tau) \mathscr{E} + 4c_1\tau (1 + c_2\tau) \mathscr{E} \leqslant (1 + c_2'\tau) \mathscr{E}, \tag{23}$$

где $c_2' = 2c_2(4 + 1/\varepsilon_0) + 4c_1$, причем $4c_1\tau < 1$. Из (23), по аналогии с п. 5, § 2, получаем

$$\mathscr{E}(t + \tau) \leqslant M_1' \mathscr{E}(\tau), \qquad \tau \leqslant \tau_0, \qquad \tau_0 < 1/4c_1, \tag{24}$$

а M_1' зависит от c_1, c_2, ε_0, t_0 и τ_0. Из (24) следует

$$\| y(t + \tau) \|_{(1, t)} \leqslant M_1 \| y(\tau) \|_{(1, 0)}. \tag{25}$$

2. Устойчивость по правой части. Пусть $y(0) = y(\tau) = 0$. Тогда $\varepsilon(\tau) = 0$. Применим лемму 2.1 при $v = \hat y + y$ и оценим:

$$2\tau (\varphi, y_{\overset{\circ}{t}}) = \tau (\varphi, (\hat y + y)_{\bar t}) \leqslant \tau (\varphi, \hat y + y)_{\bar t} + \tag{26}$$

$$+ \varepsilon_1 (A(y + \check y), y + \check y) + \frac{1}{4\varepsilon_1} (A^{-1}\varphi_{\bar t}, \varphi_{\bar t}),$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — произвольное число. Так как $(Av, v) \leqslant (1 + c_2\tau)(\check A v, v)$, то

$$-c_1\tau (A(\hat y + y), \hat y + y) + \hat{\mathscr{E}} \leqslant \left(1 + c_2 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon_0}\right) \tau\right) \mathscr{E} +$$

$$+ \tau (\varepsilon_1 + c_1)(1 + c_2\tau)(\check A (y + \check y), y + \check y) + \frac{\tau}{4\varepsilon_1} (A^{-1}\varphi_{\bar t}, \varphi_{\bar t}) + \tau (\varphi, \hat y + y)_{\bar t}.$$

Учитывая (20) и предполагая, что $4(\varepsilon_1 + c_1)\tau < 2$, получим

$$(1 - 4c_1\tau)\hat{\mathscr{E}} \leqslant (1 + c_2'\tau)\mathscr{E} + (\varphi, \hat{y} + y) - (\check{\varphi}, y + \check{y}) + \frac{1}{4\varepsilon_1}\tau(A^{-1}\varphi_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}), \quad (27)$$

где $c_2' = c_2(3 + 2/\varepsilon_0) + 4(\varepsilon_1 + c_1)$. Это неравенство решается по аналогии с неравенством (23). Повторяя рассуждения из § 2, п. 5, получаем

$$\mathscr{E}(t + \tau) \leqslant \max_{0<t'\leqslant t} [\overline{M}_2(A^{-1}(t')\varphi(t'), \varphi(t')) + \overline{M}_2'(A^{-1}(t')\varphi_{\bar{t}}(t'), \varphi_{\bar{t}}(t'))]. \quad (28)$$

При этом предполагается, что $\varphi(0) = \varphi(\tau)$, так что $\varphi_{\bar{t}}(\tau) = 0$. Из (24) и (28) следует (12) при $\tau \leqslant \tau_0$, $\tau_0 < 1/4c_1'$.

Замечания. 1. Если вместо (16) выполнено условие неотрицательности B:

$$B \geqslant 0,$$

то теорема 3.1 верна при любых $\tau > 0$. В этом можно убедиться, если в (23) и (27) положить $c_1 = 0$.

2. Из (15) следует, что схема (1) устойчива по правой части в норме

$$\|y(t + \tau)\|^2_{(1,t)} = \|y(t + \tau)\|^2_{a(t)} + \|y(t)\|^2_{a(t)} \quad (29)$$

Оценка (28) сохраняет силу, если вместо $\mathscr{E}(t + \tau)$ подставить (29).

3. Условие разрешимости $B + 2\tau R > 0$ выполнено при $\tau \leqslant {}^1/_2 c_1$, так как $B + 2\tau R \geqslant (1 + \varepsilon_0 - 2c_1\tau)\tau A/2$.

