Доклады Академии наук СССР
1965. Том 165, № 5

УДК 518.1 *МАТЕМАТИКА*

А. А. САМАРСКИЙ

К ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 19 IV 1965)

Рассматриваются разностные схемы для абстрактной задачи Коши (1) в банаховом и гильбертовом пространствах. Особое внимание уделено достаточным условиям корректности схем.

1. Пусть H — банахово пространство; $A(t)$ — линейный (неограниченный) оператор, зависящий от t, $0 \leqslant t \leqslant T$, с плотной в H областью определения $D(A)$ и областью значений $\Delta(A) \subset H$. Рассмотрим задачу Коши

$$du / dt + A(t)u = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A). \quad (1)$$

Неизвестная функция $u = u(t)$ и заданная функция $f(t)$ определены на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ и принимают значения из H, а производная du / dt понимается в сильном смысле. Краевые условия учитываются требованием $u(t) \in D(A)$. Будем предполагать, что задача (1) поставлена корректно.

2. Разностные схемы для задачи (1) при $f = 0$ изучались в ([1]). Приближенное решение рассматривалось в том же пространстве H, что и решение $u = u(t)$ исходной задачи (1). Достаточные условия корректности схем были получены лишь для частных случаев (задача Коши, уравнения с постоянными коэффициентами) спектральными методами. (Отличная от ([1]) трактовка разностных схем для (1) дана в ([4]).) Методы ([1, 2]) непригодны для уравнений с переменными и, в частности, разрывными коэффициентами.

Мы изучаем разностные схемы, определенные не в H, а в другом пространстве, являющемся аналогом пространства сеточных функций. Этот подход позволяет получить достаточные условия корректности схем, используя лишь такие общие свойства операторов (как, например, полуограниченность снизу), которые легко проверяются непосредственно.

Пусть $\{H_N, N = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность банаховых пространств с нормой $\|\cdot\|_N$, P_N — линейный оператор, проектирующий H на H_N ($P_N u = u_N \in H_N$, если $u \in H$) и выполнено условие замыкания $\lim\limits_{N\to\infty} \| P_N u \|_N = \| u \|$ для любого $u \in H$, где $\|\cdot\|$ — норма в H.

В качестве P_N может служить оператор усреднения по окрестности узла сетки ω_N (при $H = L_2$ и $H_N = L_2(\omega_N)$, оператор взятия значения в узле сетки (при $H = C$, $H_N = C(\omega_N)$) и т. д. Выбор P_N зависит от норм в H и H_N.

На отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ введем сетку $\omega_\tau = \{t^j = j\tau;\ j = 0, 1, \ldots, [T / \tau]\}$ с шагом τ. Рассмотрим двухслойные схемы, связывающие значения искомой функции на двух временных слоях $t = t^j$ и $t = t^{j+1}$. Любую двухслойную линейную схему можно представить в виде

$$R_N y = S_N \check{y} + \tau\varphi(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad y(0) = P_N u_0, \quad (2)$$

где $R_N = R_N(t, \tau)$, $S_N = S_N(t, \tau)$ — линейные операторы, зависящие от t, τ, N и действующие из H_N в H_N; $\varphi = \varphi_{N,\tau}(t) \in H_N$ — заданная функция, $y = y_{N,\tau}(t) \in H_N$ — искомая функция, определенная для $t \in \omega_\tau$; мы обозначили

$$y = y_{N,\tau}(t^{j+1}) = y^{j+1}_{N,\tau}, \quad \check{y} = y_{N,\tau}(t^j) = y^j_{N,\tau}, \quad \varphi = \varphi(t) = \varphi^{j+1}_{N,\tau}.$$

Индекс N, τ в дальнейшем будем опускать.

