ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 6 Июль — Август № 4

УДК 518:517.944/.947

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

1. В последние годы появилось много работ, содержащих разностные схемы для решения различных задач математической физики. Особое развитие получили экономичные методы решения многомерных задач (схемы переменных направлений, схемы расщепления, локально-одномерные схемы и др.). В настоящее время имеется большое число различных алгоритмов решения одних и тех же задач. Поэтому особую роль приобретает проблема сравнения (теоретического и экспериментального) разностных схем, а также разработка общих принципов построения семейств разностных схем, обладающих заданными свойствами, и отыскание в этом семействе схем, удовлетворяющих некоторым дополнительным требованиям оптимальности (по точности, экономичности и т. д.).

Имеется ряд схем, которые при определенном способе согласования правых частей и краевых условий дают совпадающие результаты (схемы алгебраически тождественны). В этом случае вопрос об использовании той или иной схемы следует решать, исходя из соображений удобства ее практической реализации. Указанная ситуация характерна для экономичных методов решения многомерных задач. Сравнение различных экономичных схем проводилось в ряде работ (см., например, [1], [2] и [3], [4]).

В [1], [2] было показано путем сравнения со схемой расщепления оператора (для уравнения теплопроводности в прямоугольной области), к которой приводятся схемы [5]—[7] после исключения промежуточных значений, что порядок аппроксимации этих схем зависит в случае нестационарных краевых условий (а для [7] — и в случае стационарных условий) от способа задания краевых условий на промежуточном шаге. Указано, что путем изменения правой части в пограничных узлах сетки можно добиться совпадения схемы [5] со схемой расщепления оператора $O(\tau^2 + h^2)$. В [7] для схемы [5] написаны краевые условия для промежуточного значения $y^{n+1/2}$, приводящие к тому же результату. Схемы [2], [5], [7] и ряд других схем при согласованном задании правых частей или краевых условий, как указано в [3], [4], можно трактовать как вычислительные алгоритмы, реализующие одну и ту же схему с расщепленным оператором. Все эти схемы алгебраически тождественны.

В [8] для параболического уравнения в банаховом пространстве с оператором

$$A = \sum_{\alpha=1}^{\rho} A_\alpha \text{ или } A = \sum_{\alpha=1}^{\rho} A_{\alpha\beta},$$

где A_α и $A_{\alpha\beta}$ — операторы более простой структуры, чем A, рассматривались аддитивные (локально-одномерные) схемы, представляющие собой последовательность промежуточных (в простейшем случае одномерных) схем. Погрешность аппроксимации для аддитивной схемы есть сумма погрешностей аппроксимации (см. [9]) для всех промежуточных схем (аддитивность аппроксимации). С этой точки зрения продольно-поперечная схема [5] (ППС) является локально-одномерной схемой специального вида.

2. Одной из основных задач теории разностных схем является отыскание достаточных условий устойчивости.

Переход к изучению разностных схем как операторных уравнений в абстрактном пространстве H со скалярным произведением позволяет (см. [10]) при помощи метода энергетических неравенств получить достаточные условия устойчивости двухслойных и многослойных схем в форме, удобной для проверки. При этом используется лишь такая общая информация относительно операторов, как положительность (полуограниченность снизу) и самосопряженность. Так, например, для двухслойной схемы

$$By_{\bar t} + A\check{y} = 0, \qquad 0 < t = j\tau, \qquad y(0) = y_0, \qquad y_{\bar t} = (y - \check{y})/\tau,$$
$$y = y^{j+1}, \qquad \check{y} = y^j,$$

где A и B — линейные операторы в H, $\tau > 0$ — число, достаточное условие устойчивости, при котором $\|y^j\|_a \leqslant \|y_0\|_a$ ($\|y\|_a = \sqrt{(Ay, y)}$, A не зависит от t), имеет вид

$$(By, y) \geqslant 0.5\tau(Ay, y), \qquad (Ay, y) \geqslant 0, \qquad (By, y) \geqslant 0,$$

если A самосопряжен. Отсюда, в частности, для схемы

$$y_{\bar t} + A(\sigma y + (1 - \sigma)\check{y}) = 0, \qquad 0 < t = j\tau, \ldots, \qquad y(0) = y_0,$$

следует достаточное условие устойчивости $\sigma \geqslant 0.5 - 1/\tau\|A\|$, так как $B = E + \sigma\tau A$.

Более тонкие оценки для устойчивости по начальным данным требуются при доказательстве сходимости итерационных схем.

3. В этой заметке указанные выше вопросы (алгебраическая тождественность и устойчивость) общей теории иллюстрируются на примере итерационных схем решения стационарного уравнения $(A_1 + A_2)v = f$, где A_1 и A_2 — линейные положительно определенные операторы в вещественном гильбертовом пространстве H.

В § 1 показано, что ППС алгебраически тождественна трем весьма простым локально-одномерным схемам.

В [11] изучалась скорость сходимости ППС для случая, когда A_1 и A_2 — произвольные положительно определенные операторы.

В § 2, являющемся развитием работы [11], получены новые оценки для скорости сходимости ППС. Помимо предположения о положительной определенности A_1 и A_2:

$$(Ay, y) \geqslant \delta\|y\|^2, \qquad \delta = \text{const} > 0,$$

используется условие

$$\|Ay\|^2 \leqslant \Delta(Ay, y), \qquad \Delta = \text{const} > 0,$$

которое не является ограничением общности, так как для любого положительно определенного оператора A

$$\Delta \leqslant \frac{1}{\delta}\|A\|^2 \qquad (\Delta = \|A\| \text{ в случае } A^* = A).$$

В § 3 на примерах показано, что Δ вычисляется просто для некоторых несамосопряженных операторов.

При оценке скорости сходимости ППС основную роль играет оценка нормы оператора перехода (теорема 5)

$$\|(E + \sigma\tau A)^{-1}(E - (1-\sigma)\tau A)\| \leqslant \sqrt{\rho},$$

$$\rho = \frac{1 - 2(1-\sigma)\tau\delta + (1-\sigma)^2\tau^2\delta\Delta}{1 + 2\sigma\tau\delta + \sigma^2\tau^2\delta\Delta},$$

из которой, в частности, следует условие устойчивости $\sigma \geqslant 0.5 - 1/\tau\Delta$ для приведенной выше схемы с весами без предположения о самосопряженности оператора A.

Показано, что для уменьшения начальной погрешности в $1/\varepsilon$ раз ($\varepsilon > 0$ — заданная точность) достаточно, пользуясь ППС, произвести

$$\nu(\varepsilon) \geqslant \ln\frac{1}{\varepsilon}\left[\ln\frac{1+\sqrt{\eta}}{1-\sqrt{\eta}}\right]^{-1}$$

итераций, где $\eta = \delta/\Delta$ $(\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2))$ при $\tau = 1/\sqrt{\delta\Delta}$.

Отметим, что другими авторами (см., например, [14], [15], [17], [18]) сходимость ППС изучалась в предположении, что A_1, A_2 — конечномерные, положительно-определенные, самосопряженные и перестановочные операторы.

В § 3 рассмотрены некоторые применения общей теории § 2.

Показано, что ППС сходится для разностной задачи Дирихле в произвольной области как в случае самосопряженного эллиптического оператора с переменными коэффициентами на произвольных сетках, так и в случае несамосопряженного оператора. Из оценки для $\nu(\varepsilon)$ следует, что $\nu(\varepsilon) \approx \frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ при $h \to 0$, где h — шаг сетки.

Рассматривается также приложение общей теории к уравнению переноса. В [12] и [13] была предложена итерационная схема, которая, как следует из § 1, алгебраически тождественна ППС. Поэтому ее сходимость при любых τ и оценка скорости сходимости следуют из [11] (достаточно использовать то, что A_1 и A_2 — положительно определенные операторы, и вычислить $\|A_1\|$, $\|A_2\|$). Использование теоремы 5 (из § 1), учитывающей самосопряженность оператора A_2, позволяет улучшить оценку [11] для скорости сходимости.

Сравнение с методом простой итерации показывает, что вопрос о целесообразности использования ППС для уравнения переноса излучения как экономичного алгоритма нуждается в дополнительном изучении.

В п. 4, § 3 рассмотрена ППС для решения разностной задачи Дирихле в произвольной p-мерной области, получающаяся при разбиении разностного оператора Лапласа на сумму несамосопряженных операторов. Такая схема при $p = 2$ и прямоугольной области применялась В. К. Саульевым для уравнения теплопроводности (перемежающийся метод). Показано, что и в этом случае $\nu(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Мы ограничились небольшим числом примеров, чтобы проиллюстрировать, как следует пользоваться полученными в § 2 оценками скорости сходимости (хотя результаты § 3 представляют и самостоятельный интерес).

§ 1. Сравнение различных итерационных схем

Пусть дано уравнение

$$(A_1 + A_2) v = f, \tag{1}$$

где A_1 и A_2 — линейные операторы в вещественном гильбертовом пространстве H. Для его решения можно воспользоваться итерационной ППС

$$\begin{gathered}(E + \tau A_1)\bar{y} = (E - \tau A_2) y^k + \tau f, \\ (E + \tau A_2) y^{k+1} = (E - \tau A_1)\bar{y} + \tau f, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ y^0 = y_0 \in H,\end{gathered} \tag{2}$$

где E — единичный оператор, k — номер итерации, $\bar{y} = y^{k+1/2}$ — промежуточное значение (подытерация), τ — релаксационный параметр ($\tau = \tau_k$, вообще говоря, зависит от k). Наряду с (2) рассмотрим схему

$$\begin{gathered}y_{(1)} = (E - \tau A_2) y^k + \tau f_1, \qquad (E + \tau A_1) y_{(2)} = y_{(1)} + \tau (f - f_1), \\ y_{(3)} = (E - \tau A_1) y_{(2)} + \tau f_2, \qquad (E + \tau A_2) y^{k+1} = y_{(3)} + \tau (f - f_2), \\ k = 0, 1, \ldots, \qquad y^0 = y_0,\end{gathered} \tag{3}$$

где f_1 и f_2 — произвольные элементы из H.

