О ПРИНЦИПЕ АДДИТИВНОСТИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЭКОНОМИЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ *

А.А. САМАРСКИЙ

Во всех работах ([1]-[7] и др.), посвященных экономичным (по числу операций) методам численного решения многомерных задач математической физики, в той или иной форме используется представимость многомерного эллиптического оператора в виде суммы одномерных операторов. В [5]-[7] изучались для уравнений и систем уравнений параболического и гиперболического типов локально одномерные схемы (л.о.с.), построенные на основе принципа моделирования многомерного дифференциального уравнения при помощи системы одномерных уравнений с последующим применением для решения каждого из одномерных уравнений простейших разностных схем. Ниже такой принцип построения локально одномерных схем применяется для абстрактной задачи Коши в банаховом пространстве (принцип аддитивности).

1. Пусть в банаховом пространстве H определен линейный (неограниченный) оператор $A(t)$, зависящий от параметра $t \in [0,T]$ с плотной в H и не зависящей от t областью определения $D(A)$ и областью значений $\Delta(A) \subset H$. Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$du/dt + A(t)u = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A), \tag{1}$$

где производная понимается в сильном смысле; $u = u(t) \in H$ (искомая функция) и $f = f(t) \in H$ (заданная функция) определены на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Краевые условия учитываются требованием $u = u(t) \in D(A)$. Нас будет интересовать случай, когда A есть сумма линейных операторов A_α с теми же областями определения и значений, что и у оператора A:

$$A(t) = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(t). \tag{2}$$

Условимся называть $A_\alpha(t)$ одномерными операторами, а соответствующие задачи Коши (1_α) при $A = A_\alpha$ – одномерными задачами. Будем предполагать, что задача (1) равномерно корректна.

*ДАН СССР 1965. т. 165, №6, с. 1253-1256.

2. Введем сетку $\omega_\tau = \{t^j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, [T/\tau]\}$ с шагом τ. "Многомерную" задачу (1) будем моделировать (аппроксимировать) при помощи m одномерных задач.

В каждом интервале $[t^j,\ t^{j+1}]$ вместо (1) будем последовательно решать систему одномерных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + A_\alpha(t)v_{(\alpha)}(t) = f_\alpha(t), \quad t \in (t^j,\ t^{j+1}], \quad j = 0, 1, \ldots; \qquad (3)$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

с начальными условиями

$$v_{(\alpha)}(t^j) = v_{(\alpha-1)}(t^{j+1}),\ \alpha > 1; \ \ v_{(1)}(t^j) = v_{(m)}(t^j) = v(t^j); \quad j \geqslant 0, \quad (4)$$
$$v(0) = u_0.$$

Решением задачи (3) - (4) на сетке ω_τ назовем функцию

$$v = v^{j+1} = v_{(m)}(t^{j+1}).$$

Функции $f_\alpha = f_\alpha(t, \tau)$ принадлежат области задания $f(t)$ в H, зависят, вообще говоря, от τ и удовлетворяют условию нормировки

$$\left\| \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha - f(t) \right\| = O(\tau^{k_0}), \qquad k_0 > 0,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в H. В [5] мы считали, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{m} f_\alpha = f$. Функции $v_{(1)}^{j+1}, \ldots, v_{(m)}^{j+1}$ можно трактовать как последовательные приближения решения задачи (1), число которых m равно числу слагаемых в сумме (2).

3. Пусть $U(t, t')$ – разрешающий оператор уравнения (1) при $0 \leqslant t' \leqslant t \leqslant T$; $U_\alpha(t, t')$ – разрешающий оператор одномерного уравнения (3_α) номера α. Замена уравнения (1) локально-одномерной системой (3) означает, что $U(t, t')$ аапроксимируется произведением $\widetilde{U}(t, t') = U_m(t, t') \ldots U_1(t, t')$, так что $U \approx \widetilde{U}$. Таким образом, предлагаемый метод одномерного моделирования задачи (1) соответствует приближенной факторизации или расщеплению на одномерные операторы разрешающего оператора $U(t, t')$. Если $\widetilde{U} = U$, то при $f = 0$ имеем $v^j = u^j$ для всех $j = 0, 1, \ldots$. Если $j \neq 0$, то v^j

совпадает с u^j на сетке ω_τ лишь при специальном выборе правых частей f_α, а именно:

$$f_\alpha = 0 \text{ для } \alpha = 1,2,\ldots,m-1, \quad f_m(\theta) = w_{(m-1)}(t^{j+1},\theta), \quad t^j \leqslant \theta \leqslant t^{j+1},$$

где $w_{(m-1)}(t,\theta)$ – решение задачи

$$\frac{dw_{(\alpha)}}{dt}(t,\theta) + A_\alpha(t)w_{(\alpha)}(t,\theta) = 0, \qquad t^j \leqslant \theta \leqslant t \leqslant t^{j+1},$$

$$w_{(\alpha)}(\theta,\theta) = w_{(\alpha-1)}(t^{j+1},\theta), \qquad \alpha = 2,\ldots,m-1, \qquad w_{(1)}(\theta,\theta) = f(\theta).$$

Приведем простейшие примеры, когда $\widetilde{U} = U$:

1) уравнение теплопроводности с коэффициентами, допускающими разделение переменных, в параллелепипеде ($0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$, $\alpha = 1,2,\ldots,m$) с однородными краевыми условиями;

2) уравнение гиперболического типа первого порядка с постоянными коэффициентами и т.д. (В.И. Гольдин, Н.Н. Калиткин).