Теорема 3.2. *Пусть для схемы* (1) *из* ИС-3 *выполнены условия* (17) *и*

$$B \geqslant \delta E, \qquad \delta = \text{const} > 0, \quad (30)$$

где E — единичный оператор.

Тогда для решения задачи (1) *имеет место оценка* (11), *в которой* $\|y(t + \tau)\|_{(1,t)}$ *определяется по формулам* (15) *и* (8), *а*

$$\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|;$$

постоянные M_1 и M_2 зависят только от c_2, ε_0, δ и t_0.

1. Устойчивость по начальным данным. В силу $B \geqslant \delta E$ имеем

$$2\tau\delta\|y_{\mathring{t}}\|^2 + \hat{\mathscr{E}} \leqslant (1 + c_2(1 + 2/\varepsilon_0)\tau)\mathscr{E} + 2\tau(\varphi, y_{\mathring{t}}). \quad (31)$$

При $\varphi = 0$ отсюда следует

$$\mathscr{E}(t + \tau) \leqslant (1 + c_2(1 + 2/\varepsilon_0)\tau)\mathscr{E}(t) \leqslant \overline{M}_1\mathscr{E}(\tau),$$
$$\|y(t + \tau)\|_{(1,t)} \leqslant M_1\|y(\tau)\|_{(1,0)}. \quad (32)$$

2. Устойчивость по правой части. Подставим оценку $2\tau(\varphi, y_{\mathring{t}}) \leqslant 2\tau\delta\|y_{\mathring{t}}\|^2 + (\tau/2\delta)\|\varphi\|^2$ в (31):

$$\hat{\mathscr{E}} \leqslant \left(1 + c_2\left(1 + \frac{2}{\varepsilon_0}\right)\tau\right)\mathscr{E} + \frac{\tau}{2\delta}\|\varphi\|^2. \quad (33)$$

Применим к (32) лемму 2.3:

$$\mathscr{E}(t+\tau) \leqslant M_2 \sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\varphi(t')\|^2. \tag{34}$$

Объединяя оценки (32) и (34), получим (11) с $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$. Теорема доказана.

6. Схемы с постоянными операторами A и R

По ходу доказательства теорем 3.1 и 3.2 видно, что эти теоремы сохраняют силу при

$$R \geqslant {}^1/_4 A,$$

если оператор $\tilde{R} = R - {}^1/_4 A$ липшиц-непрерывен по t (см. (9″)).

Рассмотрим теперь случай, когда A и R — постоянные операторы. Полагая в (23), (27) и (33) $c_2 = 0$, получим

$$(1 - 4c_1\tau)\hat{\mathscr{E}} \leqslant (1 + 4c_1\tau)\mathscr{E}, \tag{23′}$$

$$(1 - 4c_1\tau)\hat{\mathscr{E}} \leqslant (1 + 4(\varepsilon_1 + c_1)\tau)\mathscr{E} + (\varphi, \hat{y} + y) - (\check{\varphi}, y + \check{y}) + \frac{1}{4\varepsilon_1}\tau(A^{-1}\bar{\varphi}_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}), \tag{27′}$$

$$\hat{\mathscr{E}} \leqslant \mathscr{E} + \frac{\tau}{2\delta}\|\varphi\|^2, \tag{33′}$$

где

$$\hat{\mathscr{E}} = \|\hat{y} + y\|^2_{(1)} = {}^1/_4\|\hat{y} + y\|^2_a + \tau^2\|y_t\|^2_{\tilde{r}}, \qquad \|v\|^2_{\tilde{r}} = ((R - {}^1/_4 A)v, v),$$

причем A и R не зависят от t.

Из этих неравенств видно, например, что справедлива

Теорема 3.3. *Пусть A и R не зависят от t и*

$$B \geqslant 0, \qquad R \geqslant {}^1/_4 A.$$

Тогда для решения задачи (1_a) *верна оценка*

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leqslant \|y(\tau)\|_{(1)}. \tag{35}$$

Если $B \geqslant \delta E$, где $\delta = \mathrm{const} > 0$, то для решения задачи (1) *выполняется неравенство*

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leqslant \|y(\tau)\|_{(1)} + \frac{1}{\sqrt{(2\delta)}}\left[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau\|\varphi(t')\|^2\right]^{1/2}. \tag{36}$$

7. Априорные оценки для схемы с весами

Весьма часто встречаются на практике схемы с весами

$$y_t + Ay^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \varphi(t), \qquad 0 < t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0, \qquad y(\tau) = y_1, \tag{37}$$

где

$$y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1\hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2\check{y}, \qquad A = A(t) > 0.$$

Здесь σ_1 и σ_2 — вещественные числа, от выбора которых зависят устойчивость и точность схемы.