Схема (3) при любых f_1 и f_2 алгебраически тождественна схеме (2), т. е. y^{k+1}, найденные из (2) и (3), совпадают. В самом деле, складывая уравнения (3) — первое со вторым и третье с четвертым,— исключим $y_{(1)}$ и $y_{(3)}$ и получим уравнения (2) с $\bar{y} = y_{(2)}$.

Покажем, что схеме (2) алгебраически тождественны схемы

$$\begin{gathered}\bar{y}_{(1)} = (E - \tau A_2)\bar{y}^k + \tau f_1, \qquad (E + \tau A_1)\bar{y}_{(2)} = (E - \tau A_1)\bar{y}_{(1)} + 2\tau (f - f_1), \\ (E + \tau A_2)\bar{y}^{k+1} = \bar{y}_{(2)} + \tau f_1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \bar{y}^0 = y_0,\end{gathered} \tag{4}$$

и

$$\begin{gathered}\tilde{y}_{(1)} = (E - \tau A_2)\tilde{y}^k + \tau f_1, \qquad \tilde{y}_{(2)} = (E - \tau A_1)\tilde{y}_{(1)} + \tau \tilde{f}_2, \\ (E + \tau A_1)\tilde{y}_{(3)} = \tilde{y}_{(2)} + \tau [2(f - f_1) - \tilde{f}_2], \qquad (E + \tau A_2)\tilde{y}^{k+1} = \tilde{y}_{(3)} + \tau f_1, \\ \tilde{y}^0 = y_0.\end{gathered} \tag{5}$$

Для этого достаточно показать, что (4) и (5) эквивалентны схеме (3) при $f_2 = f_1$, если $\bar{y}^k = y^k$, $\tilde{y}^k = y^k$. Сравнивая (4) с (3), видим, что первое и последнее уравнения схем (3) и (4) одинаковы, $\bar{y}_{(1)} = y_{(1)}$. Покажем, что $\bar{y}_{(2)} = y_{(3)}$. Вводя $\bar{y} = 0{,}5(\bar{y}_{(1)} + \bar{y}_{(2)})$, заменим второе уравнение (4) двумя уравнениями:

$$\bar{y}_{(2)} = (E - \tau A_1)\bar{y} + \tau(f - f_1), \qquad (E + \tau A_1)\bar{y} = \bar{y}_{(1)} + \tau(f - f_1). \quad (6)$$

Найденное отсюда $\bar{y}_{(2)}$ совпадает с $\bar{y}_{(2)}$ из второго уравнения (4). В самом деле, вычитая второе уравнение (6) из первого, найдем $\bar{y} = 0.5(\bar{y}_{(1)} + \bar{y}_{(2)})$. После подстановки этого выражения в первое уравнение (6), получим второе уравнение (4).

Тем самым доказана алгебраическая эквивалентность (4) схеме (3), а следовательно, и ППС (2) *).

Складывая второе и третье уравнения (5), получим

$$(E + \tau A_1)\tilde{y}_{(3)} = (E - \tau A_1)\tilde{y}_{(1)} + 2\tau(f - f_1).$$

Так как $\tilde{y}_{(1)} = \bar{y}_{(1)}$, то $\tilde{y}_{(3)} = \bar{y}_{(2)}$ и схемы (5) и (4) тождественны.

Таким образом, схемы (3), (4) и (5) алгебраически тождественны схеме (2) для любых линейных операторов A_1 и A_2 (линейность A_1 и A_2 использовалась при переходе от (6) ко второму уравнению (4)). При этом предполагается, что существуют $(E + \tau A_\alpha)^{-1}$, $\alpha = 1, 2$. Это единственное ограничение на A_α.

С другой стороны, решение задачи (2) удовлетворяет уравнению

$$(E + \tau A_1)(E + \tau A_2)y^{k+1} = (E - \tau A_1)(E - \tau A_2)y^k + 2\tau f. \quad (7)$$

В этом можно убедиться, если найти из (2)

$$2\bar{y} = (E + \tau A_2)y^{k+1} + (E - \tau A_2)y^k \quad (8)$$

и подставить это выражение в первое или второе уравнение (2). Если (7) имеет единственное решение, то (7) и (2) алгебраически тождественны. В самом деле, подставляя $(E + \tau A_2)y^{k+1} = 2\bar{y} - (E - \tau A_2)y^k$ в (7), получим первое уравнение (2); из него и из (8) следует второе уравнение (2).

Схема расщепляющегося оператора (7), как было показано в [1], [4], эквивалентна ряду других схем, в частности ППС. Если A_1 и A_2 перестановочны, то (7) эквивалентна схеме [3] (см. также [1], [2]):

$$(E + \tau A_1)\bar{y} = (E - \tau A_1)y^k, \quad (9)$$

$$(E + \tau A_2)y^{k+1} = (E - \tau A_2)\bar{y} + 2\tau\varphi, \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad y^0 = y_0, \quad (10)$$

где φ — решение уравнения

$$(E + \tau A_1)\varphi = f \quad (11)$$

(см. [1], [4]).

---

*) Доказательство эквивалентности схем (3) и (4) можно провести путем исключения промежуточных значений $y_{(1)}$, $y_{(2)}$, $y_{(3)}$ в (3) и $\bar{y}_{(1)}$, $\bar{y}_{(2)}$ в (4). Излагаемый здесь метод доказательства, предложенный И. В. Фрязиновым, проще.

Таким образом, существует большое число схем, эквивалентных ППС (2).

При записи схем в операторной форме вопрос о неоднородных краевых условиях для промежуточных значений $\bar{y}$, y_1 и т. д. не возникает, так как при этом разностные операторы A_1 и A_2 определены в пространстве функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям, а неоднородные краевые условия учитываются правой частью.

Рассмотренные выше схемы можно использовать также для решения нестационарных уравнений, например для уравнения теплопроводности (с шагом 2τ).

В зависимости от способа задания краевых условий для промежуточных значений ($\bar{y}$, $y_{(1)}$, $y_{(2)}$ и т. д.) мы будем получать различные схемы. Эквивалентность этих схем имеет место лишь при согласованном задании краевых условий (см. [1] — [4]).

§ 2. Сходимость итерационной схемы

1. Пусть v — решение исходной задачи (1), y^{k+1} — решение задачи (2). Для разности $z^{k+1} = y^{k+1} - v$ получаем задачу Коши

$$\begin{gathered}(E + \tau A_1)\bar{z} = (E - \tau A_2)z^k, \qquad \bar{z} = \bar{y} - v, \qquad z^0 = y_0 - v,\\ (E + \tau A_2)z^{k+1} = (E - \tau A_1)\bar{z}, \qquad k = 0,1\ldots,\\ z^0 = z_0 = y_0 - v.\end{gathered} \tag{12}$$

Чтобы ответить на вопрос о скорости сходимости метода итераций (12), надо оценить скорость затухания начальной невязки $z_0 = y_0 - v$ с ростом числа итераций. Для этого надо изучить устойчивость задачи (12) по начальным данным.

Пусть $(\ ,\ )$ — скалярное произведение, а $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ — норма в вещественном гильбертовом пространстве H.

Будем всюду предполагать, что операторы A_α положительно определены:

$$(A_\alpha y, y) \geqslant \delta_\alpha \|y\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \quad \delta_\alpha = \text{const} > 0, \quad y \in \text{H}. \tag{13}$$

Сходимость ППС изучалась в [14] — [15] в комплексном конечномерном пространстве $\tilde{H}_N$. В силу известной теоремы функционального анализа (см. [16], гл. V) из положительности линейного оператора A_α, заданного в комплексном гильбертовом пространстве, следует его самосопряженность.

В [11] метод ППС применялся в качестве экономичного способа решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений. Предполагалось, что матрица A системы представима в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где A_1 и A_2 — треугольные матрицы, удовлетворяющие лишь условию (13). Для доказательства сходимости применялся метод энергетических неравенств, использующий лишь тот факт, что A_1 и A_2 — операторы в пространстве со скалярным произведением, удовлетворяющие условию (13).

Теорема 3 работы [11] устанавливает, что итерационная схема вида (2) сходится со скоростью геометрической прогрессии при любом $\tau > 0$, знаменатель ρ прогрессии зависит от δ_1, δ_2 и $\| A_1 \|$, $\| A_2 \|$. Указан способ

выбора параметра τ, минимизирующего ρ. Доказательство теоремы 3 проводилось для случая $D = \frac{1}{\tau}E$, при котором уравнения (23) из [11] переходят в (12).

Для последующего изложения целесообразно сформулировать результат, вытекающий из теоремы 3 работы [11], в виде отдельной теоремы, изменив обозначения по сравнению с [11].