Вообще, если $A_\alpha(t_1)A_\beta(t_2) = A_\beta(t_2)A_\alpha(t_1)$, $\beta \neq \alpha$, $t_1, t_2 \in [0,T]$, то $U = \widetilde{U}$.

4. Будем говорить, что задача (3), (4) равномерно корректна, если существуют разрешающие операторы $U_\alpha(t,t')$ для всех $0 \leqslant t' \leqslant t \leqslant T$, $\alpha = 1,2,\ldots,m$, сильно непрерывные по совокупности t,t', и $\|U_\alpha(t,t')\| \leqslant 1 + M_D(t-t')$, где $M_D = \text{const} > 0$ не зависит от τ.

Т е о р е м а 1. *Пусть задача* (3), (4) *равномерно корректна и решение* $u = u(t)$ *задачи* (1) *удовлетворяет условиям:* 1) $\|(U_\alpha(t,t') - E)du/dt\| \leqslant \rho_1(\tau)$, 2) $\|(U_\alpha(t,t') - E)\psi_\alpha\| \leqslant \rho_2(\tau)$, $\psi_\alpha(\tau) = f_\alpha(t) - A_\alpha(t)u - \dfrac{du}{dt}$, 3) $\Psi_\alpha(t) = \int\limits_{t_j}^{t} U_\alpha(t,\theta)\psi_\alpha(\theta)\,d\theta$, $t \geqslant t_j$, *есть решение неоднородного уравнения* (3_α) *номера* α *с правой частью* $\psi_\alpha(t)$ *и начальным условием* $\psi_\alpha(t_j) = 0$, $\alpha = 1,\ldots,m$. *Тогда решение задачи* (3), (4) *равномерно по* t *сходится к решению задачи* (1) $\|v^j - u^j\| \leqslant \rho_3(\tau)$, $j = 1,2,\ldots$ (*здесь* $\rho_k(\tau) \to 0$, $k = 1,2,3$, *равномерно по* t).

5. Для решения задачи (3)-(4) в зависимости от конкретного вида A_α можно воспользоваться различными подходящими методами (например, искать точное выражение для $v_{(\alpha)}$, использовать метод характеристик, метод прямых, метод конечных разностей и т.д.).

Следуя [8], мы будем искать приближенное решение задачи (3), (4) в банаховом пространстве H_N (например, в пространстве функций, заданных на сетке ω_N в некоторой области p-мерного пространства $x = (x_1, \dots, x_p)$). Пусть P_N – линейный оператор, проектирующий H на H_N ($P_N u = u_N \in H_N$, если $u \in H$) и $\lim\limits_{N\to\infty} \|P_N u\|_N = \|u\|$ для любого $u \in H$, где $\|\cdot\|_N$ – норма в H_N, $\|\cdot\|$ – норма в H.

Заменяя каждое одномерное уравнение (3_α) номера α разностной схемой в H_N, получим л.о.с., аппроксимирующую исходную задачу (1). Мы рассмотрим двухслойные схемы. Уравнению (3_α) соответствует в H_N двухслойная схема

$$R_\alpha^N y_{(\alpha)} = S_\alpha^N \check{y}_{(\alpha-1)} + \tau\varphi_\alpha, \qquad y_{(\alpha)} = y_{(\alpha)}^{j+1}, \qquad \check{y}_{(\alpha)} = y_{(\alpha)}^j,$$

где R_α^N и S_α^N – линейные операторы, зависящие от t, τ, N и отображающие H_N в себя (см. [8]). Учитывая начальные условия $\check{y}_{(\alpha)} = y_{(\alpha-1)}$ при $\alpha > 1$ и $\check{y}_{(1)} = y_{(0)}$, $\check{y} = y^j$, получим л.о.с. в виде:

$$\begin{aligned} &R_\alpha^N y_{(\alpha)} = S_\alpha^N y_{(\alpha-1)} + \tau\varphi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \\ &t \in \omega_\tau, \quad y_{(0)} = \check{y}, y(0) = P_N u_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Решением этой задачи является сеточная функция $y = y^{j+1} = y_{(m)}^{j+1}$.

