ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 5 Январь 1965 Февраль № 1

УДК 518:517.944/.947

ЭКОНОМИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

1. В данной заметке мы рассмотрим прежде всего аддитивные разностные схемы (см. [1]—[5]) для системы гиперболических уравнений второго порядка, содержащих смешанные производные. Эти схемы являются схемами переменных направлений, абсолютно устойчивыми и сходящимися по меньшей мере со скоростью $O(|h|^2+\tau)$, где $|h|^2=\sum\limits_{\alpha=1}^{p}h_\alpha^2$, h_α — шаг по переменному x_α, p — число измерений. Вычислительный алгоритм состоит в обращении трехточечно-треугольного оператора, что сводится к последовательному применению известных формул прогонки. Число операций для определения решения на новом временно́м слое пропорционально числу узлов пространственной сетки и является величиной того же порядка, что и число операций для чисто явной схемы. Таким образом, предлагаемые ниже схемы являются экономичными.

При построении экономичных схем для уравнения вида

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{p}A_{\alpha\beta}(t)u=f$$

мы используем общее свойство оператора

$$A=\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{p}A_{\alpha\beta},$$

т. е. представимость его в виде суммы операторов $A_{\alpha\beta}$ более простой структуры.

Аддитивные экономичные схемы для общей гиперболической системы второго порядка используются затем при написании экономичных схем для системы уравнений теории упругости в случае двух и трех пространственных переменных ($p=2$ и $p=3$).

Построена также схема расщепления для уравнений упругости, абсолютно устойчивая и сходящаяся со скоростью $O(|h|^2+\tau^2)$. По экономичности схема расщепления сравнима с аддитивными схемами, но для сходимости требует большей гладкости решения дифференциального уравнения.

В п. 7 рассматривается итерационная схема переменных направлений для решения разностной задачи, соответствующей стационарной задаче теории упругости.

Доказана сходимость этой схемы для $p = 2, 3$, и показано, что число итераций $\nu = O(h^{-2(p-1)/p} \ln (1/\varepsilon))$, где ε — требуемая точность.

Экономичные схемы другого типа рассматривались в двухмерном случае ($p = 2$) для динамической задачи теории упругости в [6] и для статической задачи теории упругости в [7].

2. Пусть $\bar{G} = G + \Gamma = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \ \alpha = 1, \ldots, p\}$ есть p-мерный параллелепипед с границей Γ. В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ ищется решение задачи

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \sum_{\alpha, \beta=1}^{p} L_{\alpha\beta}\mathbf{u} + \mathbf{f}(x, t), \qquad L_{\alpha\beta}\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_\beta}\right), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{v}(x, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{v}_1(x), \qquad x \in \bar{G}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_p)$; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) = (u^1, \ldots, u^s, \ldots, u^n)$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$ — векторы размерности n, $k = (k_{\alpha\beta}) = (k_{\alpha\beta}^{sm})$, $s, m = 1, \ldots, n$,— клеточная матрица $p \times p$ с клетками $n \times n$, удовлетворяющая условию симметрии

$$k_{\alpha\beta}^{sm}(x, t) = k_{\beta\alpha}^{ms}(x, t) \tag{3}$$

и условию положительной определенности

$$\sum_{s, m=1}^{n} \sum_{\alpha, \beta=1}^{p} k_{\alpha\beta}^{sm}(x, t)\xi_\beta^m \xi_\alpha^n \geqslant c_1 \sum_{s=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{p} (\xi_\alpha^s)^2, \qquad (x, t) \in \bar{Q}_T, \tag{4}$$

где $\xi_\alpha = (\xi_\alpha^1, \ldots, \xi_\alpha^s, \ldots, \xi_\alpha^n) \not\equiv 0$ — произвольный вещественный вектор, а c_1 — положительная постоянная.

Будем предполагать, что задача (1)—(2) имеет единственное решение $u = u(x, t)$, непрерывное в $\bar{Q}_T$ и дифференцируемое нужное по ходу изложения число раз. При выводе априорных оценок предполагается, что $k_{\alpha\beta}(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица по t и $x_{\alpha'}$, $\alpha' = 1, \ldots, p$.

Система уравнений теории упругости

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{f}(x, t), \tag{5}$$

где $\Delta\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^{p} \partial^2\mathbf{u} / \partial x_\alpha^2$ — оператор Лапласа, $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^p)$, $\lambda = \mathrm{const} > 0$ и $\mu = \mathrm{const} > 0$ — коэффициенты Ламэ, очевидно, является частным случаем системы уравнений (1) при $n = p$ и

$$k_{\alpha\beta}^{sm} = \mu\delta_{\alpha\beta}\delta_{sm} + (\lambda + \mu)\delta_{\alpha s}\delta_{\beta m}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{6}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Условие (3) выполняется автоматически. Покажем, что условие (4) также выполнено при $c_1 = \mu$. В самом деле,

$$\sum_{s,\, m=1}^{p} \sum_{\alpha,\, \beta=1}^{p} k_{\alpha\beta}^{m} \xi_\alpha{}^s \xi_\beta{}^m = \mu \sum_{\alpha,\, s=1}^{p} (\xi_\alpha{}^s)^2 + (\lambda + \mu) \sum_{\alpha,\, s=1}^{p} \xi_\alpha{}^\alpha \xi_s{}^s =$$

$$= \mu \sum_{\alpha,\, s=1}^{p} (\xi_\alpha{}^s)^2 + (\lambda+\mu) \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \xi_\alpha{}^\alpha \right)^2 \geqslant \mu \sum_{\alpha,\, s=1}^{p} (\xi_\alpha{}^s)^2.$$