Теорема 1. *Если A_α — положительно определенные операторы, то схема* (2) *сходится при любом $\tau > 0$, так что для решения задачи* (12) *имеет место оценка*

$$\| z^{k+1} \|_{(2)} \leqslant \rho \| z^k \|_{(2)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

где

$$\| z \|_{(\alpha)}^2 = \| z \|^2 + \tau^2 \| A_\alpha z \|^2, \qquad \rho^2 = \rho_1^2 \rho_2^2, \qquad \rho_\alpha^2 = \frac{1 - \varkappa_\alpha}{1 + \varkappa_\alpha}, \tag{15}$$

$$\varkappa_\alpha = \frac{2\tau\delta_\alpha}{1 + \tau^2 \| A_\alpha \|^2}, \qquad \alpha = 1,2. \tag{16}$$

Доказательство, данное в [11], состоит в следующем. Вычислим квадраты норм обеих частей (12) и учтем, что

$$\| (E \pm \tau A_\alpha) z \|^2 = \| z \|_{(\alpha)}^2 \pm 2\tau (A_\alpha z, z), \qquad 2\tau (A_\alpha z, z) \geqslant \varkappa_\alpha \| z \|_{(\alpha)}^2$$

(лемма 3 из [11]), так как

$$\| z \|_{(\alpha)}^2 = \| z \|^2 + \tau^2 \| A_\alpha z \|^2 \leqslant (1 + \tau^2 \| A_\alpha \|^2) \| z \|^2 \leqslant \frac{1}{\delta_\alpha} (1 + \tau^2 \| A_\alpha \|^2) (A_\alpha z, z).$$

Тогда получим

$$(1 + \varkappa_1) \| \bar{z} \|_{(1)}^2 \leqslant (1 - \varkappa_2) \| z^k \|_{(2)}^2, \qquad (1 + \varkappa_2) \| z^{k+1} \|_{(2)}^2 \leqslant (1 - \varkappa_1) \| \bar{z} \|_{(1)}^2,$$

$$\| \bar{z} \|_{(1)}^2 \leqslant \frac{1 - \varkappa_2}{1 + \varkappa_1} \| z^k \|_{(2)}^2, \qquad \| z^{k+1} \|_{(2)}^2 \leqslant \frac{1 - \varkappa_1}{1 + \varkappa_2} \| \bar{z} \|_{(1)}^2 \leqslant \rho_1^2 \rho_2^2 \| z^k \|_{(2)}^2.$$

Из (14) следует $\| z^\nu \|_{(2)} \leqslant \rho^\nu \| z_0 \|_{(2)}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — требуемая точность, так что $\| z^\nu \|_{(2)} \leqslant \varepsilon \| z_0 \|_{(2)}$. Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что для уменьшения начальной погрешности в $1 / \varepsilon$ раз достаточно $\nu(\varepsilon)$ итераций, где

$$\nu(\varepsilon) \geqslant \ln \frac{1}{\varepsilon} \Big/ \ln \frac{1}{\rho}. \tag{17}$$

Следствие. Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\| A \| = \max(\| A_1 \|, \| A_2 \|)$. Тогда $\min \rho(\tau) = \rho(\tau^*) = \bar{\rho}$, $\tau^* = 1 / \| A \|$, где $\bar{\rho} = (1 - \eta) / (1 + \eta)$, $\eta = \delta / \| A \|$.

2. Предположим теперь, что, кроме (13), выполнены условия

$$\| A_\alpha y \|^2 \leqslant \Delta_\alpha (A_\alpha y, y), \qquad \Delta_\alpha = \text{const} > 0, \qquad \alpha = 1, 2, \qquad y \in H. \tag{18}$$

Лемма 1. *Для линейного положительного* ($(Ay, y) \geqslant 0$) *и самосопряженного оператора A выполнено неравенство*

$$\| Ay \|^2 \leqslant \| A \| (Ay, y), \qquad y \in H. \tag{19}$$

В самом деле, полагая $z = Ay$ в обобщенном неравенстве Коши — Буняковского $(Ay, z)^2 \leqslant (Ay, y)(Az, z)$, получим

$$\|Ay\|^4 = (Ay, z)^2 \leqslant (Ay, y)(Az, z) \leqslant \|A\|\|z\|^2(Ay, y) = \\ = \|A\|\|Ay\|^2(Ay, y).$$

Отсюда после сокращения на $\|Ay\|^2$ следует (19).

Сравнивая (19) и (18), видим, что для самосопряженного оператора A_α

$$\Delta_\alpha = \|A_\alpha\|.$$

Если A_α — произвольный положительно определенный оператор, то $\Delta_\alpha \leqslant \|A_\alpha\|^2 / \delta_\alpha$, так как

$$\|A_\alpha y\|^2 \leqslant \|A_\alpha\|^2 \|y\|^2 \leqslant \|A_\alpha\|^2 \frac{1}{\delta_\alpha}(A_\alpha y, y).$$

Таким образом, условие (18) выполнено для любого положительно определенного оператора.

Теорема 2. *Пусть A_1 и A_2 удовлетворяют условиям* (13) *и* (18). *Тогда верны формулы* (14), (15), *когда*

$$\varkappa_\alpha = \frac{2\tau\delta_\alpha}{1 + \tau^2\delta_\alpha\Delta_\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{20}$$

Достаточно убедиться в том, что $2\tau(A_\alpha z, z) \geqslant \varkappa_\alpha \|z\|_{(\alpha)}^2$, где $\varkappa_\alpha$ определяется по формуле (20). В самом деле,

$$\|z\|_{(\alpha)}^2 = \|z\|^2 + \tau^2\|A_\alpha z\|^2 \leqslant \|z\|^2 + \tau^2\Delta_\alpha(A_\alpha z, z) \leqslant \left(\frac{1}{\delta_\alpha} + \tau^2\Delta_\alpha\right)(A_\alpha z, z)$$

и

$$(A_\alpha z, z) \geqslant \delta_\alpha(1 + \tau^2\delta_\alpha\Delta_\alpha)^{-1}\|z\|_{(\alpha)}^2.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (13) *и* (18). *Тогда итерационный процесс* (2) *с параметром* τ, *равным*

$$\tau = \tau^* = 1 / \sqrt{\delta\Delta}, \qquad \delta = \min(\delta_1, \delta_2), \qquad \Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2),$$

сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$\bar\rho = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, \qquad \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \tag{21}$$

так что

$$\|y^{k-1} - v\|_{(2)} \leqslant \bar\rho^{k+1}\|y_0 - v\|_{(2)}. \tag{22}$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что

$$\rho \leqslant \bar\rho = (1 - \bar\varkappa)/(1 + \bar\varkappa), \qquad \bar\varkappa = 2\tau\delta/(1 + \tau^2\delta\Delta),$$
$$\min\bar\rho(\tau) = \rho(\max\bar\varkappa), \qquad \max\bar\varkappa = \bar\varkappa(\tau^*) = \sqrt{\eta}.$$

Для числа итераций $\nu(\varepsilon)$ при малых значениях характерного параметра η верна асимптотическая оценка

$$\nu(\varepsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{\eta}} \ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Заметим, что при заданных δ_α, Δ_α, $\alpha = 1, 2$, значение $\tau = \tau^*$, минимизирующее $\rho = \rho_1\rho_2$, можно найти либо графически, либо при помощи таблицы функции $\rho^2(\tau)$.

Из (14) видно, что схема (12) сходится, если один из операторов, например A_1, неотрицателен ($\delta_1 = 0$), а второй положительно определен ($\delta_2 > 0$); тогда

$$\rho = \sqrt{\bar{\rho}},\ \bar{\rho} = (1 - \sqrt{\eta}) / (1 + \sqrt{\eta}),\ \eta = \delta_2 / \Delta_2 \quad \text{при} \quad \tau = 1 / \sqrt{\delta_2\Delta_2}.$$

3. Получим оценки для решения задачи Коши (12) другим способом.

В ряде случаев оценки для скорости сходимости могут быть улучшены. Будем предполагать, что параметр $\tau = \tau_k > 0$ зависит от k, так что

$$(E + \tau_{k+1}A_1)\bar{z} = (E - \tau_{k+1}A_2)z^k, \quad (E + \tau_{k+1}A_2)z^{k+1} = (E - \tau_{k+1}A_1)\bar{z},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{23}$$
$$z^0 = z_0.$$

Отсюда находим (см. [15])

$$z^{k+1} = T_{k+1}z^k,$$
$$T_{k+1} = (E + \tau_{k+1}A_2)^{-1}(E - \tau_{k+1}A_1)(E + \tau_{k+1}A_1)^{-1}(E - \tau_{k+1}A_2). \tag{24}$$

Очевидно, что операторы $(E + \tau_1 A)^{-1}$ и $(E - \tau_2 A)$ перестановочны, $(E + \tau_1 A)^{-1}(E - \tau_2 A) = (E - \tau_2 A)(E + \tau_1 A)^{-1}$. В самом деле,

$$(E - \tau_2 A)(E + \tau_1 A)^{-1} = \left[\left(\frac{\tau_2}{\tau_1} + 1\right)E - \frac{\tau_2}{\tau_1}(E + \tau_1 A)\right](E + \tau_1 A)^{-1} =$$
$$= \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} + 1\right)(E + \tau_1 A)^{-1} - \frac{\tau_2}{\tau_1}(E + \tau_1 A)^{-1}(E + \tau_1 A) = \tag{25}$$
$$= (E + \tau_1 A)^{-1}\left[\left(\frac{\tau_2}{\tau_1} + 1\right)E - \frac{\tau_2}{\tau_1}(E + \tau_1 A)\right] = (E + \tau_1 A)^{-1}(E - \tau_2 A)$$

