Aplikace matematiky

Aleksander Andreevich Samarskij

О точности метода сеток для задачи Дирихле в произвольной области

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 293--296

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102966`

О ТОЧНОСТИ МЕТОДА СЕТОК ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А. А. САМАРСКИЙ (A. A. SAMARSKIJ)

(к теме с)

1. Рассмотрим в произвольной p-мерной области Ω с границей Γ первую краевую задачу для эллиптического уравнения

$$(1)\qquad Lu - q(x)\,u = -f(x)\,, \quad L = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha\,, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad x \in \Omega\,,$$

$$(2)\qquad u\big|_\Gamma = \mu(x)\,, \quad x = (x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_p)\,,$$

$$(3)\qquad k_\alpha(x) \geqq c_1 > 0\,, \quad q(x) \geqq 0\,, \quad c_1 = \text{const}\,.$$

Задачу $(1)-(3)$ или задачу I будем решать методом сеток, аппроксимируя каждый из операторов L_α трёхточечной схемой Λ_α второго порядка аппроксимации, а граничные значения будем брать точно, что возможно, если все граничные узлы γ_h сетки ω_h принадлежат Γ и, следовательно, в случае произвольной области Ω используется неравномерная вблизи Γ сетка ω_h. В пограничных узлах ω_h^* приходится писать схему на неравномерной сетке, имеющую первый локальный порядок аппроксимации. Тем не менее оказывается, что вклад z^*, который погрешность аппроксимации ψ^* схемы в пограничной зоне ω_h^* вносит в погрешность z разностной схемы есть величина $O(h^3)$, где h — максимальное значение шагов сетки. Цель нашего сообщения — доказать это утверждение для разностных схем, аппроксимирующих задачу I на произвольной сетке, используя простейшее свойство (7) разностной функции Грина. Тот же результат может быть получен непосредственно при помощи принципа максимума.

Область Ω предполагается такой, что ее пересечение с прямой $\mathscr{L}_\alpha$, параллельной оси Ox_α и проходящей через любую точку $x \in \Omega$, состоит из конечного числа интервалов. Для упрощения редакции изложение проводится для случая, когда $\mathscr{L}_\alpha$ пересекает Γ в двух точках.

2. Введем сетку $\omega_h = \{x_i \in \Omega\}$ с границей $\gamma_h = \{x_i^* \in \Gamma\}$. Для этого рассмотрим основную решетку $\{x_i\}$, то-есть множество узлов $x_i = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_\alpha^{(i_\alpha)}, \ldots, x_p^{(i_p)})$,

$i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (начало координат внутри Ω) — точек пересечения семейств гиперплоскостей $x_\alpha^{(i_\alpha)} = \text{const.}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}$ — шаг решетки. Если $h_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha = \text{const.}$, то решетка равномерна по каждому из x_α. Сетка ω_h состоит из узлов x_i решетки, попавших внутрь Ω, а её граница γ_h — из узлов x_i^*, являющихся точками пересечения Γ с гиперплоскостями $x_\alpha^{(i_\alpha)} = \text{const.}$

Проведем через узел $x_i \in \omega_h$ прямую $\mathscr{L}_\alpha$, пересекающую Γ в точках $x_{\Lambda_\alpha}^*$ (левая) и $x_{\Pi_\alpha}^*$ (правая). Множество узлов $x_i \in \omega_h$, лежащих на $\mathscr{L}_\alpha$, включая $x_{\Lambda_\alpha}^* \in \gamma_h$ и $x_{\Pi_\alpha}^* \in \gamma_h$, образует цепочку r_α. Узлы $x_{\Lambda_\alpha}^{*(+1_\alpha)} \in \omega_h$ и $x_{\Pi_\alpha}^{*(-1_\alpha)} \in \omega_h$, соседние с $x_{\Lambda_\alpha}^*$ и $x_{\Pi_\alpha}^*$ соответственно, назовем пограничными. Перебирая все цепочки r_α данного направления α, получим все внутренние узлы сетки ω_h и множества $\gamma_h^{\alpha-}$ и $\gamma_h^{\alpha+}$ левых и правых граничных узлов. Обозначим $\omega_h^{*(-\alpha)}$ и $\omega_h^{*(+\alpha)}$ множество всех левых $x_{\Lambda_\alpha}^{*(+1_\alpha)}$ и соответственно правых $x_{\Pi_\alpha}^{*(-1_\alpha)}$ пограничных узлов для данного α, $\omega_h^{*(\alpha)} = \omega_h^{*(-\alpha)} \cup \omega_h^{*(+\alpha)}$. Множество пограничных узлов сетки ω_h для всех направлений α обозначим $\omega_h^* = \bigcup_{\alpha=1}^{p} \omega_h^{*(\alpha)}$ и положим $\omega_h = \omega_h^* \cup \tilde{\omega}_h$. Назовем ω_h^* пограничной зоной, $\tilde{\omega}_h$ — основной областью сетки ω_h.