3. Введем разностные сетки $\omega_\tau = \{t_j = j\tau \in [0, T],\, j = 0, 1, \ldots\}$ и $\bar\omega_h = \{x_i = (i_1 h_1, \ldots, i_\alpha h_\alpha, \ldots, i_p h_p) \in \bar G = G + \Gamma;\ i_\alpha = 0, 1 \ldots, N_\alpha,\ h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с шагами τ по переменной t и h_α по переменной x_α, $\alpha = 1, \ldots, p$; пусть $\gamma_h = \{x_i \in \Gamma\}$ — граница сетки $\bar\omega_h$, $\bar\omega_h \diagdown \gamma_h = \{x_i \in G\}$—множество внутренних узлов, $|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha{}^2$. Следуя [1], введем обозначения

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x_i, t_{j+1}) = \mathbf{y}^{j+1}, \quad \check{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^j,$$

$$x_i^{(\pm 1_\alpha)} = (i_1 h_1, \ldots, i_{\alpha-1} h_{\alpha-1}, (i_\alpha \pm 1) h_\alpha, i_{\alpha+1} h_{\alpha+1}, \ldots, i_p h_p),$$

$$\mathbf{y}^{(\pm 1_\alpha)} = \mathbf{y}(x_i^{(\pm 1_\alpha)}, t_{j+1}), \quad \mathbf{y}_{\bar x_\alpha} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(-1_\alpha)}) / h_\alpha, \quad \mathbf{y}_{x_\alpha} = (\mathbf{y}^{(+1_\alpha)} - \mathbf{y}) / h_\alpha.$$

Оператор

$$L_{\alpha\beta}\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_\beta} \right) \tag{7}$$

заменим на разностной сетке ω_h такой же схемой второго порядка аппроксимации, как и в [2], полагая

$$\begin{gathered} \Lambda_{\alpha\beta}\mathbf{y} = \tfrac{1}{2} \left[\left(a_{\alpha\beta} \mathbf{y}_{\bar x_\beta} \right)_{x_\alpha} + \left(a_{\alpha\beta}^{(+1_\beta)} \mathbf{y}_{x_\beta} \right)_{\bar x_\alpha} \right] \text{ при } \beta \neq \alpha, \\ \Lambda_{\alpha\alpha}\mathbf{y} = \left(a_{\alpha\alpha} \mathbf{y}_{\bar x_\alpha} \right)_{x_\alpha}, \end{gathered} \tag{8}$$

где $(a_{\alpha\beta})$ — матрица-функционал от матрицы $(k_{\alpha\beta})$ с шаблоном $\{-1 \leqslant s_\beta \leqslant 0,\ \beta = 1, \ldots, p\}$. Коэффициенты $a_{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta}^{sm})$ удовлетворяют условиям

$$a_{\alpha\beta}^{sm} = a_{\beta\alpha}^{ms}, \tag{9}$$

при достаточно малом $|h| \leqslant h_0$ — условию

$$\sum_{s,m=1}^{n} \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta}^{sm} \xi_\beta{}^m \xi_\alpha{}^s \geqslant c_1' \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{s=1}^{n} (\xi_\alpha{}^s)^2, \qquad (x, t) \in \bar\omega_h \times \omega_\tau, \tag{10}$$

где $c_1' \leqslant c_1$ — положительная постоянная, не зависящая от сетки, и условию, получающемуся из (10) после замены $a_{\alpha\beta}^{sm}$ коэффициентом $(a_{\alpha\beta}^{sm})^{(1_\beta)}$ в точке $x_i^{(+1_\beta)}$.

В случае постоянных коэффициентов $k_{\alpha\beta} = \text{const}$, очевидно, $a_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}$ и вместо (8) получим

$$\Lambda_{\alpha\beta}\mathbf{y} = \tfrac{1}{2} k_{\alpha\beta} (\mathbf{y}_{\bar x_\beta x_\alpha} + \mathbf{y}_{\bar x_\alpha x_\beta}), \qquad \Lambda_{\alpha\alpha}\mathbf{y} = k_{\alpha\alpha} \mathbf{y}_{\bar x_\alpha x_\alpha}; \tag{11}$$

условие (10) выполнено на любой сетке.