($\tau_1, \tau_2 > 0$ — любые числа). Поэтому (см. [15])

$$T_{k+1} = (E + \tau_{k+1}A_2)^{-1}(E + \tau_{k+1}A_1)^{-1}(E - \tau_{k+1}A_1)(E - \tau_{k+1}A_2),$$
$$z^{k+1} = (E + \tau_{k+1}A_2)^{-1}B_1(\tau_{k+1}, \tau_{k+1})B_2(\tau_k, \tau_{k+1})\, B_1(\tau_k, \tau_k) \ldots \tag{26}$$
$$\ldots B_1(\tau_1, \tau_1)(E - \tau_1 A_2)z^0,$$

где

$$B_\alpha(\tau_m, \tau_n) = (E + \tau_m A_\alpha)^{-1}(E - \tau_n A_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2. \tag{27}$$

Из (26) следует

$$\|(E + \tau_{k+1}A_2)z^{k+1}\| \leqslant \prod_{j=1}^{k+1}\|B_1(\tau_j, \tau_j)\| \prod_{j=1}^{k}\|B_2(\tau_j, \tau_{j+1})\| \|(E - \tau_1 A_2)z^0\|. \tag{28}$$

Таким образом, мы должны оценить по норме оператор вида

$$B(\tau_1, \tau_2) = (E + \tau_1 A)^{-1}(E - \tau_2 A) \tag{29}$$

при условиях

$$(Ay, y) \geqslant \delta \|y\|_2, \tag{30}$$

$$\|Ay\|_2 \leqslant \Delta(A, y). \tag{30'}$$

Оператор $B(\tau_1, \tau_2)$ является оператором перехода для схемы

$$(E + \tau_1 A) y^{j+1} = (E - \tau_2 A) y^j. \tag{31}$$

Полагая $\tau = \tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 = \sigma\tau$, $\tau_2 = (1-\sigma)\tau$, где $\sigma = \tau_1 / \tau$, перепишем уравнение в виде

$$\begin{gathered} y_{\bar t} + A(\sigma y + (1-\sigma)\check y) = 0, \qquad y_{\bar t} = \frac{y - \check y}{\tau}, \\ y = y^{j+1}, \qquad \check y = y^j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{32}$$

Нам понадобятся проверяемые непосредственно тождества

$$\sigma y + (1-\sigma)\check y = 0.5(y + \check y) + (\sigma - 0.5)\tau y_{\bar t}, \tag{33}$$

$$(y_{\bar t}, \sigma y + (1-\sigma)\check y) = 0.5(\|y\|^2)_{\bar t} + (\sigma - 0.5)\tau \|y_{\bar t}\|^2, \tag{34}$$

$$\|y\|^2 + \|\check y\|^2 = \frac{1}{2}\|y + \check y\|^2 + \frac{1}{2}\tau^2 \|y_{\bar t}\|^2. \tag{35}$$

Лемма 2. *Имеет место тождество*

$$\|\sigma y + (1-\sigma)\check y\|^2 = \sigma\|y\|^2 + (1-\sigma)\|\check y\|^2 + (\sigma^2 - \sigma)\tau^2 \|y_{\bar t}\|^2. \tag{36}$$

Пользуясь (33) и (35), находим

$$\begin{aligned} \|\sigma y + (1-\sigma)\check y\|^2 &= (\sigma y + (1-\sigma)\check y, \quad \sigma y + (1-\sigma)\check y) = \frac{1}{4}\|y + \check y\|^2 + \\ &+ (\sigma - 0.5)\tau(y + \check y, y_{\bar t}) + (\sigma - 0.5)\tau^2 \|y_{\bar t}\|^2 = (\sigma - 0.5)(\|y\|^2 - \|\check y\|^2) + \\ &+ (\sigma^2 - \sigma)\tau^2 \|y_{\bar t}\|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\|y + \check y\|^2 + \frac{1}{2}\tau^2 \|y_{\bar t}\|^2\right) = \\ &= (\sigma - 0.5)(\|y\|^2 - \|\check y\|^2) + (\sigma^2 - \sigma)\tau^2 \|y_{\bar t}\|^2 + \\ &+ 0.5(\|y\|^2 + \|\check y\|^2) = \sigma\|y\|^2 + (1-\sigma)\|\check y\|^2 + (\sigma^2 - \sigma)\tau^2 \|y_{\bar t}\|^2. \end{aligned}$$

Умножим (32) скалярно на $2y^{(\sigma)} = 2(\sigma y + (1-\sigma)\check y)$, и учтем (30), (34), (36):

$$\begin{aligned} \|y\|^2 + 2\tau^2(\sigma - 0.5)\|y_{\bar t}\|^2 + 2\tau\delta[\sigma\|y\|^2 + (1-\sigma)\|\check y\|^2 + \\ + (\sigma^2 - \sigma)\tau^2 \|y_{\bar t}\|^2] \leqslant 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует первое энергетическое неравенство

$$(1 + 2\sigma\tau\delta)\|y\|^2 + 2\tau^2\omega\|y_{\bar t}\|^2 \leqslant (1 - 2(1-\sigma)\tau\delta)\|\check y\|^2, \tag{37}$$

$$\|y\|^2 \leqslant \frac{1 - 2(1-\sigma)\tau\delta}{1 + 2\sigma\tau\delta}\|\check y\|^2 \quad \text{при } \omega \geqslant 0, \tag{38}$$

где

$$\omega = \sigma - 0.5 - \tau\delta\sigma(1-\sigma). \tag{39}$$

Заметим, что из условия $\omega \geqslant 0$ следует

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2\tau\delta}\left[\tau\delta - 1 + \sqrt{1+\tau^2\delta^2}\right] = f(\tau\delta), \quad \text{где } 0.5 \leqslant f(\tau\delta) \leqslant 1.$$

Предположим теперь, что $\omega < 0$.

В этом случае нам понадобится второе энергетическое неравенство. Применим к (32) оператор A^{-1}:

$$A^{-1}y_{\bar{t}} + \sigma y + (1-\sigma)\check{y} = 0. \tag{40}$$

Умножим (40) скалярно на $2\tau y_{\bar{t}}$ и учтем (34):

$$2\tau(A^{-1}y_{\bar{t}},\ y_{\bar{t}}) + 2(\sigma - 0.5)\tau^2\|y_{\bar{t}}\|^2 + \|y\|^2 = \|\check{y}\|^2. \tag{41}$$

Лемма 3. *Если A удовлетворяет* (30) *и* (30′), *то*

$$(A^{-1}y,\ y) \geqslant \frac{1}{\Delta}\|y\|^2, \qquad y \in H. \tag{42}$$

Действительно, полагая $y = Av$, $v = A^{-1}y$ и пользуясь условием (30′), т. е. $\|Av\|^2 \leqslant \Delta(Av, v)$, находим

$$\|y\|^2 = \|Av\|^2 \leqslant \Delta(Av, v) = \Delta(A^{-1}y, y).$$

Из (41) при помощи (42) получим второе энергетическое неравенство

$$2\tau\left(\frac{1}{\Delta} + (\sigma - 0.5)\tau\right)\|y_{\bar{t}}\|^2 + \|y\|^2 \leqslant \|\check{y}\|^2. \tag{43}$$

Отсюда сразу следует

Теорема 4. *Разностная схема* (32) *устойчива по начальным данным, так что $\|y^j\| \leqslant \|y^0\|$ при*

$$\sigma \geqslant 0.5 - \frac{1}{\tau\Delta}.$$

Рассмотрим (37) при $\omega < 0$ и (43) при

$$\sigma > 0.5 - \frac{1}{\tau\Delta}. \tag{44}$$

Нетрудно заметить, что условия $\omega < 0$ и (44) выполнены, если

$$0.5 - \frac{1}{\tau\Delta} < \sigma < \frac{\tau\delta - 1 + \sqrt{1+\tau^2\delta^2}}{2\tau\delta}. \tag{45}$$

Умножим (43) на $C\tau$ и сложим полученное неравенство с (37):

$$(1 + 2\sigma\tau\delta + C\tau)\|y\|^2 \leqslant (1 - 2(1-\sigma)\tau\delta + C\tau)\|\check{y}\|^2, \tag{46}$$

где

$$C\tau = -\frac{\omega\tau\Delta}{1 + (\sigma - 0.5)\tau\Delta} = \frac{(\sigma - 0.5)\tau\Delta + \sigma(1-\sigma)\tau^2\delta\Delta}{1 + (\sigma - 0.5)\tau\Delta}. \tag{47}$$

После подстановки (47) в (46) получим

$$\|y\|^2 \leqslant \frac{1 - 2(1-\sigma)\tau\delta + (1-\sigma)^2\tau^2\delta\Delta}{1 + 2\sigma\tau\delta + \sigma^2\tau^2\delta\Delta}\|\check{y}\|^2. \tag{48}$$

Отсюда и из равенства $y = B(\tau_1, \tau_2)\check{y} = (E + \tau_1 A)^{-1}(E - \tau_2 A)\check{y}$ находим

$$\|B(\tau_1, \tau_2)\| \leqslant \rho(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{\frac{1 - 2\tau_2\delta + \tau_2^2\delta\Delta}{1 + 2\tau_1\delta + \tau_1^2\delta\Delta}}. \tag{49}$$