Приведем схему (37) к каноническому виду (1). Пользуясь формулами

$$\hat{y} = y + \tau y_t = y + \frac{\tau}{2} y_{\overset{\circ}{t}} + {}^1/_2\tau^2 y_{\bar{t}t}, \qquad \check{y} = y - {}^1/_2\tau y_{\overset{\circ}{t}} + {}^1/_2\tau^2 y_{\bar{t}t},$$

найдем

$$y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = y + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau y_{\overset{\circ}{t}} + 0.5(\sigma_1 + \sigma_2)\tau^2 y_{\bar{t}t}. \tag{38}$$

После подстановки (38) в (37) получим

$$\begin{gathered}(E + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A) y_{\overset{\circ}{t}} + 0.5\tau^2(\sigma_1 + \sigma_2) A y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \\ y(0) = y_0, \qquad y(\tau) = y_1.\end{gathered} \tag{39}$$

Сравнение (39) с (1) дает

$$B = E + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A, \qquad R = 0.5(\sigma_1 + \sigma_2)A.$$

Так как $A > 0$, то существует A^{-1}. Применим A^{-1} к (39):

$$B y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 \tilde{R} y_{\bar{t}t} + \tilde{A} y = \tilde{\varphi}, \qquad \tilde{\varphi} = A^{-1}\varphi, \qquad y(0) = y_0, \qquad y(\tau) = y_1, \tag{40}$$

где

$$\tilde{B} = A^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau E, \qquad \tilde{R} = 0.5(\sigma_1 + \sigma_2)E, \qquad \tilde{A} = E. \tag{41}$$

Схемы (39) и (40), очевидно, эквивалентны схеме (37). Схема (39) (или (37)) принадлежит ИС-3, если $A = A(t)$ самосопряжен, положителен и липшиц-непрерывен по t и $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$. Схема (40) принадлежит ИС-3, если $A = A(t) > 0$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$, так как операторы $\tilde{A} = E$ и $\tilde{R} = 0.5(\sigma_1 + \sigma_2)E$ являются постоянными и самосопряженными; при этом оператор A и, следовательно, $\tilde{B} = A^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau E$ не являются самосопряженными. В зависимости от свойств оператора A мы будем применять общие теоремы 3.1 и 3.2 к схеме (37) в форме (40) либо в форме (39) (ср. с § 2, п. 7).

Для разрешимости схемы (37) должен существовать обратный оператор $(B + 2\tau R)^{-1} = (E + 2\sigma_1\tau A)^{-1}$. Так как $E \geqslant A / \|A\|$, то $E + 2\sigma_1\tau A \geqslant (1 / \|A\| + 2\sigma_1\tau)A > 0$ при $\sigma_1 > -1 / 2\tau\|A\|$ и схема (37) разрешима при $\sigma_1 \geqslant 0$. Нетрудно заметить, что

$$\|(E + 2\sigma_1\tau A)^{-1}\| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \sigma_1 \geqslant 0, \tag{42}$$

так как $E + 2\sigma_1\tau A \geqslant E$ при $\sigma_1 \geqslant 0$.

Теорема 3.4. *Схема* (37) *устойчива и для нее справедливы:*

1) *априорная оценка* (12) *при любом* $\tau > 0$ *и*

$$\|\hat{y}\|^2_{(1)} = \frac{1}{4}\|\hat{y} + y\|_a^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{4}\right)\tau^2\|y_t\|_a^2, \qquad \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|, \tag{43}$$

если выполнены условия

$$A(t) = A^*(t) > 0, \qquad A(t) \text{ липшиц-непрерывен по } t, \tag{44}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant 0.5, \qquad \sigma_1 \geqslant \sigma_2; \tag{45}$$

2) *оценка* (12) *с* $\|y\|_{(1)}$, *определяемым по формуле* (43), *и* $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{a^{-1}}$, *если при этом выполнены условия* (44)—(45) *и* $\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant 0.5$,

$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 - 1/\tau\|A\| - c_1\tau$, $c_1 = \text{const} \geqslant 0$, $\tau \leqslant \tau_0(c_1)$ *достаточно мало* ($\tau_0 = \infty$ *при* $c_1 = 0$).