Замечание. Для $\Lambda_{\alpha\beta}y$ вместо (8) можно рассматривать и другие представления, например

$$
\begin{gathered}
\Lambda_{\alpha\beta}y = \frac{1}{2}\left[\left(a_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta}\right)_{\bar{x}_\alpha} + \left(a^{(+1_\beta)}_{\alpha\beta}y_{x_\beta}\right)_{x_\alpha}\right],\\
\Lambda_{\alpha\beta}y = \frac{1}{2}\left[\left(a_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta}\right)_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + \left(a^{(+1_\beta)}_{\alpha\beta}y_{x_\beta}\right)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\right],
\end{gathered}
\tag{12}
$$

где $v_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = \frac{1}{2}(v_{\bar{x}_\alpha} + v_{x_\alpha})$ — центральная разностная производная. Во всех случаях условие (10) будет выполнено при достаточно малом шаге $|h| \leqslant h_0$ и все последующие выводы сохраняют силу.

4. Введем «треугольные» операторы L^- и L^+. Для этого симметрическую матрицу $k_{\alpha\alpha} = (\overset{sm}{k_{\alpha\alpha}})$ представим в виде суммы двух треугольных матриц $k_{\alpha\alpha} = \overset{-}{k_{\alpha\alpha}} + \overset{+}{k_{\alpha\alpha}}$, $\overset{-}{k_{\alpha\alpha}} = (\overset{-sm}{k_{\alpha\alpha}})$, $\overset{+}{k_{\alpha\alpha}} = (\overset{+sm}{k_{\alpha\alpha}})$, полагая $\overset{-ss}{k_{\alpha\alpha}} = \overset{+ss}{k_{\alpha\alpha}} = \frac{1}{2}\overset{ss}{k_{\alpha\alpha}}$, $\overset{-sm}{k_{\alpha\alpha}} = \overset{sm}{k_{\alpha\alpha}}$, $\overset{+sm}{k_{\alpha\alpha}} = 0$ при $m < s$, $\overset{+sm}{k_{\alpha\alpha}} = \overset{sm}{k_{\alpha\alpha}}$, $\overset{-sm}{k_{\alpha\alpha}} = 0$ при $m > s$ и любом $\alpha = 1, \ldots, p$. Матрица $\overset{\mp}{k_{\alpha\alpha}}$ есть диагональная матрица $p \times p$ с клетками, являющимися треугольными матрицами $n \times n$, сопряженными друг другу:

$$
\overset{-sm}{k_{\alpha\alpha}} = \overset{+ms}{k_{\alpha\alpha}} \qquad (\overset{-sm}{a_{\alpha\alpha}} = \overset{+ms}{a_{\alpha\alpha}}). \tag{13}
$$

В соответствии с представлением $k_{\alpha\alpha} = \overset{-}{k_{\alpha\alpha}} + \overset{+}{k_{\alpha\alpha}}$ получим

$$
L_{\alpha\alpha} = \overset{-}{L_{\alpha\alpha}} + \overset{+}{L_{\alpha\alpha}}, \qquad \Lambda_{\alpha\alpha} = \overset{-}{\Lambda_{\alpha\alpha}} + \overset{+}{\Lambda_{\alpha\alpha}},
$$

где

$$
\overset{\mp}{L_{\alpha\alpha}}\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overset{\mp}{k_{\alpha\alpha}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_\alpha}\right)
$$

и т. д. Операторы $\Lambda_{\alpha\alpha}^-$ и $\Lambda_{\alpha\alpha}^+$, в силу условия (13), являются сопряженными друг другу операторами на сетке ω_h в смысле скалярного произведения

$$
(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \sum_{\omega_h} \mathbf{y}(x_i)\mathbf{v}(x_i)H, \qquad H = h_1 \ldots h_p,
$$

т. е.

$$
(\overset{-}{\Lambda_{\alpha\alpha}}\mathbf{y}, \mathbf{v}) = (\overset{+}{\Lambda_{\alpha\alpha}}\mathbf{v}, \mathbf{y}), \qquad a = 1, \ldots p, \tag{14}
$$

где $\mathbf{y}$ и $\mathbf{v}$ — произвольные сеточные функции, обращающиеся в нуль на границе γ_h сетки ω_h.

Представим оператор

$$
L = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} L_{\alpha\beta}
$$

в виде суммы двух треугольных операторов:

$$
\begin{gathered}
L = L^- + L^+, \qquad L^\mp = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \overset{\mp}{L_{\alpha\beta}} = \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\mp}{L_\alpha}, \qquad L_\alpha^\mp = \sum_{\beta=1}^{p} \overset{\mp}{L_{\alpha\beta}},\\
\overset{\mp}{L_{\alpha\beta}} = \overset{\mp}{L_{\alpha\alpha}} \text{ при } \beta = \alpha, \qquad L_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta},\\
\overset{+}{L_{\alpha\beta}} = 0 \text{ при } \beta \leqslant \alpha, \qquad \overset{+}{L_{\alpha\beta}} = L_{\alpha\beta},\\
L_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \beta > \alpha, \qquad L_\alpha^- = L_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta=1} L_{\alpha\beta}, \qquad L_\alpha = L_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} L_{\alpha\beta}.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

В силу принципа аддитивности [1]—[5] решение системы уравнений

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} [(L_\alpha^- + L_\alpha^+)\mathbf{u} + \mathbf{f}_\alpha], \qquad \sum^{p} \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{f}$$

сводится к последовательному решению на сетке $\omega_h \times \omega_\tau$ с шагом τ / p более простых уравнений

$$\frac{1}{p}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = L_\alpha^- \mathbf{u} + L_\alpha^+ \mathbf{u} + \mathbf{f}_\alpha. \tag{16}$$

Случай, когда $L_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} L_{\alpha\alpha}$, т. е. смешанные производные отсутствуют, рассмотрен в [1].