Задача (2) поставлена корректно (будем говорить «схема (2) корректна») (см. [3]), если при достаточно большом $N \geqslant N_0$ и достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$ она разрешима для любых $\varphi(t) \in H_N$, $t \in \omega_\tau$ и $y(0) \in H_N$ и ее решение равномерно по N и τ непрерывно зависит от начальных данных $y(0)$ и правой части $\varphi(t)$ («схема устойчива по начальным данным и по правой части»): $\max\limits_{\omega_\tau} \| y(t) \|_N \leqslant M_1' \| y(0) \|_N + M_2' \max\limits_{\omega_\tau} \| \varphi(t) \|_N$, где M_1', M_2' — положительные постоянные, не зависящие от N и τ.

Для корректности схемы (2) достаточно потребовать, чтобы существовал обратный оператор $R_N^{-1}(t)$ для любого $t \in \omega_\tau$, действующий из H_N в H_N, и были выполнены условия

$$\| R_N^{-1}(t) S_N(t) \|_N \leqslant 1 + c_1\tau, \qquad \| R_N^{-1}(t) \| \leqslant c_2 \text{ для всех } t \in \omega_\tau, \tag{3}$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные, не зависящие от τ и N.

При этом для решения задачи (2) справедлива оценка

$$\| y^j \|_N \leqslant e^{c_1 t_j} \left\{ \| y(0) \|_N + c_2 \sum_{j'=1}^{j} \tau \| \varphi^{j'} \|_N \right\} \quad \text{для всех } t^j \in \omega_\tau. \tag{4}$$

3. Естественно вводятся понятия сходимости и аппроксимации. Пусть $y^j = y^j_{N,\tau} \in H_N$ — решение разностной задачи (2), $u^j = u(t^j)$ — решение задачи (1). Характеристикой схемы (2) является погрешность $z^j = y^j - P_N u^j \in H_N$, определенная для $t^j \in \omega_\tau$.

Решение задачи (2) сходится к решению задачи (1) («схема (2) сходится) равномерно по t при $\tau \to 0$ и $N \to \infty$, если

$$\| y^j - P_N u^j \|_N \leqslant \rho_1(\tau) + \rho_2(1/N) \quad \text{для всех } t^j \in \omega_\tau, \tag{5}$$

где $\rho_1(\tau) \geqslant 0$, $\rho_2(1/N) \geqslant 0$ не зависят от t^j и $\rho_k(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$, $k = 1, 2$.

Каждому пространству H_N поставим в соответствие положительное число h_N (шаг) такое, что последовательность $\{h_N\}$ сходится к нулю при $N \to \infty$.

Будем говорить, что схема (2) имеет n-й порядок точности по τ и k-й порядок точности по h_N («схема (2) сходится со скоростью $O(\tau^n) + O(h_N^k)$» или «схема (2) имеет точность $O(\tau^n) + O(h_N^k)$»), если при достаточно малых $\tau \leqslant \tau_0$ и $h_N \leqslant h_0$

$$\| y^j - P_N u^j \|_N \leqslant M_1 \tau^n + M_2 h_N^k \quad \text{для всех } t^j \in \omega_\tau. \tag{6}$$

Здесь и ниже M_s $(s = 1, 2, \ldots)$ — положительные постоянные, не зависящие от τ и h_N. Подставляя $y = z + P_N u$ в (2), получим:

$$R_N z = S_N \check{z} + \tau\psi, \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad z(0) = 0. \tag{7}$$

Здесь $\psi = \psi(u) = \varphi - \frac{1}{\tau}(R_N P_N u - S_N P_N \check{u})$ — погрешность аппроксимации уравнения (1) схемой (3), взятая на решении $u = u(t)$ уравнения (1).

Если $\| \psi^j \|_N \leqslant \rho_1(\tau) + \rho_2(1/N)$ для $t^j \in \omega_\tau$, то говорят, что схема (2) аппроксимирует уравнение (1) в классе его решений.