В частности, при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ имеем

$$\|(E + \tau A)^{-1}(E - \tau A)\| \leqslant \sqrt{\frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}} = \rho(\tau), \qquad \varkappa = \frac{2\tau\delta}{1 + \tau^2\delta\Delta}. \tag{50}$$

Оценка (49) получена при условиях (45) или при $\sigma > 0.5 - 1/\tau\Delta$ и $\omega = \sigma - 0.5 - \tau\delta\sigma(1 - \sigma) < 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{\tau_1}{1 + 2\tau_1\delta} < \tau_2 < \tau_1 + \frac{2}{\Delta}. \tag{51}$$

Тем самым доказана

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (30), (30′) *и* (51). *Тогда имеет место оценка*

$$\|(E + \tau_1 A)^{-1}(E - \tau_2 A)\| \leqslant \rho(\tau_1, \tau_2), \tag{52}$$

где

$$\rho(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{\frac{1 - 2\tau_2\delta + \tau_2^2\delta\Delta}{1 + 2\tau_1\delta + \tau_1^2\delta\Delta}} < 1. \tag{53}$$

Вернемся теперь к неравенству (28). Учитывая, что

$$\|(E + \tau_{k+1}A_2)z^{k+1}\|^2 \geqslant (1 + \varkappa(\tau_{k+1}))\|z^{k+1}\|^2,$$

$$\|(E - \tau_1 A_2)z^0\|^2 \leqslant (1 - \varkappa_2(\tau_1))\|z^0\|_{(2)}^2, \quad \|z^0\|_{(2)}^2 = \|z^0\|^2 + \tau_1^2\|A_2 z^0\|^2,$$

получаем

$$\|z^{(k+1)}\|_{(2)} \leqslant \prod_{j=1}^{k} \rho_1(\tau_j, \tau_j)\rho_2(\tau_j, \tau_{j+1})\rho_1(\tau_{k+1}, \tau_{k+1}) \sqrt{\frac{1 - \varkappa_2(\tau_1)}{1 + \varkappa_2(\tau_{k+1})}}\|z^0\|_{(2)}, \tag{54}$$

где $\|z^k\|_{(2)} = (\|z^k\|^2 + \tau_k^2\|A_2 z^k\|^2)^{1/2}$, $\quad k = 0, 1, 2\ldots$

Отсюда при $\tau_k = \tau = \text{const}$ следует оценка

$$\|z^{k+1}\|_{(2)} \leqslant \rho^{k+1}\|z^0\|_{(2)}, \qquad \rho = \sqrt{\rho_1\rho_2}, \tag{55}$$

$$\rho_\alpha^2 = \frac{1 - \varkappa_\alpha}{1 + \varkappa_\alpha}, \qquad \varkappa_\alpha = 2\tau\delta_\alpha/(1 + \tau^2\delta_\alpha\Delta_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2,$$

полученная ранее (теорема 2).

Замечая, что $(1 + \tau^2\delta_2^2)\|z\|^2 \leqslant \|z\|_{(2)}^2 \leqslant (1 + \tau^2\|A_2\|^2)\|z\|^2$, из (55) находим

$$\|z^{k+1}\| \leqslant \sqrt{\frac{1 + \tau^2\|A_2\|^2}{1 + \tau^2\delta_2^2}}\,\rho^{k+1}\|z^0\|. \tag{56}$$

Оценка (54) показывает, что итерации по схеме (2) сходятся как при условии $\tau_k \geqslant \tau_{k-1}$, так и при $\tau_k \leqslant \tau_{k-1}$, если только выполнены неравенства $\tau_{k-1}(1 + 2\tau_{k-1}\delta)^{-1} < \tau_k < \tau_{k-1} + 2/\Delta$. Однако наибольшую скорость

сходимости удается получить при $\tau_k = \tau_{k-1} = \tau$ соответствующим выбором τ.

Замечание. Приведем другую, эквивалентную формулировку теоремы 5: *если выполнены условия* (30), (30′) *и* (45), *то*

$$\|(E+\sigma\tau A)^{-1}(E-(1-\sigma)\tau A)\| \leqslant \rho, \qquad \rho = \left(\frac{1-2(1-\sigma)\tau\delta+(1-\sigma)^2\tau^2\delta\Delta}{1+2\sigma\tau\delta+\sigma^2\tau^2\delta\Delta}\right)^{1/2}$$

4. Рассмотрим некоторые специальные случаи.

Пусть $H = H_N$ — N-мерное пространство, A — линейный положительно определенный и самосопряженный оператор в H_N. Тогда имеет место известная оценка (см., например, [17])

$$\|(E+\tau A)^{-1}(E-\tau A)\| \leqslant \max\left(\frac{1-\tau\lambda_1}{1+\tau\lambda_1}, \frac{\tau\lambda_N-1}{\tau\lambda_N+1}\right) \text{ при } \frac{1}{\lambda_N} \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{\lambda_1}, \tag{57}$$

где $\lambda_1 = \delta$ и $\lambda_N = \|A\|$ — наименьшее и наибольшее собственные значения оператора A. В самом деле, пусть $A\xi_s = \lambda_s\xi_s$, $s = 1, 2, \ldots, N$, где $\{\lambda_s, \xi_s\}$ — система собственных значений и собственных функций оператора A, $\check{y} = \sum_{s=1}^{N} c_s\xi_s$. Тогда

$$y = (E+\tau A)^{-1}(E-\tau A)\check{y} = \sum_{s=1}^{N} \frac{1-\tau\lambda_s}{1+\tau\lambda_s} c_s\xi_s,$$

$$\|y\| \leqslant \max_{1\leqslant s\leqslant N}\left|\frac{1-\tau\lambda_s}{1+\tau\lambda_s}\right| \leqslant \max\left(\frac{1-\tau\lambda_1}{1+\tau\lambda_1}, \frac{\tau\lambda_N-1}{\tau\lambda_N+1}\right)$$

при $\frac{1}{\lambda_N} \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{\lambda_1}$.

Выбирая $\tau^* = 1/\sqrt{\lambda_1\lambda_N}$, получаем оценку

$$\|(E+\tau^*A)^{-1}(E-\tau^*A)\| \leqslant \rho^*, \quad \rho^* = \frac{1-\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}, \qquad \eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_N}. \tag{58}$$

Теорема 5 в этом случае дает оценку

$$\|(E+\tau^*A)^{-1}(E-\tau^*A)\| \leqslant \sqrt{\rho^*} \tag{59}$$

при этом же значении $\tau = \tau^*$, $\lambda_1 = \delta$, $\Delta = \|A\| = \lambda_N$. Пусть A_1 и A_2 перестановочны. Тогда (26) дает

$$z^{k+1} = \prod_{j=1}^{k+1} B_1(\tau_j, \tau_j) B_2(\tau_j, \tau_j) z^0.$$

Если $H = H_N$ и хотя бы один оператор A_2 самосопряжен, то следует пользоваться циклическим набором параметров $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots \geqslant \tau_{k_0}$, $\tau_{k+nk_0} = \tau_k$ при $1 \leqslant k \leqslant k_0$, $n = 1, 2, \ldots, n_0$. Пусть A_1 — положительный оператор. Тогда можно применить одномерный вариант выбора $\{\tau_k\}$. Для $\nu(\varepsilon)$ получим оценку

$$\nu(\varepsilon) \approx \ln\frac{1}{\varepsilon}\Big/\ln\frac{1}{\eta_2}, \qquad \eta_2 = \frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_N^{(2)}},$$

где $\lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_N^{(2)}$ — наименьшее и наибольшее собственные значения оператора A_2.

Случай, когда $H = H_N$, $A_1^* = A_1$, $A_2^* = A_2$ и $A_1A_2 = A_2A_1$, хорошо изучен (см., например, [17], [18]), и мы его не рассматриваем.

Из предыдущего следует теорема, которой мы воспользуемся в § 3, п. 3.

Теорема 6. *Пусть $H = H_N$, A_1 и A_2 — положительно определенные операторы, A_2 самосопряжен. Тогда для решения задачи* (12) *верна оценка*

$$\|z^{k+1}\|_{(2)} \leqslant \rho \|z^k\|_{(2)} \text{ при } \tau = \tau^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(2)}\lambda_N^{(2)}}}, \tag{60}$$

где $\|z\|_{(2)}^2 = \|z\|^2 + (\tau^*)^2 \|A_2 z\|^2$, $\rho = \rho_1\rho_2^*$, $\rho_2^* = (1 - \sqrt{\eta_2})/(1 + \sqrt{\eta_2})$,

$\rho_1 = \sqrt{(1 - \varkappa_1^*) / (1 + \varkappa_1^*)}$, $\varkappa_1^* = 2\tau^*\delta_1 / (1 + (\tau^*)^2\delta_1\Delta_1)$.

§ 3. Примеры

Рассмотрим некоторые примеры применения оценок, полученных в § 2. Методика исследования стандартна: строится сетка, затем вводится скалярное произведение на множестве сеточных функций и определяются операторы A_1 и A_2; при помощи разностных аналогов формул Грина и других простых приемов находятся характерные параметры δ_α, Δ_α. После этого применяются теорема 2 или теорема 6 (если, например, A_2 самосопряжен).

1. Разностная задача Дирихле для самосопряженного эллиптического уравнения в произвольной области.