Введем промежуточные между $\mathbf{y}^j = \check{\mathbf{y}}$ и $\mathbf{y}^{j+1} = \mathbf{y}$ значения $\mathbf{y}^{j+\alpha/p} = \mathbf{y}_{(\alpha)}$, полагая $\mathbf{y}^{(j-1)+\alpha/p} = \check{\mathbf{y}}_{(\alpha)}$, и используем для определения $\mathbf{y}_{(\alpha)}$ разностную схему, аппроксимирующую уравнение (16) номера α. По аналогии с [1], для аппроксимации $\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ используем $(p+1)$ временной слой:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \sim \sigma_p \mathbf{u}_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha}, \qquad \alpha = 1, \ldots, p;$$

$$\mathbf{u}_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \begin{cases} (\mathbf{u}_{(\alpha)} - 2\mathbf{u}_{(\alpha-1)} + \check{\mathbf{u}}_{(\alpha)}) / \tau^2, & \sigma_p = 2, \quad \mathbf{u}_{(0)} = \check{\mathbf{u}}_{(2)}, \quad p = 2 \\ (\mathbf{u}_{(\alpha)} - \mathbf{u}_{(\alpha-1)} - \mathbf{u}_{(\alpha-2)} + \check{\mathbf{u}}_{(\alpha)}) / \tau^2, & \sigma_p = \frac{3}{2}, \quad \mathbf{u}_{(0)} = \check{\mathbf{u}}_{(3)}, \\ \qquad \mathbf{u}_{(-1)} = \check{\mathbf{u}}_{(2)}, & p = 3. \end{cases} \tag{17}$$

Аддитивная схема переменных направлений для задачи (1)—(2) будет иметь вид

$$\sigma_p \mathbf{y}_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^- \mathbf{y}_{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha}^{p} \Lambda_{\alpha\beta}^+ \check{\mathbf{y}}_{(\beta)} + \varphi_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, p, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_t, \tag{18}$$

$$\mathbf{y}_\alpha = \mathbf{v}(x, t_j^*) \text{ при } x_\alpha = 0, l_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, p; \quad \mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \tag{19}$$

где $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t_j^*)$ — аппроксимация второго порядка на сетке ω_h функции $\mathbf{f}_\alpha(x, t)$, $t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$, например $t_j^* = t_{j+1/2} = t_j + 0.5\,\tau$. Коэффициенты $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(x, t_{(\alpha)}^*)$ берутся в средний момент $t_{(\alpha)}^* = \bar{t}_j + \frac{\alpha}{p}\tau - 0.5\tau$ (ср. [1]).

Второе начальное условие можно аппроксимировать по аналогии с [1] или более просто, полагая

$$\mathbf{y}^{\alpha/p} = \mathbf{v}_1(x) + \frac{\alpha\tau}{p}\tilde{\mathbf{v}}_1(x), \qquad \alpha = 1, \ldots, p-1, \qquad p = 2, 3. \tag{20}$$

Такое условие достаточно для точности $O(\tau + |h|^2)$. Перепишем (18) в виде

$$\left(E - \frac{\tau^2}{\sigma_p}\Lambda_{\alpha\alpha}^-\right)\mathbf{y}_{(\alpha)} = R_\alpha(\mathbf{y}) + \frac{\tau^2}{\sigma_p}\sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \Lambda_{\alpha\beta}\mathbf{y}_{(\beta)} + \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{\Phi}_\alpha, \tag{21}$$

где

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{\tau^2}{\sigma_p}\left[\sum_{\beta=\alpha}^{p} \Lambda^+_{\alpha\beta}\check{\mathbf{y}}_{(\beta)} + \varphi_\alpha\right],$$

$R_\alpha(\mathbf{y}) = 2\mathbf{y}_{(\alpha-1)} - \check{\mathbf{y}}_{(\alpha)}$ при $p = 2$, $R_\alpha(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_{(\alpha-1)} + \mathbf{y}_{(\alpha-2)} - \check{\mathbf{y}}_{(\alpha)}$ при $p = 3$, E — единичный оператор.