Первое утверждение следует из теоремы 3.2, второе — из теоремы 3.1, если применить их для схемы с весами в канонической форме (39).

Если схема (37) симметрична, т. е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, то для ее устойчивости достаточно, чтобы $\sigma \geqslant 1/4$.

Покажем, что схема с весами устойчива в другой норме без предположений о самосопряженности и липшиц-непрерывности по t оператора $A(t)$.

Теорема 3.5. *Если* $A(t) > 0$, *то при* (45) *схема* (37) *устойчива и для нее верна априорная оценка*

$$\|y(t+\tau)\|_{(\bar{1})} \leqslant \|y(\tau)\|_{(\bar{1})} + \max_{0<t'\leqslant t} (M_2\|A^{-1}(t')\varphi(t')\| + M_2'\|(A^{-1}(t')\varphi(t'))_{\bar{t}}\|), \tag{46}$$

где $M_2 > 0$ *и* $M_2' > 0$ *зависят только от* t_0,

$$\|y(t+\tau)\|^2_{(\bar{1})} = \|\hat{y}\|^2_{(\bar{1})} = 1/4\|\hat{y}+y\|^2 + \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - 1/4\right)\tau^2\|y_t\|^2. \tag{47}$$

Для доказательства применим теорему 3.1 к схеме (40) с постоянными операторами $\tilde{A} = E$ и $\tilde{R} = 0.5(\sigma_1+\sigma_2)E$ при $c_1 = 0$.

Теорема 3.6. *Если выполнены условия теоремы* 3.5, *то для схемы* (37) *имеет место априорная оценка*

$$\|y(t+\tau)\|_{(\bar{1})} \leqslant \|y(\tau)\|_{(\bar{1})} + \sqrt{(2(\sigma_1+\sigma_2))}\sum_{t'=\tau}^{t}\tau\|\varphi(t')\|. \tag{48}$$

Схема (37) устойчива по начальным данным. Для схемы (40) тождество (7) при $\varphi = 0$ принимает вид

$$2\tau(\tilde{B}y_{\mathring{t}}, y_{\mathring{t}}) + \|\hat{y}\|^2_{(\bar{1})} = \|y\|^2_{(\bar{1})}. \tag{49}$$

Так как $\tilde{B} = A^{-1} + \tau(\sigma_1-\sigma_2)E \geqslant A^{-1} > 0$, то

$$\|\hat{y}\|^2_{(\bar{1})} \leqslant \|y\|^2_{(\bar{1})}$$

и, следовательно,

$$\|y(t)\|_{(\bar{1})} \leqslant \|y(t')\|_{(\bar{1})} \quad \text{при } \tau \leqslant t' < t. \tag{50}$$

Рассмотрим теперь задачу (40) при $y(0) = 0$, $y(\tau) = 0$. Ее решение будем искать в виде суммы

$$y(t) = \sum_{t'=\tau}^{t}\tau Y(t, t'), \tag{51}$$

где $Y(t, t')$ как функция t удовлетворяет однородному уравнению (37) и начальным условиям

$$Y(t'+\tau, t') + 2\sigma_1\tau A(t')Y(t'+\tau, t') = 2\varphi(t'), \qquad Y(t', t') = 0. \tag{52}$$

Подставляя (51) в (37) и учитывая уравнение для $Y(t, t')$ и условия (52), убеждаемся в том, что (51) — решение задачи (37). При $t = 0$ и $t = \tau$, как видно из (51) и (52), получаем $y(0) = y(\tau) = 0$. Для функции $w(t) = Y(t, t')$, согласно (50), имеет место оценка

$$\|Y(t, t')\|_{(\bar{1})} \leqslant \|Y(t' + \tau, t')\|_{(1)} \text{ при фиксированном } t' \leqslant t. \tag{53}$$