Рассмотрим в произвольной области $G + \Gamma$ на плоскости (x_1, x_2) задачу Дирихле

$$(L_1 + L_2)u = -f(x), \qquad x = (x_1, x_2) \in G, \qquad u|_\Gamma = \mu(x);$$

$$h_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \qquad 0 < c_1 \leqslant k_\alpha(x) \leqslant c_2, \qquad \alpha = 1, 2; \tag{61}$$

$$c_1, c_2 = \text{const} > 0.$$

Построим в $\bar{G} = G + \Gamma$ сетку $\bar{\omega}_{h,q} = \omega_{h,q} + \gamma_h$ при помощи равномерного с шагом h_α по x_α разбиения плоскости прямыми $x_\alpha = i_\alpha h_\alpha$.

Граница γ_h сетки состоит из точек пересечения прямых $x_\alpha = i_\alpha h_\alpha$ с границей Γ области G. Потребуем, чтобы шаги h_α^* вблизи границы Γ удовлетворяли условию

$$h_\alpha^* \geqslant q h_\alpha, \tag{62}$$

где q — положительное число, не зависящее от h_α. Такую сетку $\omega_{h,q}$ всегда можно построить, выбросив, например, те узлы, в которых условие (62) нарушается (предполагается, как всегда, что множество узлов $\omega_{h,q}$ связно). Она неравномерна, вообще говоря, вблизи границы.

Напишем разностную схему второго порядка точности для задачи (61):

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)v = -f(x), \qquad x \in \omega_{h,q}, \qquad v|_{\gamma_h} = \mu(x). \tag{63}$$

Здесь $\Lambda_\alpha v = (a_\alpha(x) v_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, $0 < c_1 \leqslant a_\alpha(x) \leqslant c_2$ (обозначения см. [19]).

Система уравнений решается при помощи итераций по ППС:

$$\begin{gathered} \bar{y} - \tau\Lambda_1\bar{y} = y^k + \tau\Lambda_2 y^k + \tau f, \qquad k = 0, 1, 2\ldots, \\ y^{k+1} - \tau\Lambda_2 y^{k+1} = \bar{y} + \tau\Lambda_1\bar{y} + \tau f, \qquad x \in \omega_{h,q}, \\ \bar{y} = \mu(x), \qquad y^{k+1} = \mu(x) \quad \text{при } x \in \gamma_n. \end{gathered} \tag{64}$$

Для погрешности $z^{k+1} = y^{k+1} - v$ получим задачу (12), где $A_\alpha = -\Lambda_\alpha$, $\alpha = 1, 2$,— операторы, действующие в пространстве Ω сеточных функций, заданных в $\omega_{h,q}$ и обращающихся в нуль на границе γ_h. Скалярное произведение в Ω:

$$(y, v) = \sum_{\omega_{h,q}} y(x) v(x) H, \qquad H = \hbar_1\hbar_2, \qquad \hbar_\alpha = 0.5\,(h_\alpha + h_\alpha^{(+1_\alpha)}).$$

Чтобы воспользоваться теоремами 1 и 2, надо убедиться в положительной определенности и самосопряженности A_α. Разностные формулы Грина дают

$$(A_\alpha y, y) \geqslant \delta_\alpha \|y\|^2, \qquad \delta_\alpha = \frac{4c_1}{D_\alpha^2}, \qquad (A_\alpha y, v) = (y, A_\alpha v). \tag{65}$$

Далее находим

$$\|A_\alpha\| \leqslant \frac{4c_2}{qh_\alpha^2} = \Delta_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \text{ так что } \eta_\alpha = \frac{\delta_\alpha}{\Delta_\alpha} = \frac{c_1 q h_\alpha^2}{c_2 D_\alpha^2}. \tag{66}$$

Здесь D_α — диаметр области G по направлению x_α. Из (65) и (66) в силу теоремы 6 сразу следует сходимость ППС (64). Параметр τ выбирается из условия минимума выражения

$$\rho = \max\left(\left|\frac{1-\tau\delta_1}{1+\tau\delta_1}\right|, \left|\frac{1-\tau\Delta_1}{1+\tau\Delta_1}\right|\right)\max\left(\left|\frac{1-\tau\delta_2}{1+\tau\delta_2}\right|, \left|\frac{1-\tau\Delta_2}{1+\tau\Delta_2}\right|\right). \tag{67}$$

Более грубый способ выбора τ^* состоит в следующем. Пусть $h = \min(h_1, h_2)$, $D = \max(D_1, D_2)$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = 4c_1/D^2$, $\Delta = 4c_2/qh^2$, $\Delta_1 \leqslant \Delta$, $\Delta_2 \leqslant \Delta$. Тогда из (67) следует

$$\rho \leqslant \bar{\rho} = \left(\frac{1 - \sqrt{\tilde{q}}\, h/D}{1 + \sqrt{\tilde{q}}\, h/D}\right)^2 \quad \text{при} \quad \tau^* = \frac{1}{4\sqrt{c_1 c_2}} hD\sqrt{q}, \tag{68}$$

$$\tilde{q} = q\frac{c_1}{c_2},$$

а для $\nu(\varepsilon)$ получается асимптотическая оценка *)

$$\nu(\varepsilon) \approx \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\frac{D}{h\sqrt{q}}\ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{69}$$

Оценка $\nu(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$ получается и в том случае, когда ω_h — любая неравномерная сетка, шаги которой $h_\alpha(x_i)$ удовлетворяют во всех узлах

*) Н. С. Бахвалов любезно сообщил нам, что им ранее была получена оценка вида (69) для краевых условий без сноса (схема $O(h)$) и $k_\alpha = \text{const}$.

$x_i \in \bar{\omega}_h$ условию $h_\alpha(x_i) \geqslant h$, где $h = \text{const} > 0$. При этом $\Lambda_\alpha v = (a_\alpha v_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}$ всюду.

2. Рассмотрим теперь задачу Дирихле для несамосопряженного эллиптического оператора с постоянными коэффициентами:

$$(\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2)\, u = -f(x), \qquad x \in G, \qquad u|_\Gamma = \mu(x), \qquad \tilde{L}_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}. \tag{70}$$

Для ее решения на сетке $\bar{\omega}_{h,q}$ воспользуемся монотонной схемой второго порядка точности (см. [20])

$$(\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2)\, v = -f(x), \qquad x \in \omega_{h,q}, \qquad v = \mu(x) \text{ при } x \in \gamma_h,$$
$$\tilde{\Lambda}_\alpha v = \nu_\alpha v_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} + b_\alpha^+ v_{\hat{x}_\alpha} + b_\alpha^- v_{\hat{x}_\alpha}, \tag{71}$$

$$b_\alpha^+ = \frac{r_\alpha + |r_\alpha|}{2} \geqslant 0, \qquad b_\alpha^- = \frac{r_\alpha - |r_\alpha|}{2} \leqslant 0,$$

$$\nu_\alpha = 1 - \frac{R_\alpha}{1+R}, \qquad R_\alpha = 0.5 h_\alpha |r_\alpha|, \qquad \alpha = 1, 2;\ R = R_1 + R_2.$$

Операторы $\tilde{A}_\alpha = -\tilde{\Lambda}_\alpha$, определенные над Ω, положительно определены:

$$(\tilde{A}_\alpha z, z) \geqslant \frac{4}{D_\alpha^2} \|z\|^2, \qquad z \in \Omega, \qquad \delta_\alpha = \frac{4}{D_\alpha^2}, \tag{72}$$

и для них выполнено неравенство

$$\|\tilde{A}_\alpha z\|^2 \leqslant \frac{4(1 + c_3 h_\alpha)}{q h_\alpha^2} (\tilde{A}_\alpha z, z), \qquad c_3 = \max(|r_1|, |r_2|),$$
$$\Delta_\alpha = \frac{4(1 + c_3 h_\alpha)}{q h_\alpha^2}, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{73}$$

Свойство (72) устанавливается при помощи первой разностной формулы Грина (см. [19])

$$(\tilde{A}_\alpha z, z) = (-\tilde{\Lambda}_\alpha z, z) = \nu_\alpha (1, z_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha + \frac{1}{2}(b_\alpha^+ - b_\alpha^-) h_\alpha (1, z_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha =$$
$$= (\nu_\alpha + R_\alpha)(1, z_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha \geqslant \left(1 - \frac{R_\alpha}{1+R} + R_\alpha\right) \frac{4}{D_\alpha^2} \|z\|^2 \geqslant \frac{4}{D_\alpha^2} \|z\|^2, \qquad z \in \Omega,$$

так как $\|z\|^2 \leqslant \frac{D_\alpha^2}{4} \|z_{\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2$ (обозначения см. [19]).