Отсюда видно, что для определения $\mathbf{y}_{(\alpha)}$ (все $\mathbf{y}_{(\beta)}$ при $\beta < \alpha$ и все $\check{\mathbf{y}}_{(\beta)}$ при $\beta = 1, \ldots, p$ уже известны) мы получаем систему трехточечных уравнений с треугольной матрицей коэффициентов. Ее решение сводится к обращению оператора $E - (\tau^2/\sigma_p)\Lambda^-_{\alpha\alpha}$, что достигается n-кратным применением обычных формул одномерной прогонки для каждой цепочки y_α (см. [1]) при фиксированном $\alpha = 1, \ldots, p$. При реализации алгоритма (21) мы должны запоминать значения $\mathbf{y}_{(\alpha)}$ на p слоях.

Напишем уравнение для s-й компоненты $y_{(\alpha)}{}^s$ вектора $\mathbf{y}_{(\alpha)}$:

$$y^s_{(\alpha)} - \frac{\tau^2}{\sigma_p}(a^{-ss}_{\alpha\alpha}y^s_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \Phi^s_{(\alpha)} + \frac{\tau^2}{\sigma_p}\sum_{m=1}^{s-1}(a^{-sm}_{\alpha\alpha}y^m_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}. \qquad (22)$$

Здесь $\Phi_\alpha{}^s$ известна, так как счет идет в направлении от α к $\alpha + 1$, $\alpha = 1, \ldots, p$; второе слагаемое также известно, если определять последовательно $y_{(\alpha)}{}^1, \ldots, y_{(\alpha)}{}^s, \ldots, y_{(\alpha)}{}^p$, т. е. вести счет от s к $s + 1$. Отсюда видно, что найти $y_{(\alpha)}{}^s$ можно, решая первые краевые задачи для трехточечных уравнений на отрезках, параллельных оси Ox_α.

Если поменять ролями $L_\alpha{}^-$ и $L_\alpha{}^+$ и, соответственно,

$$\Lambda_\alpha{}^- = \Lambda^-_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1}\Lambda_{\alpha\beta} = \sum_{\beta=1}^{\alpha}\Lambda^-_{\alpha\beta} \quad \text{и} \quad \Lambda_\alpha{}^+ = \Lambda^+_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p}\Lambda_{\alpha\beta} = \sum_{\beta=\alpha}^{p}\Lambda^+_{\alpha\beta},$$

то мы получим вторую аддитивную схему

$$\sigma_p \mathbf{y}_{\bar{t}_\alpha\bar{t}_\alpha} = \sum_{\beta=\alpha}^{p}\Lambda^+_{\alpha\beta}\mathbf{y}_{(\beta)} + \sum_{\beta=1}^{\alpha}\Lambda^+_{\alpha\beta}\check{\mathbf{y}}_{(\beta)} + \varphi_\alpha \qquad (23)$$

с такими же начальными и граничными условиями, что и первая схема. Здесь для определения y_α надо обратить треугольный трехточечный оператор $E - (\tau^2/\sigma_p)\Lambda_{\alpha\alpha}{}^+$. При этом счет идет от $\alpha + 1$ к α и от $s + 1$ к s.

Чередование этих двух схем дает третью схему. Вводя промежуточное значение $y^{j+\alpha/2p}$, $\alpha = 1, \ldots, 2p - 1$, получим (ср. [2], [5])

$$\begin{aligned}
&\sigma_p \mathbf{y}_{\bar{t}_\alpha\bar{t}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\alpha}\Lambda^-_{\alpha\beta}\mathbf{y}_{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha}^{p}\Lambda^+_{\alpha\beta}\check{\mathbf{y}}_{(\beta)} + \varphi_\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots, p;\\
&\sigma_p \mathbf{y}_{\bar{t}_{\alpha'}\bar{t}_{\alpha'}} = \sum_{\beta=\alpha}^{p}\Lambda^+_{\alpha\beta}\mathbf{y}_{(\beta')} + \sum_{\beta=1}^{\alpha}\Lambda^-_{\alpha\beta'}\check{\mathbf{y}}_{(\beta')} + \varphi_{\alpha'},\\
&\qquad \alpha' = 2p + 1 - \alpha, \qquad \beta' = 2p + 1 - \beta;
\end{aligned} \qquad (24)$$

где $\alpha' = p + 1, \ldots, 2p$, $\varphi_{\alpha'} = \varphi_\alpha$, $\alpha = p, p - 1, \ldots, 2, 1$.

5. Схемы (18), (23) устойчивы при достаточно малом $|h| \leqslant h_0$, обеспечивающем выполнение требования (10) положительной определенности

матриц $(a_{\alpha\beta})$ и $(a_{\alpha\beta}{}^{(+1\beta)})$ и при любом τ и сходятся по крайней мере со скоростью $O(|h|^2+\tau)$. Доказательство этих утверждений проводится по аналогии с [1], [4] методом энергетических неравенств.