Нам понадобятся некоторые сокращенные обозначения. Следуя [1], будем писать $y = y(x) = y_i$ — значение сеточной функции $y(x_i)$ в узле $x = x_i \in \omega_h$. Введем скалярные произведения

$$(v, w) = \sum_{\omega_h} v(x)\, w(x)\, H\,, \quad (v, w)_{*(\mp\alpha)} = \sum_{x \in \omega_h{}^{*(\mp\alpha)}} v(x)\, w(x)\, H_\alpha\,,$$

где

$$H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha\,, \quad H_\alpha = \prod_{\beta \neq \alpha}^{1-p} \hbar_\beta\,, \quad \hbar_\alpha = 0{,}5(h_\alpha + h_{\alpha+})\,, \quad h_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)}\,, \quad h_{\alpha+} = h_\alpha^{(i_\alpha+1)}\,.$$

Пусть $x_i^{(\pm 1_\alpha)} = x_{i'}$ — узел с координатами $x_\beta^{i'_\beta}$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$, $i'_\beta = i_\beta$ при $\beta \neq \alpha$, $i'_\alpha = i_\alpha \pm 1$, $y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x_i^{(\pm 1_\alpha)})$, $y_{\bar{x}_\alpha} = (y - y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha$, $y_{x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/h_{\alpha+}$, $y_{\hat{x}_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/\hbar_\alpha$. На равномерной сетке $h_{\alpha+} = \hbar_\alpha = h_\alpha = \text{const.}$ имеем $y_{\hat{x}_\alpha} = y_{x_\alpha}$.

3. Пусть Λ_α однородная разностная схема вида

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}\,, \quad a_\alpha \geqq c_1 > 0\,, \tag{4}$$

которая аппроксимирует L_α на равномерной сетке с точностью до $O(h_\alpha^2)$, а на неравномерной сетке — $O(\hbar_\alpha)$ (см. [1], [2]). Здесь a_α некоторый функционал от k_α; в простейшем случае $a_\alpha = k_\alpha^{(-0,5_\alpha)}$, где $k_\alpha^{(-0,5_\alpha)}$ — значение k_α в середине интервала $(x_\alpha^{(i_\alpha-1)}, x_\alpha^{(i_\alpha)})$ цепочки r_α.

Задаче I ставим в соответствие разностную схему

$$\Lambda y - q(x)\, y = -f(x)\,, \quad x \in \omega_h\,, \quad y|_{\gamma_h} = \mu\,, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha\,. \tag{II}$$

Погрешность ее решения $z = y - u$, где u — решение задачи I, y — решение задачи II, находим из условий

$$\text{(III)} \qquad \Lambda z - qz = -\psi\,, \quad x \in \omega_h\,, \quad z\big|_{\gamma_h} = 0\,,$$

где $\psi = \Lambda u - Lu$ — погрешность аппроксимации для схемы II. Представим $\psi = \psi^* + \widetilde{\psi}$, где $\psi^* = \psi$ на ω_h^*, $\psi^* = 0$ на $\widetilde{\omega}_h$, $\widetilde{\psi} = 0$ на ω_h^* и положим $z = z^* + \tilde{z}$, где $z^*(\tilde{z})$ — решение задачи III с правой частью $\psi = \psi^*(\psi = \widetilde{\psi})$. Наша цель — получить равномерную оценку для z^*, имея в виду, что (см. [1])

$$\text{(5)} \qquad \psi^* = O(h)\,, \quad h = \max_{\alpha,\omega_h^*} \hbar_\alpha\,, \quad x \in \omega_h^{*(\mp\alpha)}\,.$$

При оценке z^* безразлично, равномерна или неравномерна основная сетка $\widetilde{\omega}_h$. Мы проводим доказательства теорем 1 и 2, считая, что $\widetilde{\omega}_h$ неравномерна.

4. Введем разностную функцию Грина $G(x, \xi)$, $x, \xi \in \overline{\omega}_h$, задачи III, полагая

$$\text{(6)} \qquad \Lambda_\xi G(x, \xi) - q(\xi)\, G(x, \xi) = -\frac{\delta(x, \xi)}{H(\xi)}\,, \quad x \in \overline{\omega}_h,\ \xi \in \omega_h,\ G\big|_{\xi \in \gamma_h} = 0\,,$$

где $\delta(x, \xi) = 0$ при $x \neq \xi$, $\delta(x, x) = 1$, Λ_ξ оператор Λ, действующий на функцию аргумента ξ. Из (6) следует:

$$1)\ G(x, \xi) > 0 \ \text{при}\ x \in \omega_h,\ \xi \in \omega_h;\quad 2)\ G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Лемма. *Справедлива оценка*

$$\text{(7)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} \{(G_{\bar{\xi}_\alpha}(x, \xi), 1)_{*(-\alpha)} + (-\,G_{\xi_\alpha}(x, \xi), 1)_{*(+\alpha)}\} \leqq \frac{1}{c_1}\,.$$

Для доказательства уравнение (III) надо умножить на $H(\xi)$ и просуммировать по ω_h; для каждого из выражений $\Lambda_\alpha G \hbar_\alpha$ применяется одномерная формула суммирования по частям [1] вдоль цепочек r_α, после чего используется (3) и неравенство $G \geqq 0$.