Неравенство (73) устанавливается при помощи неравенства треугольника

$$\|\tilde{A}_\alpha z\| \leqslant \nu_\alpha \|z_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}\| + b_\alpha^+ \|z_{\hat{x}_\alpha}\| + |b_\alpha^-| \|z_{\bar{x}_\alpha}\| \leqslant \nu_\alpha \frac{2}{\sqrt{q} h_\alpha} (1, z_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha^{1/2} +$$
$$+ \frac{|r_\alpha|}{\sqrt{q}} (1, z_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\frac{2\nu_\alpha}{h_\alpha} + |r_\alpha|\right) (1, z_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha^{1/2} = \frac{2(\nu_\alpha + R_\alpha)}{\sqrt{q} h_\alpha} (1, z_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha^{1/2}.$$

Учитывая затем и тождество $(A_\alpha z, z) = (\nu_\alpha + R_\alpha)(1, z_{x_\alpha}^2]_\alpha$, получаем

$$\| A_\alpha z \|^2 \leqslant \frac{4}{qh_\alpha^2} (\nu_\alpha + R_\alpha)(A_\alpha z, z).$$

Из (72) и (73) следует, что ППС для (71) сходится при любом $\tau > 0$. Если $h_1 = h_2 = h$, $D = \max(D_1, D_2)$, то

$$\rho \leqslant \bar{\rho} = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, \qquad \eta = \frac{qh^2}{(1 + c_3 h) D^2} \quad \text{при} \quad \tau = \tau^* = \frac{1}{\sqrt{\delta\Delta}}, \tag{74}$$

где $\delta = 4 / D^2$, $\Delta = 4(1 + c_3 h) / qh^2$. Для числа итераций верна асимптотическая оценка

$$\nu(\varepsilon) = \ln \frac{1}{\varepsilon} \Big/ \ln \frac{1}{\rho} \approx \frac{D}{\sqrt{q}\, h} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \tag{75}$$

Аналогичная оценка получается и для разностной задачи Дирихле в случае несамосопряженного эллиптического оператора с переменными коэффициентами

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] - q_0(x) u = -f(x),$$

$$q_0(x) \geqslant c_1' > 0.$$

Однако при этом возникают дополнительные ограничения на коэффициенты и на шаги сетки.

3. В качестве третьего примера, иллюстрирующего применение общей теории, изложенной в § 2, рассмотрим итерационные схемы для решения интегро-дифференциального уравнения переноса излучения в слое:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma\varphi = \frac{1}{2} \sigma_s \int_{-1}^{1} \varphi(x, \mu')\, d\mu' + f(x, \mu), \qquad 0 \leqslant x \leqslant H, \qquad -1 \leqslant \mu \leqslant 1, \tag{76}$$

$$\varphi(0, \mu) = \xi(\mu), \qquad \mu > 0; \qquad \varphi(H, \mu) = \eta(\mu), \qquad \mu < 0 \tag{77}$$

$$(\sigma > 0, \ \sigma > \sigma_s > 0).$$

Эта задача рассматривалась в [12], [13]. Следуя [13], введем сетку $\omega_{hl} = \{(x_i = ih, \mu_j = jl), i = 0, 1, \ldots, n, -1 \leqslant j \leqslant m, j \neq 0, h = H / n, l = 1 / m\}$ и аппроксимируем операторы

$$L_1\varphi = \mu\, \partial\varphi / \partial x, \qquad L_2\varphi = \sigma\varphi - \frac{1}{2} \sigma_s \int_{-1}^{1} \varphi(x, \mu')\, d\mu'$$

при помощи операторов Λ_1 и Λ_2:

$$\Lambda_1 v = \begin{cases} \mu v_{\bar{x}}, & \mu > 0, \\ \mu v_x, & \mu < 0; \end{cases} \qquad \Lambda_2 v = (\Lambda_2 v)_{ij} = \sigma v_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_s \sum_{\substack{\nu=-m \\ \nu \neq 0}}^{m} c_\nu v_{i\nu},$$

где $(v_{\bar{x}})_{ij} = (v_{ij} - v_{i-1, j}) / h$, $(v_x)_{ij} = (v_{i+1, j} - v_{ij}) / h$.

Задаче (76)—(77) ставится в соответствие уравнение $\Lambda_1 v + \Lambda_2 v = f$ с краевыми условиями (77). Пусть Ω — пространство функций, заданных на сетке ω_{hl} и обращающихся в нуль на ее границе, т. е. при $i = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$ и при $i = n$, $-m \leqslant j \leqslant -1$. Введем операторы $A_1 v = \Lambda_1 v$, $A_2 v = \Lambda_2 v$ при $v \in \Omega$. Тогда разностная схема для задачи (76)—(77) запишется в виде

$$(A_1 + A_2) v = \tilde{f}, \qquad v \in \Omega \tag{78}$$

(правая часть $\tilde{f}$ учитывает граничные условия).

В линейном пространстве Ω естественно ввести скалярное произведение

$$(z, v) = (z, v)^- + (z, v)^+ \text{ и норму } \|z\| = \sqrt{(z, z)}, \tag{79}$$

где

$$(z, v)^- = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=-m}^{-1} z_{ij} v_{ij} hl, \qquad (z, v)^+ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{ij} v_{ij} hl.$$

Операторы A_1 и A_2 являются положительно определенными в Ω. Если c_ν выбраны согласно [13] (например, $c_\nu = l$), то A_2 — самосопряженный оператор.

Нетрудно убедиться в том, что

$$(A_1 z, z) \geqslant \delta_1 \| z \|^2, \qquad \| A_1 z \|^2 \leqslant \Delta_1 (A_1 z, z), \qquad \delta_1 = \frac{hl}{H^2}, \qquad \Delta = \frac{2}{h}, \tag{80}$$

$$\sigma_c \|z\|^2 \leqslant (A_2 z, z) \leqslant \sigma \|z\|^2, \qquad \sigma_c = \sigma - \sigma_s > 0. \tag{81}$$

Оценки (81) получены в [13]. Установим неравенства (80). Пользуясь тождествами $zz = 0.5 (z^2)_{\bar{x}} = 0.5 h z_{\bar{x}}^2$, $z z_x = 0.5 (z^2)_x - 0.5 h z_x^2$ и неравенствами

$$z_i^2 \leqslant ih \sum_{k=1}^{n} h z_{\bar{x}, k}^2, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 h \leqslant \frac{H(H-h)}{2} \sum_{k=1}^{n} h z_{\bar{x}, k}^2,$$

получаем

$$(\mu z_{\bar{x}}, z)^+ = 0.5 \sum_{j=1}^{m} \mu_j (z_n^j)^2 l + 0.5 h (\mu, z_{\bar{x}}^2)^+ \geqslant \frac{h}{H^2} (\mu, z^2)^+ \geqslant \frac{hl}{H^2} (1, z^2)^+ \tag{82}$$

и, аналогично,

$$(\mu z_x, z)^- = -0.5 \sum_{j=-m}^{-1} \mu_j (z_0^j)^2 l - 0.5 h (\mu, z_x^2)^- \geqslant \frac{hl}{H^2} (1, z^2)^-. \tag{83}$$

Объединяя (82) и (83), получим $(A_1 z, z) \geqslant \delta_1 \|z\|^2$. Если учесть, что $(A_1 z, z) \geqslant 0.5 h [(\mu, z_x^2)^+ - (\mu, z_x^2)^-]$, то сразу найдем:

$$\| A_1 z \|^2 = (\mu^2, z_{\bar{x}}^2)^+ + (\mu^2, z_x^2)^- \leqslant$$
$$\leqslant (\mu, z_{\bar{x}}^2)^+ + (|\mu|, z_x^2)^- \leqslant \frac{(A_1 z, z)}{0.5 h} = \Delta_1 (A_1 z, z), \qquad \Delta_1 = \frac{2}{h}.$$

Для решения задачи (78) в [13] применяется схема (5) в случае $f_1 = 0$, $f_2 = 0$. Эта схема, как показано в § 1, алгебраически тождественна ППС (2). Поэтому ее сходимость при любом τ следует из [11]. Оценим скорость сходимости. Оценка [11] слишком груба, так как не учитывает самосопряженности A_2. Теорема 5 дает

$$\|z^\nu\|_{(2)} \leqslant \rho_\nu \|z_0\|_{(2)}, \qquad \|z\|_{(2)}^2 = \|z\|^2 + \tau^2 \|A_2 z\|^2,$$

где

$$\rho = \rho_1 \rho_2, \qquad \rho_1 = \sqrt{\frac{1-\varkappa_1}{1+\varkappa_1}}, \qquad \varkappa_1 = 2\delta_1 \tau, \qquad \delta_1 \Delta_1 = \frac{2l}{H^2},$$

$$\rho_2 = \frac{1-\sqrt{\eta_2}}{1+\sqrt{\eta_2}}, \qquad \eta_2 = \frac{\sigma_c}{\sigma} \text{ при } \tau = \frac{1}{\sqrt{\sigma\sigma_c}}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu(\varepsilon) = \ln\frac{1}{\varepsilon} \Big/ \ln\left(\rho_1 (1-\sqrt{\eta_2})(1+\sqrt{\eta_2})^{-1}\right).$$

В силу теоремы 2 ППС сходится и при $\sigma_c = 0$. В этом случае $\rho = \rho_1 = ((1-\sqrt{\eta_1}) / (1+\sqrt{\eta_1}))^{1/2}$, $\eta_1 = h^2 l / 2H^2$, так что при $h \to 0$, $l \to 0$ имеем $\nu(\varepsilon) \approx H / h\sqrt{l}$. Для сравнения укажем, что специальные методы исследования, использованные в [13], позволили оценить лишь $\rho(T)$ — спектральный радиус несамосопряженного оператора перехода

$$T = (E + \tau A_2)^{-1} (E + \tau A_1)^{-1} (E - \tau A_1)(E - \tau A_2),$$
$$\rho(T) \leqslant \frac{1-\sqrt{\eta_2}}{1+\sqrt{\eta_2}}.$$

Экономичность метода характеризуется объемом вычислительной работы, затрачиваемой для получения решения с заданной точностью.