При этом основную роль играет тождество такого вида:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\{(a_{\alpha\beta}^{-}\xi_\beta,\ \xi_\alpha-\check{\xi}_\alpha)+(a_{\alpha\beta}^{+}\check{\xi}_\beta,\ \xi_\alpha-\check{\xi}_\alpha)=J-\check{J}\ (1+O(\tau))+R,$$

где

$$J=\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta=1}^{\alpha}(a_{\alpha\beta}^{-}\xi_\beta,\ \xi_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta=\alpha}^{p}(a_{\alpha\beta}^{+}\xi_\beta,\ \xi_\alpha);$$

$$R=\sum_{\alpha=1}^{p}\left\{\sum_{\beta=1}^{\alpha}(a_{\alpha\beta}^{+}\check{\xi}_\beta,\ \xi_\alpha)-(a_{\alpha\beta}^{-}\check{\xi}_\beta,\ \xi_\alpha)\right\}.$$

Пользуясь (3), нетрудно убедиться в том, что $R=0$.

З а м е ч а н и е. В случае постоянных коэффициентов $k_{\alpha\beta}=\mathrm{const}$ указанные оценки точности рассматриваемых схем (18), (23) справедливы при любых h_α и τ.

6. Обратимся теперь к уравнениям упругости (5). В этом случае, как мы видели в п. 2, $n=p$, $k_{\alpha\beta}^{sm}=\mathrm{const}$,

$$k_{\alpha\beta}^{sm}=\mu\delta_{\alpha\beta}\delta_{sm}+(\lambda+\mu)\,\delta_{\alpha s}\delta_{\beta m},\qquad \delta_{sm}=\begin{cases}1, & s=m,\\ 0, & s\neq m.\end{cases}\tag{25}$$

Для уравнений упругости (5) можно пользоваться любой из рассмотренных в п. 4 схем, имея в виду, что $a_{\alpha\beta}=k_{\alpha\beta}$, где $k_{\alpha\beta}$ определяется формулой (25).

Напишем более подробно, например, разностные уравнения (18) в случае $p=2$; при этом $\mathrm{y}=(y^{(1)},y^{(2)})$ и

$$2y^{(1)}_{\bar{t}_1 t_1}=\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\,(y^{(1)}_{(1)\,\bar{x}_1x_1}+\check{y}^{(1)}_{(1)\,\bar{x}_1x_1})+\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\,(\check{y}^{(2)}_{(2)\,\bar{x}_2x_1}+\check{y}^{(2)}_{(2)\,x_2\bar{x}_1})+\varphi^{(1)}_{(1)}$$

$$2y^{(2)}_{\bar{t}_1 t_1}=\frac{1}{2}\mu\,(y^{(2)}_{(1)\,\bar{x}_1x_1}+\check{y}^{(2)}_{(1)\,\bar{x}_1x_1})+\varphi^{(2)}_{(1)},$$

$$2y^{(1)}_{\bar{t}_2 t_2}=\frac{1}{2}\mu\,(y^{(1)}_{(2)\,\bar{x}_2x_2}+\check{y}^{(1)}_{(2)\,\bar{x}_2x_2})+\varphi^{(1)}_{(2)},$$

$$2y^{(2)}_{\bar{t}_2 t_2}=\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\,(y^{(2)}_{(2)\,\bar{x}_2x_2}+\check{y}^{(2)}_{(2)\,\bar{x}_2x_2})+\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\,(y^{(1)}_{(1)\,\bar{x}_2x_1}+y^{(1)}_{(1)\,\bar{x}_1x_2})+\varphi^{(2)}_{(2)}.$$

Напомним, что здесь индекс наверху означает номер компоненты, а индекс внизу — номер вектора ($y^{(1)}_{(1)}=(y^{(1)})^{j+1/2}$, $y^{(1)}_{(2)}=(y^{(1)})^{j+1}=y^{(1)}$, $\check{y}^{(2)}_{(2)}=(y^{(2)})^{j+1}=\check{y}^{(2)}$ и т. д.). Пользуясь (18) и (25), нетрудно написать схему для $p=3$.

7. Для уравнений упругости можно построить также ряд схем расщепления, абсолютно устойчивых, экономических и сходящихся со скоростью $O(\tau+|h|^2)$ или $O(\tau^2+|h|^2)$.

Рассмотрим сначала две многомерные схемы

$$\mathrm{y}_{\bar{t}t}=\Lambda^{-}\mathrm{y}+\Lambda^{+}\check{\mathrm{y}}+\check{\varphi}\qquad(\mathrm{y}_{\bar{t}t}=(\mathrm{y}^{j+1}-2\mathrm{y}^{j}+\mathrm{y}^{j-1})/\tau^2);\tag{I$^-$}$$

$$\mathrm{y}_{\bar{t}t}=\Lambda^{+}\mathrm{y}+\Lambda^{-}\check{\mathrm{y}}+\check{\varphi},\tag{I$^+$}$$

где Λ^- и Λ^+ — треугольные операторы, аппроксимирующие треугольные дифференциальные операторы L^- и L^+, $y = y^{j+1}$, $\check{\check{y}} = y^{j-1}$, $\check{y} = y^j$.