Решение задачи III* представим в виде $z^*(x) = (G(x, \xi), \psi^*(\xi))$, так что $|z^*(x)| \leqq$ $\leqq \|\psi^*\|_0 \sum_{\alpha=1}^{p} \{(\hbar_\alpha G, 1)_{*(-\alpha)} + (\hbar_\alpha G, 1)_{*(+\alpha)}\} = \|\psi^*\|_0 \sum_{\alpha=1}^{p} \{(\hbar_\alpha h_\alpha^-, G_{\bar{\xi}_\alpha}(x, \xi))_{*(-\alpha)} +$ $+ (\hbar_\alpha h_\alpha^+, -\,G_{\xi_\alpha}(x, \xi))_{*(+\alpha)}\}$, $(\|\psi^*\|_0 = \max_{\omega_h} |\psi^*(x)|)$, так как $G(x, x_{\Lambda_\alpha}^*) = G(x, x_{\Pi_\alpha}^*) =$ $= 0$. Отсюда и из (7) следует

$$\text{(8)} \qquad \|z^*(x)\|_0 = \max_{\omega_h} |z^*(x)| \leqq \frac{1}{c_1}\, \|\psi^*\|_0\, h^2\,,$$

где $h = \max_{\alpha,\omega_h^*} (h_\alpha, h_\alpha^\mp)$. Тем самым доказана теорема

Теорема 1. *Для решения задачи* III* $\left(\Lambda z^* - qz^* = -\psi^*, z^*|_{\gamma_h} = 0\right)$ *справедлива равномерная оценка* (8).

Из теоремы 1 и (5) следует

Теорема 2. *Если* $u \in C^{(3)}(\overline{\Omega})$, $k_\alpha \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$, *то*

$$\|z^*(x)\|_0 \leqq Mh^3, \tag{9}$$

где M *— постоянная, не зависящая от сетки.*

Замечание 1. Для уравнения Пуассона $(k_\alpha = 1,\ q \equiv 0)$ можно написать более точные оценки. Обозначая $M_s = \max\limits_{\alpha,\Omega} |\partial^s u / \partial x_\alpha^s|$, $s = 1, 2, \ldots$, получим

$$\|z^*(x)\|_0 \leqq \tfrac{1}{3} p M_3 h^3, \text{ если } u \in C^{(3)}(\overline{\Omega}),\ \tilde{\omega}_h \text{ — произвольна,} \tag{10}$$

$$\|z^*(x)\|_0 \leqq \tfrac{1}{3} M_3 h^3 + \tfrac{1}{12}(p-1)\, M_4 h^4, \text{ если } u \in C^{(4)}(\overline{\Omega}),\ \tilde{\omega}_h \text{ — равномерна.} \tag{11}$$

Оценка (10) в двухмерном случае $(p = 2)$ была получена другим методом в [3].

5. Равномерная оценка погрешности $\tilde{z}$ за счет погрешности аппроксимации в основной зоне $\tilde{\omega}_h$ сводится к оценке $(G, 1)$. Если $\tilde{\omega}_h$ равномерна и k_α меняются достаточно медленно, то метод мажорант [4] дает $\tilde{z} = O(h^2)$ при $u \in C^{(4)}$, $k_\alpha \in C^{(3)}$, так что $\|y - u\|_0 = O(|h|^2)$, $|h|^2 = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2$. Случай, когда $\tilde{\omega}_h$ неравномерна, рассмотрен в [1]. Полученная там оценка может быть улучшена и имеет вид

$$\|y - u\|_0 = O\left(\|h\|_0^2 \ln \frac{1}{H_*}\right),$$

где

$$H_* = \min_{\omega_h} H\,, \quad \|h\|_0^2 = \max_{\omega_h} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2\,.$$

Цитированная литература

[1] *А. А. Самарский:* Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431—466.

[2] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский:* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 812—832.

[3] *W. R. Wasow:* Discrete approximations to elliptic differential equations. Z. Angew. Math. Phys. 1955, 6, 81—97.

[4] *S. Gerschgorin:* Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Z. Angew. Math. Mech. 1930, 10, 373—382.

А. А. Самарский, Кафедра вычислительной математики механико-математического факультета, Московский государственный университет, Москва, СССР.