6. Задача (5) поставлена корректно (л.о.с. (5) корректна), если при достаточно большом $N \geqslant N_0$ и достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$ ее решение $y = y_{(m)}(N, \tau; t)$ для $t \in \omega_\tau$ существует для любых φ_α и $y(0)$ из H_N и равномерно по N, τ непрерывно зависит от φ_α и $y(0)$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$ (см. [8]), так что, например,

$$\max_{\omega_\tau} \|y(t)\|_N \leqslant M_1 \|y(0)\|_N + M_2 \max_{\alpha, \omega_\tau} \|\varphi_\alpha(t)\|_N. \tag{6}$$

Здесь и ниже M_k ($k = 1, 2, \dots$) – положительные постоянные, не зависящие от N и τ. Для корректности л.о.с. (5) достаточно, чтобы существовал обратный оператор $C_\alpha = (R_\alpha^N)^{-1}$ и были выполнены условия

$$\begin{gathered} \|B_m(t) \dots B_1(t)\|_N \leqslant 1 + M_3\tau, \ \|B_m(t) \dots B_{s+1}(t) C_s(t)\|_N \leqslant M_4, \\ \|C_m(t)\|_N \leqslant M_5, \qquad t \in \omega_\tau, \end{gathered} \tag{7}$$

где $B_\alpha = (R_\alpha^N)^{-1} S_\alpha^N$; $s = 1, 2, \dots, m-1$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *л.о.с.* (5) *корректна и каждая из одномерных схем* (5_α) *номера* α *аппроксимирует соответствующее уравнение* (3_α) *на его решении* $v_{(\alpha)}(t)$. *Тогда решение задачи* (5) *равномерно по* t *сходится к решению задачи* (1) *при* $\tau \to 0$ *и* $N \to \infty$: $\lim\limits_{N\to\infty,\,\tau\to 0} \|y - P_N u\|_N = 0$ *для* $t \in \omega_\tau$.

Мы не останавливаемся здесь на вопросе о порядке точности л.о.с. (см. [5]-[7], [2]). Отметим, что, последовательно переходя от (1) к (3), (4) и к (5), удается усилить некоторые оценки [5]-[7]. Если выполнено условие $\widetilde{U} = U$ и, следовательно, $v^j = u^j$, то для решения одномерных задач (3_α) целесообразно пользоваться схемами более высокого, чем $O(\tau)$ порядка точности, так как $y^j - P_N u^j = y^j - P_N v^j$ (например, схемой $O(h^4 + \tau^2)$ для уравнения теплопроводности с учетом способа вычисления $f_m(t)$, указанного выше, и т.д.).

7. Пусть H_N – евклидово пространство со скалярным произведением $(y,z)_N$ и нормой $\|z\|_N = \sqrt{(z,z)_N}$. Рассмотрим семейство двухслойных л.о.с. вида

$$\begin{gathered}\frac{y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)}}{\tau} + A_\alpha^N\big(\sigma_\alpha y_{(\alpha)} + (1-\sigma_\alpha) y_{(\alpha-1)}\big) = \varphi_\alpha,\\ \alpha = 1,\ldots,m, \qquad t \in \omega_\tau, \qquad y(0) = P_N u_0,\end{gathered} \tag{8}$$

где A_α^N – линейный оператор, область определения и область значений которого совпадают с H_N. Для корректности л.о.с. (8) достаточна одна из трех групп условий при $t \in \omega_\tau$ (ср. [8]):

Т е о р е м а 3. *Если* $\sigma_\alpha \geqslant 0.5$, $A_\alpha^N(t)$ *полуограничен снизу, т.е.* $(A_\alpha^N(t)y,\, y)_N \geqslant -c_1\|y\|_N^2$ *для любого* $y \in H_N$, $\tau \leqslant \tau_0(c_1)$ *достаточно мало, то л.о.с.корректна.*

Т е о р е м а 4. *Если* $\sigma_\alpha \geqslant 0.5$, $(A_\alpha^N(t)y,\, y)_N \geqslant 0$, $y \in H_N$, $\tau > 0$ *– любое, то л.о.с. корректна.*

Т е о р е м а 5. *Если* $\sigma_\alpha \geqslant \sigma_\varepsilon = 0.5 - (1-\varepsilon)/\tau\|A_\alpha^N\|_N$, $(A_\alpha^N y,\, y)_N \geqslant 0$, A_α^N *– конечномерный самосопряженный оператор, т.е.* $(A_\alpha^N y,\, v)_N = (y,\, A_\alpha^N v)_N$, $\varepsilon \in (0,1]$, *то л.о.с. корректна.*

8. Меняя f_α, нумерацию A_α в (2) число слагаемых в (2) и т.д., получим бесчисленное множество систем (3)-(4). В частности, полагая

$$A = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m} A'_\alpha,\ A'_\alpha = 0.5A_\alpha,\ \alpha \leqslant m, \quad A'_\alpha = 0.5A_{2m+1-\alpha},\ \alpha > m,$$