Пусть $\mathring{\Lambda}_\alpha \mathbf{y} = \mathbf{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, а $\mathring{\Lambda}_{sk}$ обозначает разностную аппроксимацию смешанной производной $\partial^2 \mathbf{u} / \partial x_s \partial x_k$, например $\mathring{\Lambda}_{sk}\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_{\bar{x}_s x_k} + \mathbf{y}_{x_s \bar{x}_k})$ или $\mathring{\Lambda}_{sk}\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_{\bar{x}_s \bar{x}_k} + \mathbf{y}_{x_s x_k})$. Тогда выражения для треугольных операторов Λ^- и Λ^+ можно записать в виде (верхний индекс s или k — номер компоненты):

$$(\Lambda^-\mathbf{y})^s = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p} \varkappa_{s\alpha}\mathring{\Lambda}_\alpha y^s + (\lambda+\mu)\sum_{k=1}^{s-1}\mathring{\Lambda}_{sk}y^k, \qquad \varkappa_{s\alpha} = \mu + (\lambda+\mu) + \delta_{s\alpha}, \tag{26}$$

$$(\Lambda^+\mathbf{y})^s = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p} \varkappa_{p\alpha}\mathring{\Lambda}_\alpha y^s + (\lambda+\mu)\sum_{k=s+1}^{p}\mathring{\Lambda}_{sk}y^k. \tag{27}$$

Граничные условия на γ_h выполняются точно:

$$\mathbf{y}|_{\gamma_h} = \mathbf{v}(x, t),$$

а начальные условия имеют вид

$$\mathbf{y}(x,\ 0) = \mathbf{v}_0(x), \qquad \mathbf{y}_{\bar{t}}(x,\ \tau) = \mathbf{v}_1(x) + \tau\tilde{\mathbf{v}}_1(x),$$

где $\tilde{\mathbf{v}}_1(x)$ выбирается так, чтобы начальное условие $\partial\mathbf{u}/\partial t = \mathbf{v}_1$ аппроксимировалось с точностью $O(\tau^2)$; для этого, например, достаточно положить $\tilde{\mathbf{v}}_1 = -(L\mathbf{u} + \mathbf{f})|_{t=0}$.

Каждая из схем I^- и I^+ абсолютно устойчива и имеет точность $O(\tau + |h|^2)$. Применяя поочередно эти схемы (например, схему (26) на нечетных, а схему (27) — на четных слоях), получим точность $O(\tau^2 + |h|^2)$.

Следуя принципу, указанному в [8], напишем производящую схему II^- для схемы I^-:

$$\left.\begin{aligned} &A^s y^s_{\bar{t}} = \check{\Phi}^s + F^s, \qquad A^s = \prod_{\alpha=1}^{p} A^s_\alpha, \qquad A^s_\alpha = E - 0.5\tau^2\varkappa_{s\alpha}\mathring{\Lambda}_\alpha,\\ &\check{\Phi}^s = \check{y}^s_{\bar{t}} + \tau\left[(\Lambda^+\check{y})^s + 0.5\sum_{\alpha=1}^{p}\varkappa_{s\alpha}\mathring{\Lambda}_\alpha\check{y}^s + \check{\varphi}^s\right],\\ &F^s = \tau(\lambda+\mu)\sum_{k=1}^{s-1}\mathring{\Lambda}_{sk}y^k. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Аналогично записывается и производящая схема II^+ для схемы I^+. В этом случае меняются лишь формулы для $\check{\Phi}^s$ и F^s:

$$\check{\Phi}^s = \check{y}^s_{\bar{t}} + \tau\left[(\Lambda^-\check{y})^s + 0.5\sum_{\alpha=1}^{p}\varkappa_{s\alpha}\mathring{\Lambda}_\alpha\check{y}^s + \check{\varphi}^s\right], \qquad F^s = \tau(\lambda+\mu)\sum_{k=s+1}^{p}\mathring{\Lambda}_{sk}y^k. \tag{29}$$

Для определения y^s на новом слое может быть написано несколько вычислительных алгоритмов переменных направлений. Приведем для схемы II^- лишь алгоритм, предложенный нами в [8] для уравнения теплопроводности; этот алгоритм имеет вид

$$A_1^s v_{(1)}^s = \check{\Phi}^s + F^s, \qquad A_\alpha v_{(\alpha)}^s = v_{(\alpha-1)}^s, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \; s = 1, \ldots, p; \tag{30}$$
$$y^s = \check{y}^s + \tau v_{(p)}^s.$$

Краевые условия при $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$ для $v_{(\alpha)}{}^s$ возьмем в виде

$$v_{(\alpha)}^s = \mathring{A}_{\alpha+1}^s \ldots A_p{}^s \nu_{\bar{t}}{}^s \text{ при } x_\alpha = 0, \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, p-1, \quad v_{(p)}^s = \nu_{\bar{t}}{}^s. \tag{31}$$

Порядок счета: определяются поочередно компоненты $y^{(1)}, \ldots, y^{(p)} = y^{j+1}$.

Для алгоритма, соответствующего схеме II$^+$, формулы (30) остаются без изменений, но порядок счета обратный: определяются последовательно компоненты $y^{(p)}, \ldots, y^{(1)}$.

Чередуя схемы II$^-$ и II$^+$, мы найдем решение задачи с точностью до $O(|h|^2 + \tau^2)$. Эта оценка получается методом [1], [2], [8].