Из (52) находим $Y(t' + \tau, t') = 2(E + 2\sigma_1\tau A)^{-1}\varphi(t')$. Так как $\sigma_1 > 0$, то, согласно (42), имеем

$$\|Y(t' + \tau, t')\| \leqslant 2\|\varphi(t')\|. \tag{54}$$

В силу начального условия $Y(t', t') = 0$ и

$$Y(t' + \tau, t')\|^2_{(\bar{1})} = {}^1/_4\|Y(t' + \tau, t)\|^2 +$$
$$+ \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - {}^1/_4\right)\|Y(t' + \tau, t')\|^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\|Y(t' + \tau, t')\|^2,$$
$$\|Y(t' + \tau, t')\|_{(\bar{1})} = \sqrt{(0.5(\sigma_1 + \sigma_2))}\|Y(t' + \tau, t')\|. \tag{55}$$

Подставляя (55) и (54) в правую часть неравенства

$$\|y(t)\|_{(\bar{1})} \leqslant \sum_{t'=\tau}^{t-\tau} \tau\|Y(t, t')\|_{(\bar{1})} \leqslant \sum_{t'=\tau}^{t-\tau} \tau\|Y(t' + \tau, t')\|_{(\bar{1})},$$

получаем оценку для решения задачи (37) при $y(0) = y(\tau) = 0$:

$$\|y(t + \tau)\|_{(\bar{1})} \leqslant \sqrt{(2(\sigma_1 + \sigma_2))} \sum_{t'=\tau}^{t} \tau\|\varphi(t')\|. \tag{56}$$

Объединяя (50) и (56), приходим к (48). Теорема доказана.

Теорема 3.7. *Если* $A(t) = A^*(t) > 0$ *и*

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 - \frac{1 - \varepsilon}{\tau\|A\|}, \qquad \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant {}^1/_2, \qquad \varepsilon \in (0,1], \tag{57}$$

то для схемы (37) *верна априорная оценка*

$$\|y(t + \tau)\|_{(\bar{1})} \leqslant \|y(\tau)\|_{(\bar{1})} + \frac{1}{\sqrt{(2\varepsilon)}}\left[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau\|\varphi(t')\|^2_{a^{-1}(t')}\right]^{1/2}. \tag{58}$$

Теорему, очевидно, достаточно доказать при $y(0) = y(\tau) = 0$. Напишем для схемы (40) тождество

$$2\tau(\tilde{B}y_{\hat{t}}, y_{\hat{t}}) + \|\hat{y}\|^2_{(\bar{1})} = |y\|^2_{(\bar{1})} + 2\tau(\tilde{\varphi}, y_{\hat{t}}), \text{ где } \tilde{\varphi} = A^{-1}\varphi. \tag{59}$$

Подставляя сюда оценку (80) из § 2 для $2\tau(A^{-1}\varphi, y_{\hat{t}})$ и учитывая, что $\tilde{B} = A^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau E \geqslant \varepsilon A^{-1}$ при $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 - (1 - \varepsilon)/\tau\|A\|$, получаем

$$\|\hat{y}\|^2_{(\bar{1})} \leqslant \|y\|^2_{(\bar{1})} + \frac{\tau}{2\varepsilon}(A^{-1}\varphi, \varphi).$$

Отсюда и следует (58).

Таким образом, если $A(t)$ самосопряжен и липшиц-непрерывен по t, то для схемы (37) имеют место априорные оценки по норме (43). Если же

$A(t)$ — произвольный положительный оператор, то верны оценки по норме (47). При этом требование самосопряженности $A(t)$ (без липшиц-непрерывности t) позволяет получить оценку для $\|y\|_{(\bar{1})}$ через $\|\varphi\|_{a^{-1}}$, в то время как $\|y\|_{(1)}$ оценивается, согласно теореме 3.1, через $\|\varphi\|_{a^{-1}}$ и $\|\varphi_{\bar{t}}\|_{a^{-1}}$.

Теорема 3.8. *Пусть $A > 0$ — постоянный оператор и $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant 1/2$. Тогда для схемы* (37) *имеет место оценка* (12), *где*

$$\|y(t+\tau)\|^2_{(1)} = \|\hat{y}\|^2_{(1)} = 1/4\,\|A(\hat{y}+y)\|^2 + \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - 1/4\right)\tau^2\|Ay_t\|^2, \quad (60)$$

$\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$, *а $M_1 = 1$, $M_2 > 0$ зависит только от t_0.*