получим "симметричную" систему(3), (4), которая в ряде случаев имеет точность $O(\tau^2)$ $(\|v^j - u^j\| = O(\tau^2))$. При $m = 2$ имеем

$$A'_1 = 0.5A_1, \qquad A'_2 = 0.5A_2, \qquad A'_3 = 0.5A_2, \qquad A'_4 = 0.5A_1$$

$$(\text{ схема } 0.5A_1 \to 0.5A_2 \to 0.5A_2 \to 0.5A_1 \ ).$$

Выбирая в (8) $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_4 = 1$, получим обобщение схемы [1], в чем можно убедиться после исключения $y_{(1)}$, $y_{(3)}$. (На это обратил внимание также И.В. Фрязинов.) Таким образом, схема [1] есть л.о.с. Можно также пользоваться л.о.с. при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_4 = 1$. Указанная симметризация позволяет получить второй порядок точности по τ.

Возможно использование трехслойных схем (для $m = 2$ это очевидно), а также комбинирование двухслойных и трехслойных схем. Схемы [3] для однородного ($f = 0$) уравнения теплопроводности более естественно трактовать как л.о.с., а не как схемы расщепления.

9. В [5] был предложен несколько другой способ одномерного моделирования задачи (1). Рассматривалась система

$$\frac{1}{m}\frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + A_\alpha(t)v_{(\alpha)} = f_\alpha(t), \ t \in (t^j_{\alpha-1}, t^j_\alpha), \ t^j_\alpha = t^j + \frac{\alpha}{m}\tau, \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

$$v_{(\alpha)}(t^j_{\alpha-1}) = v_{(\alpha-1)}(t^j_{\alpha-1}), \qquad \alpha > 1, \qquad v_{(1)}(t^j) = v(t^j) = v_{(m)}(t^j),$$

причем $v(t^{j+1}) = v_{(m)}(t^{j+1})$. Если $f_\alpha = 0$ и A_α не зависят от t, то эта задача эквивалентна задаче (3), (4). В общем случае их решения отличаются на $O(\tau)$. Имеет место аналог теоремы 1 (см. также [10]).

Отсюда получаются те же л.о.с., что и раньше (см. [9]).

10. Исследован также случай $A = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{p} A_{\alpha\beta}$. Система (3) имеет вид ($m = 2p$)

$$\frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A^-_{\alpha\beta}(t)v_{(\beta)} = f_\alpha, \qquad \alpha \leqslant p;$$

$$\frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + \sum_{\beta=p}^{2p+1-\alpha} A^+_{2p+1-\alpha,\beta}(t)v_{(\beta)} = f_\alpha, \qquad \alpha > p,$$

с начальными условиями (4); здесь $(A^-_{\alpha\beta})$ и $(A^+_{\alpha\beta})$ – треугольные матрицы-операторы ($A^-_{\alpha\beta} = 0$ при $\beta > \alpha$, $A^+_{\alpha\beta} = 0$ при $\beta < \alpha$,

$A^-_{\alpha\beta} + A^+_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}$). Переход к л.о.с. очевиден. Такой метод построения л.о.с. применялся в [6] для системы многомерных параболических уравнений со смешанными производными.

11. Изучались локально одномерные схемы для квазилинейных уравнений, а также для уравнений второго порядка (см. [7]):

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A(t)u = f(t), \quad u(0) = u_0, \qquad \frac{du}{dt}(0) = \overline{u}_0,$$

$$A = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha, \qquad A = \sum_{\alpha=1}^{m}(A_\alpha + A^*_\alpha),$$

где A^*_α - сопряженный к A_α оператор.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. D.W. Peaceman, H.H. Rachford, J. Industr. Math. Soc., **3**, №1, 28 (1955).

2. J. Douglas, H.H. Rachford, Trans. Math. Soc., **82**, №2, 421 (1956).

3. Н.Н. Яненко, ДАН, **125**, № 6, 1207 (1959); **134**, №5, 1034 (1960).

4. Е.Г. Дьяконов, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **2**, №1, 57 (1962); **2**, №4, 549 (1962); **4**, №2, 278 (1964).

5. А.А. Самарский., Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **2**, №5, 549 (1962); **3**, № 3, 431 (1963).

6. А.А. Самарский, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **4**, №4, 753 (1964); **4**, № 5, 927 (1964).

7. А.А. Самарский, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **4**, №4, 638, (1964); **5**, №1, 34 (1965).

8. А.А. Самарский, ДАН, **165**, №5 (1965).

9. А.А. Самарский, Aplikace Matem., **10**, №2, (1965).

10. Н.Н. Яненко, Сибирск. матем. журн., **5**, №6, 1431 (1964).