Из формул для $v_{(\alpha)}{}^s$ видно, что решение y^s разностной задачи определяется при помощи последовательного обращения трехдиагональных матриц (по формулам прогонки [9]). Поэтому схемы расщепления являются экономичными: для вычисления вектора $\mathbf{y}^{j+1}$ требуется $O(p^2 / h^p)$ операций.

8. Обратимся теперь к стационарной задаче теории упругости

$$L\mathbf{u} = \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = -\mathbf{f}(x), \quad x \in G, \quad \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{v}(x). \tag{32}$$

Ее решение сводится к решению разностной задачи на установление для параболической системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = L\mathbf{u} + f(x), \qquad \mathbf{u}|_\Gamma = \nu(x)$$

с произвольными начальными данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x).$$

Для этого мы используем схемы расщепления. Пусть разностная схема для (32) имеет вид

$$\Lambda^- \mathbf{v} + \Lambda^+ \mathbf{v} = \varphi, \qquad \mathbf{v}|_{\gamma_h} = \mathbf{v}_0(x).$$

Напишем производящую схему для определения $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x_i, (j+1)\tau)$, где $j+1$ — номер итерации, τ — итерационный параметр:

$$A^s y_{\bar{t}}{}^s = \check{\Phi}^s + F^s, \qquad A^s = \prod_{\alpha=1}^{p} A_\alpha{}^s, \qquad \mathring{A}_\alpha^s = E - 0.5\,\tau\varkappa_{s\alpha}\mathring{\Lambda}_\alpha,$$

$$\check{\Phi}^s = \sum_{\alpha=1}^{p} \varkappa_{s\alpha}\mathring{\Lambda}_\alpha \check{y}^s + (\lambda + \mu) \sum_{k=s+1}^{p} \mathring{\Lambda}_{sk}\check{y}^k + \varphi^s,$$

$$F^s = (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^{s-1} \mathring{\Lambda}_{sk} y^k.$$

В этом случае вычислительный алгоритм переменных направлений из п. 6 имеет вид

$$A_1^s w_{(1)}^s = \check{\Phi}^s + F^s, \qquad A_\alpha^s w_{(\alpha)}^s = w^s_{(\alpha-1)}, \qquad \alpha > 1,$$
$$y^s = \check{y}^s + \tau w_{(p)}^s, \qquad w_{(\alpha)}^s|_{\gamma_h} = 0,$$

т. е. для $w_{(\alpha)}^s$ граничные условия всегда нулевые.

Для сравнения приведем еще один вычислительный алгоритм (двухслойный):

$$A_1^s y_{(1)}^s = \tau(\check{\Phi}^s + F^s) + A^s \check{y}^s, \qquad A_\alpha^s y^s_{(\alpha-1)} = y^s_{(\alpha-1)}, \qquad \alpha > 1,$$

$$y_{(\alpha)}^s = A^s_{(\alpha+1)} \ldots A_p^s \nu^s \quad \text{при} \quad x_\alpha = 0, \qquad x_\alpha = l_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p-1;$$
$$y_{(p)}^s|_{\gamma_h} = \nu^s.$$

Порядок счета тот же, что и раньше: сначала определяется первая компонента $y^{(1)}$, затем вторая $y^2 (s = 2)$ и т. д.

Для отыскания y^s во всех узлах сетки ω_h требуется $O(1 / h_1 h_2 \ldots h_p)$ действий. Итерационный процесс сходится при $\tau = O(h_*)$, $h_* = \min h_\alpha$. Скорость сходимости определяется числом итераций $\nu \approx O((1 / h_*) \times \times \ln (1 / \varepsilon))$ при $p = 2$ и $O((1 / h_*^{4/3}) \ln (1 / \varepsilon))$ при $p = 3$, где ε — требуемая точность.

Оценка для числа итераций получается методом энергетических неравенств по аналогии с [10], [7] и [4].

Меняя ролями треугольные операторы Λ^- и Λ^+, мы получим вторую итерационную схему II^+. Для нее получается такая же оценка для скорости сходимости итераций, что и для написанной выше схемы II^-. Есть основания надеяться, что чередование этих двух итерационных алгоритмов II^- и II^+ может привести к ускорению сходимости.

Поступила в редакцию
1.10.1964

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, 638—649.
2. А. А. Самарский. Экономичные разностные схемы для уравнений параболического типа со смешанными производными. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, 753—759.
3. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 787—811.
4. А. А. Самарский. Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431—466.
5. А. А. Самарский. Экономичные разностные схемы для систем уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 5, 927—930.
6. А. Н. Коновалов. Применение метода расщепления к численному решению динамических задач теории упругости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, 760—764.
7. А. Н. Коновалов. Об одной итерационной схеме решения статических задач теории упругости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 5, 942—945.
8. А. А. Самарский. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 5, 812—840.
9. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 2. М., Физматгиз, 1960.
10. M. Lees. A note on the convergence of alternating direction methods. Math. Comput., 1962, 16, № 77, 70—75.