С этой точки зрения интересно сравнить со схемой [13] схему простой итерации

$$(\Lambda_1 + \sigma E)\, y^{k+1/2} = \widetilde{\Lambda}_2 y^k + f, \qquad (\widetilde{\Lambda}_2 y^k)_{ij} = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{\substack{\nu=-m \\ \nu \neq 0}}^{m} c_\nu y_{i\nu}{}^m,$$
$$(\Lambda_1 + \sigma E)\, y^{k+1} = \widetilde{\Lambda}_2 y^{k+1/2} + f. \tag{85}$$

Пользуясь тем, что для $\Lambda_1 + \sigma E$ справедлив принцип максимума, нетрудно убедиться в том, что схема (85) сходится в равномерной метрике с знаменателем $\rho_0 = (\sigma_s / \sigma)^2$, так что

$$\|y^{k+1} - v\|_0 \leqslant \rho_0 \|y^k - v\|_0, \qquad \|y\|_0 = \max_{i,j} |y_{ij}|, \qquad \rho_0 = (\sigma_s / \sigma)^2.$$

Примем, следуя [13], в качестве характеристики скорости сходимости схемы [13] знаменатель $\rho^* = (1-\sqrt{\eta_2}) / 1+\sqrt{\eta_2})$, $\eta_2 = \sigma_c / \sigma = 1 - \sigma_s / \sigma$. Сравнивая ρ^* и ρ_0, видим, что существует область изменения параметра $\eta = (\sigma_c / \sigma)$ при $4\eta^3 + 4\eta - \eta^2 > 4$, в которой $\rho_0 < \rho^*$.

Конечно, делать на основании мажорантных оценок окончательный вывод о преимуществе той или иной схемы было бы преждевременно. Од-

нако проведенное сравнение показывает, что вопрос о целесообразности ППС для уравнения переноса нуждается в дополнительном исследовании (не только теоретическом, но и экспериментальном). Необходимо уточнить понятие экономичной схемы для уравнений переноса. Во всяком случае, рассматриваемая в § 5 работы [13] «Экономичная схема первого порядка по τ» не является экономичной в смысле минимума вычислительной работы: для числа итераций в этом случае получается оценка $\nu(\varepsilon) = (1/\varepsilon)\ln(1/\varepsilon)$, поскольку $\tau = O(\varepsilon)$.

4. Теоремы 2 и 6 позволяют получить оценку скорости ППС (12) из § 1 и выбрать оптимальные (точнее, минимизирующие ρ) значения релаксационного параметра τ и для многих других задач.

Разбиение оператора A исходной стационарной задачи на сумму двух положительно определенных операторов A_1 и A_2 можно проводить различными способами. Проиллюстрируем это на примере разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f$$

в произвольной p-мерной области $G = G + \Gamma$ на сетке $\omega_{h,q}$ (см. п. 1, § 3). Представим оператор

$$\Lambda y = -\sum_{\alpha=1}^{p} y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}$$

в виде суммы $\Lambda = \Lambda^- + \Lambda^+$, где

$$\Lambda^- y = -\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{\hbar_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha}, \qquad \Lambda^+ y = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{\hbar_\alpha} y_{x_\alpha}. \tag{86}$$

Итерационная ППС (схема бегущего счета) в этом случае имеет вид

$$\bar{y} - \tau\Lambda^-\bar{y} = y^k + \tau\Lambda^+ y^k + \tau f, \qquad x \in \omega_{h,q}; \qquad \bar{y} = \mu(x) \text{ при } x \in \gamma_h, \tag{87}$$

$$y^{k+1} - \tau\Lambda^+ y^{k+1} = \bar{y} + \tau\Lambda^-\bar{y} + \tau f, \qquad x \in \omega_{h,q}; \qquad y^{k+1} = \mu(x) \text{ при } x \in \gamma_h.$$

Такая схема для решения уравнения теплопроводности впервые была предложена В. К. Саульевым (при $p = 1, 2$) и названа им перемежающимся методом (см. [21]). Она является экономичной, так как для перехода от y^k к y^{k+1} требуется $O(1/h^p)$ арифметических действий.

Вводя операторы $A_1 y = -\Lambda^- y$, $A_2 y = -\Lambda^+ y$ в пространстве Ω сеточных функций, заданных на $\omega_{h,q}$ и обращающихся в нуль на границе γ_h сетки, перепишем (87) в виде

$$(E + \tau A_1)\bar{y} = (E - \tau A_2) y^k + \tau f, \qquad (E + \tau A_2) y^{k+1} = (E - \tau A_1)\bar{y} + \tau \tilde{f}.$$

Правая часть $\tilde{f}$ при этом учитывает неоднородные краевые условия и отличается от f только в пограничных узлах сетки $\omega_{h,q}$.

Операторы A_1 и A_2 являются несамосопряженными положительно определенными операторами в Ω. Вычислим для них δ и Δ.

Пользуясь разностной формулой Грина, по аналогии с п. 3, § 3, находим $(A_\alpha y, y) = 0.5(Ay, y)$, $\alpha = 1, 2$. После несложных вычислений, по

аналогии с п. 1, § 3, получим

$$\| A_\alpha y \|^2 \leqslant \frac{2p}{q^2h^2}(A_\alpha y, y), \text{ т. е. } \Delta = \frac{2p}{q^2h^2}.$$

Так как $(Ay, y) \geqslant (4p / D^2)\|y\|^2$, то

$$(A_\alpha y, y) \geqslant \frac{2p}{D^2}\|y\|^2, \qquad \delta = \frac{2p}{D^2},$$

где D — диаметр области G. Отсюда следует, что

$$\eta = \frac{\delta}{\Delta}\frac{q^2h^2}{D^2}.$$

Применим теперь теорему 2:

$$\rho \leqslant \frac{1-\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}} = \frac{1-qh/D}{1+qh/D}, \qquad \tau = \tau^* = \frac{Dqh}{2p}. \tag{88}$$

Таким образом, для числа итераций $\nu(\varepsilon)$ в случае схемы (86) — (87) справедлива та же асимптотика, что и в п. 1, п. 2 (для схемы (64))

$$\nu(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{89}$$

независимо от числа измерений (p не входит в выражение для ρ, см. (88)). Общий объем вычислений для схемы (87) есть $O\left(\frac{1}{h^{p+1}}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Для несамосопряженной задачи при любом ρ можно определить A_1 и A_2 по аналогии с (86):

$$A_1 y = \sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{\nu_\alpha}{\hbar_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^- y_{\check{x}_\alpha}\right), \qquad A_2 y = \sum_{\alpha=1}^{p}\left(-\frac{\nu_\alpha}{\hbar_\alpha} y_{x_\alpha} - b_\alpha^+ y_{\hat{x}_\alpha}\right). \tag{90}$$

Оценка (88) и в этом случае сохраняет силу. Если сетка ω_h в регулярных узлах неравномерна и $h_\alpha(x_i) = h$ ($h = \text{const} > 0$) всюду в ω_h, то оценка (88) справедлива, если qh заменить h.

Замечание. При сравнении различных итерационных методов необходимо, помимо числа итераций, учитывать величину погрешности, допускаемой из-за ошибок округления при определении каждой итерации. Так, например, для реализации схемы (64) используется метод прогонки. Поэтому, как это следует из оценок Н. С. Бахвалова, при нахождении y^{k+1} вносится погрешность $O(\varepsilon_0 / h^2)$, где ε_0 — ошибка округления. В случае схемы (87) эта погрешность, очевидно, не превосходит величины $O(\varepsilon_0 / h)$. По числу итераций, как мы видели, схемы (64) и (87) сравнимы. Схема бегущего счета может быть использована для решения уравнений с переменными коэффициентами.

Автор пользуется случаем выразить благодарность Е. Г. Дьяконову за редакционные замечания.

Поступила в редакцию
28.01.1966

Цитированная литература

1. Е. Г. Дьяконов. О некоторых разностных схемах для решения краевых задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 1, 57—59.
2. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 4, 549—568.
3. А. А. Самарский. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 5, 812—840.
4. А. А. Самарский. О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики. Apl. Mat., 1965, **10**, № 2, 146—164.
5. D. W. Peaceman, H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic equations. J. Industr. Math. Soc., 1953, № 1, 28—46.
6. J. Douglas, H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **82**, № 2, 421—439.
7. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1207—1210.
8. А. А. Самарский. О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем. Докл. АН СССР, 1965, **165**, № 6, 1253—1256.
9. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 5, 787—811.
10. А. А. Самарский. К теории разностных схем. Докл. АН СССР, 1965, **165**, № 5, 1007—1011.
11. А. А. Самарский. Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **4**, № 3, 550—584.
12. Г. И. Марчук, У. М. Султангазин. О сходимости метода расщепления для уравнения переноса излучения. Докл. АН СССР, 1965, **161**, № 1, 66—69.
13. Г. И. Марчук, У. М. Султангазин. К обоснованию метода расщепления для уравнений переноса излучения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, **5**, № 5, 852—863.
14. C. Pearcy. On convergence of alternating direction procedures. Numer. Math., 1962, **4**, № 2, 172—176.
15. Jr. J. Douglas, C. M. Pearcy. On convergence of alternating direction procedur in the presence of singular operators. Numer. Math., 1963, **5**, № 2, 175—184.
16. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
17. E. L. Wachspress, G. T. Habetler. An alternating direction implicit iteration technique. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1960, **8**, 403—424.
18. E. L. Wachspress. Optimum alternating direction implicit iteration parameters for a model problem. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1962, **10**, 2, 339—350.
19. А. А. Самарский. Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 3, 431—466.
20. А. А. Самарский. О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, **5**, № 3, 548—551.
21. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.