Умножая (39) скалярно на $2\tau Ay_{\overset{\circ}{t}}$ и проводя рассуждения по аналогии с п. 4 настоящего параграфа, получим тождество

$$2\tau(Ay_{\overset{\circ}{t}}, y_{\overset{\circ}{t}}) + 2(\sigma_1-\sigma_2)\tau^2\|Ay_{\overset{\circ}{t}}\|^2 + \|\hat{y}\|^2_{(1)} = \|y\|^2_{(1)} + 2\tau(\varphi, Ay_{\overset{\circ}{t}}). \quad (61)$$

При $\varphi = 0$ отсюда сразу следует $\|\hat{y}\|_{(1)} \leqslant \|y\|_{(1)}$. Подставляя оценку

$$2\tau(\varphi, Ay_{\overset{\circ}{t}}) = 2\tau(\varphi, A(\hat{y}+y)_{\bar{t}}) \leqslant \tau(\varphi, A(\hat{y}+y))_{\bar{t}} + \tau\varepsilon\|y\|^2_{(1)} + \frac{\tau}{\varepsilon}\|\varphi_{\bar{t}}\|^2$$

в (61), будем иметь

$$\|\hat{y}\|^2_{(1)} \leqslant (1+\tau\varepsilon)\|y\|^2_{(1)} + (\varphi, A(\hat{y}+y)) - (\check{\varphi}, A(y+\check{y})) + \frac{1}{\varepsilon}\tau\|\varphi_{\bar{t}}\|^2. \quad (62)$$

Отсюда, по аналогии с п. 5 настоящего параграфа, следует искомая оценка, если учесть, что

$$|(\varphi, A(\hat{y}+y))| \leqslant \|\varphi\|\|A(\hat{y}+y)\| \leqslant 2\|\varphi\|\|\hat{y}\|_{(1)} \leqslant 1/2\,\|\hat{y}\|^2_{(1)} + 2\|\varphi\|^2.$$

Самосопряженность оператора A не используется. Теорема сохраняет силу для $A = A(t)$, если $\|A_{\bar{t}}y\| \leqslant c_2\|\check{A}y\|$. Если $A^* = A > 0$, то имеет место оценка (11), где $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_a$.

8. Априорные оценки для трехслойной схемы второго типа

Рассмотрим теперь трехслойную схему во второй канонической форме:

$$y_{\bar{t}\bar{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}\bar{t}} + By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi, \qquad 0 < t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = y_0, \qquad y(\tau) = y_1. \quad (63)$$

Энергетическое тождество (7) в этом случае имеет вид

$$2\tau(By_{\overset{\circ}{t}}, y_{\overset{\circ}{t}}) + \|\hat{y}\|_*^2 = \|y\|_*^2 + \tau F + 2\tau(\varphi, y_{\overset{\circ}{t}}), \quad (64)$$

где F имеет вид (8), а

$$\|\hat{y}\|_*^2 = 1/4\|\hat{y}+y\|_a^2 + \tau^2((R - 1/4A)y_t, y_t) + \|y_t\|^2. \quad (65)$$

Отсюда видно, что $\|\hat{y}\|_*^2 \geqslant 1/4\|\hat{y}+y\|_a^2 + \|y_t\|^2$ при $R \geqslant 1/4A$.

Теорема 3.9. *Пусть выполнены условия $B \geqslant 0$, $R^* = R > 0$, $A^* = A > 0$, A и R — постоянные операторы и $R \geqslant 1/4A$. Тогда для схемы*

(63) *имеет место априорная оценка*

$$\|y(t+\tau)\|_* \leqslant \|y(\tau)\|_* + e\sqrt{t_0}\left[\sum_{t'=\tau}^{t} \|\varphi(t')\|^2\right]^{1/2}. \tag{66}$$

Доказательство. Так как A и R не зависят от t, то $F=0$. При $\varphi=0$ тождество (64) принимает вид $\|\hat{y}\|_*^2 \leqslant \|y\|_*^2$, т. е. для задачи (63) при $\varphi=0$ имеет место оценка

$$\|y(t+\tau)\|_* \leqslant \|y(t)\|_*. \tag{67}$$

Пусть $y(0)=y(\tau)=0$ и, следовательно, $\|y(\tau)\|_*=0$. Преобразуем

$$2\tau(\varphi, y_{\overset{\circ}{t}}) = \tau(\varphi, y_t + y_{\bar{t}}) \leqslant \tau\varepsilon(\|y_t\|^2 + \|y_{\bar{t}}\|^2) + \frac{1}{2\varepsilon}\tau\|\varphi\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \tau\varepsilon(\|\hat{y}\|_*^2 + \|y\|_*^2) + \frac{1}{2\varepsilon}\tau\|\varphi\|^2.$$