Схема (2) аппроксимирует уравнение (1) с порядком n по τ и k

по h_N (имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^n)+O(h_N^k)$), если

$$\|\psi^j\|_N \leqslant M_3\tau^n + M_4 h_N^k \quad \text{или} \quad \|\psi^j\|_N = O(\tau^n) + O(h_N^k) \quad \text{для } t^j \in \omega_\tau.$$

Очевидна теорема (ср. ([1–3])): из корректности и аппроксимации следует сходимость разностной схемы (2); порядок точности схемы (2) определяется порядком погрешности аппроксимации в классе решений $u = u(t)$ уравнения (1).

4. Наибольшие трудности в теории разностных схем связаны с выяснением достаточных условий корректности схем. В ([1], [2]) даны условия для уравнений с постоянными коэффициентами и для периодической задачи Коши.

Мы будем пользоваться методом энергетических неравенств для схем, определенных в гильбертовом пространстве H_N со скалярным произведением $(y, v)_N$ и нормой $\|y\|_N = \sqrt{(y, y)_N}$.

Любая двухслойная схема (2) может быть записана в виде

$$C_N y_{\bar{t}} + A_N(\sigma y + (1-\sigma)\check{y}) = \varphi, \quad y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau, \tag{8}$$

где σ — произвольный вещественный параметр; $A_N = A_N(t, \tau, \sigma)$ и $C_N = C_N(t, \tau; \sigma)$ — линейные операторы, область определения и область значений которых совпадает с H_N для всех $t \in \omega_\tau$. Наиболее часто встречаются схемы

$$y_{\bar{t}} + A_N(\sigma y + (1-\sigma)\check{y}) = \varphi, \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad y(0) = P_N u_0. \tag{9}$$

Сравнивая (9) с (2), видим, что $R_N = E + \sigma\tau A_N$, $S_N = E - (1-\sigma)\tau A_N$, где E — единичный оператор.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Схема (9) корректна, если $\sigma \geqslant 0{,}5$ и A_N положителен, т. е. $(A_N y, y)_N \geqslant 0$ для всех $y \in H_N$; при этом верна оценка (4) с $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.*

Теорема 2. *Схема (9) корректна, если $\sigma \geqslant 0{,}5$, A_N полуограничен, т. е. $(A_N y, y)_N \geqslant -M_5\|y\|_N^2$, $\tau \leqslant \tau_0(M_5)$ достаточно мало.*

Теорема 3. *Схема (9) корректна, если A_N — конечномерный положительный самосопряженный ($(A_N y, v_N) = (y, A_N v)_N$ для любых $y, v \in H_N$) оператор и $\sigma \geqslant \sigma_\varepsilon = 0{,}5 - (1-\varepsilon)/\tau\|A_N(t)\|_N$, где $\varepsilon \in (0, 1]$ — любое число; верна оценка (4) при $c_1 = 0$, $c_2 = 1/\varepsilon$.*

Теорема 4. *Схема (9) устойчива по начальным данным в норме $\|y\|_{A_N} = \sqrt{(A_N(t)y, y)_N}$, если A_N — самосопряженный положительный ($(A_N y, y)_N| > 0$) оператор, удовлетворяющий условию Липшица по t, т. е. $|A_N(t)y, y)_N| \leqslant M_0(\check{A}_N y, y)_N$, и $\sigma \geqslant \sigma_\varepsilon$.*

Получены также априорные оценки для решения (9) через $(A^{-1}\varphi, \varphi)_N$.

Для схемы общего вида (8) укажем лишь один результат. Схема (8) корректна, если: а) $\sigma \geqslant 0{,}5$; б) A_N — самосопряженный, положительный ($(A_N y, y)_N > 0$) оператор, удовлетворяющий условию Липшица по t; в) $(C_N y, y)_N \geqslant 0$, $(C_N y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})_N \geqslant \varepsilon\|y_{\bar{t}}\|^2 - M_7(\|y\|^2_{A_N} + \|\check{y}\|^2_{\check{A}_N})$,

где $\varepsilon \in (0, 1]$ — любое число. Для решения уравнения (8) при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0(M_7)$ верна оценка

$$\|y^j\|_{A_N^j} \leqslant M_8\left(\|y(0)\|_{A_N(0)} + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\varphi^{j'}\|_N\right) \quad \text{для всех } t^j \in \omega_\tau. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, следует устойчивость схем расщепления для уравнения параболического типа (см. ([5])).