Подставив эту оценку в $\|\hat{y}\|_*^2 \leqslant \|y\|_*^2 + 2\tau(\varphi, y_{\overset{\circ}{t}})$, получаем

$$(1-\tau\varepsilon)\|y\|_*^2 \leqslant (1+\tau\varepsilon)\|y\|_*^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\tau\|\varphi\|^2.$$

Выбирая $\varepsilon = {}^1/_2 t_0$, приходим к оценке

$$\|y(t+\tau)\|_*^2 \leqslant e^2 t_0 \sum_{t'=\tau}^{t} \tau\|\varphi(t')\|^2. \tag{68}$$

Объединяя (67) и (68), приходим к неравенству (66).

Используя технику, развитую выше, нетрудно получить аналогичную оценку для случая переменных операторов $A(t)$ и $R(t)$. Отметим, что для схемы (60) верны теоремы 3.1 и 3.2.

Поступила в редакцию
17.05.1966

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. О регуляризации разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, **7**, № 1, 62—93.
2. В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
3. А. А. Самарский. К теории разностных схем. Докл. АН СССР, 1965, **165**, № 5, 1007—1011.
4. Р. Курант, К. Фридрихс, Г. Леви. О разностных уравнениях математической физики. Успехи матем. наук, 1940, вып. 8, 125—160.
5. О. А. Ладыженская. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., Гостехиздат, 1953.
6. О. А. Ладыженская. О применимости метода конечных разностей к решению задачи Коши для гиперболических систем. Докл. АН СССР, 1953, **88**, № 4, 607—610.
7. О. А. Ладыженская. Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными. Успехи матем. наук, 1957, **12**, вып. 5, 123—145.
8. В. И. Лебедев. О методе сеток для одной системы уравнений в частных производных. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, **22**, № 5, 717—734.
9. В. И. Лебедев. К вопросу об оценке погрешности метода сеток для полигармонического уравнения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 4, 593—602.
10. В. И. Лебедев. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **4**, № 3, 449—465; II. № 4, 649—659.

11. M. Lees. A priori estimates for the solution of difference approximations to parabolic differential equation. Duke Math. J., 1960, **27**, 297—311.
12. M. Lees, Energy inequalities for the solution of the differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **94**, № 1, 58—73.
13. M. Lees. Alternating direction and semi-explisit difference methods for parabolic differential equations. Numer. Math. 1961, **3**, 398—412.
14. J. Douglas, F. Jones. Numerical methods for integrodifferential equations of parabolic and hyperbolic types. Numer. Math., 1962, **4**, № 2, 96—102.
15. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 3, 441—450.
16. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 6, 972—1000.
17. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 2, 266—298.
18. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 3, 431—466.
19. И. В. Фрязинов. Об устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 6, 1122—1127.
20. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для общих параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **4**, № 2, 278—291.
21. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных параболических уравнений с переменными коэффициентами. В сб. «Вычисл. методы и программирование». Вып. 3. М., Изд-во МГУ, 1965, 163—190.
22. А. Н. Коновалов. Применение метода расщепления к численному решению динамических задач теории упругости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **4**, № 4, 760—764.
23. В. Б. Андреев. О равномерной сходимости некоторых разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 2, 238—250.
24. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 5—63.
25. О. А. Ладыженская. О решении нестационарных операторных уравнений. Матем. сб., 1956, **38**(81), № 4, 491—524.
26. А. А. Самарский. О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики. Apl. mat., 1965, **10**, № 2, 146—164.
27. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
28. Л. А. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
29. Б. З. Вулих. Введение в функциональный анализ. М., Физматгиз, 1960.
30. А. А. Самарский, В. Б. Андреев. Итерационные схемы переменных направлений для численного решения задачи Дирихле. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **4**, № 6, 1025—1036.
31. J. E. Gunn. The solution of elliptic difference equations by semi-explicit iterative techniques. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Numer. Anal., 1965, ser. B, **2**, № 1, 24—45.
32. Е. Г. Дьяконов. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 1, 12—34.
33. А. А. Самарский. Некоторые вопросы теории разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 4, 665—686.