5. Известно, что в ряде случаев (неравномерные сетки, разрывные коэффициенты ([4])) решение разностного уравнения и его правую часть следует оценивать в разных пространствах. Такого рода оценки удается получить для операторов A_N специального вида.

Пусть H_N и $H_{N,1}$ — эвклидовы пространства со скалярными произведениями $(y, z)_N$ и $(v, w]_N$ соответственно, T_N — линейный оператор из H_N в $H_{N,1}$; T_N^* — линейный оператор из $H_{N,1}$ в H_N, сопряженный в T_N в следующем смысле: $(T_N y, v]_N = (y, T_N^* v)_N$ для любых $y \in H_N$, $v \in H_{N,1}$.

Операторы T_N и T_N^* имеют равномерно ограниченные обратные операторы T_{N1}^{-1} и T^{*-1}_N. Рассмотрим операторы A_N «консервативного» («дивергентного») вида $A_N = T_N^* S_N T_N$, где $S_N = S_N(t, \tau)$ — линейный оператор, действующий из $H_{N,1}$ в $H_{N,1}$. Если S_N — положительно определенный оператор, т. е. $(S_N v, v]_N \geqslant M_9 \|v\| v\|_N^2$, $\|v\|_N^2 = (v, v]_N$, то при $\sigma \geqslant 0{,}5$ справедлива оценка вида (4), где $\varphi\,\|_N$ следует заменить нормой $\|(T_N^*)^{+1}\varphi\,\|_N$, а также априорная оценка для $\|T_N y\|_N$.

Из этих оценок, в частности, следуют основные результаты работ [4] по теории разностных схем для параболических уравнений в случае неравномерных сеток и разрывных коэффициентов (а также ряд новых результатов). Аналогично исследуется «многомерный» случай

$$A_N = \sum_{\alpha=1}^{m} T^*_{N,\alpha} S_{N,\alpha} T_{N,\alpha}.$$

6. Получены условия корректности трехслойных схем для уравнения (1).

Исследованы трехслойные и четырехслойные схемы для уравнения второго порядка

$$d^2u / dt^2 + A(t)u = f(t), \quad 0 < t \leqslant T, \quad u(0) = u_0, \quad du / dt(0) = \bar{u}_0.$$

Так, например, для корректности трехслойной схемы

$$y_{\bar{t}t} + 0{,}5A_N(y + \check{\check{y}}) + (\sigma - 0{,}5)\tau^2 A_N y_{\bar{t}t} = \varphi,$$

$$(\check{\check{y}} = y^{j-1},\ \check{y} = y^j,\ y = y^{j+1}, \quad y_{\bar{t}t} = (y - 2\check{y} + \check{\check{y}}) / \tau^2)$$

достаточно, чтобы: 1) $\sigma \geqslant 0{,}25 - (1 - \varepsilon) / \tau^2 \|A_N\|_N$, $\varepsilon \in [0, 1]$ — любое число; 2) $(A_N y, y)_N > 0$; 3) A_N — самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию Липшица по t.

Автор выражает благодарность А. Н. Тихонову за полезное обсуждение результатов.

Поступило
30 III 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. D. Lax, R. D. Richtmyer, Comm. Pure and Appl. Math., 9, 267 (1956). [2] Р. Д. Рихтмайер, Разностные методы решения краевых задач, М., 1960. [3] В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956. [4] Л. И. Якут, Труды семинара по функц. анализу, Воронеж, в. 7, 1963, стр. 160. [5] А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., № 6, 972 (1961); № 4, 603 (1962), № 2, 266 (1963). [6] Е. Г. Дьяконов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., № 2, 278 (1964); № 5, 935 (1964).