Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры. Докл. АН СССР, 1950, **73**, вып. 2, 295—297.
2. Y. Kato, T. Kikuchi. On the phase difference of earth current induced by the changes of the earth's magnetic field. Sci. Rept. Tohoku Univ., 1950, **2**, № 2, 139—141; 142—145.
3. L. Cagniard. Basic theory of the magnito-tellurik method. Geophysics, 1953, **18**, № 3, 605—635.
4. А. Н. Тихонов. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Матем. сб., 1950, **27**(69), 147—156.

УДК 518:517.944/.947

О МОНОТОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

В этой заметке предлагаются монотонные схемы, равномерно сходящиеся со скоростью $O(h^2)$, для несамосопряженного эллиптического уравнения второго порядка в произвольной области, а также монотонные локально-одномерные схемы, равномерно сходящиеся со скоростью $O(h^2+\tau)$ для параболического уравнения с несамосопряженным эллиптическим оператором.

1. Рассмотрим первую краевую задачу в области $G+\Gamma$ p-мерного пространства $x=(x_1, \ldots, x_p)$ для эллиптического уравнения, содержащего первые производные

$$Lu=-f, \quad x\in G, \quad u|_\Gamma=f_1, \tag{1}$$

$$Lu=\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha{}^0 u-qu, \quad L_\alpha{}^0 u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+r_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \tag{2}$$

где $k_\alpha=k_\alpha(x)\geqslant c_1>0$, $q=q(x)\geqslant 0$, $r_\alpha=r_\alpha(x)$, $f=f(x)$, $f_1=f_1(x)$, c_1 — постоянная.

Рассмотрим, как обычно, сетку $\omega_h(G)$ в области G, образованную пересечением гиперплоскостей $x_\alpha=i_\alpha h_\alpha$, $i_\alpha=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\alpha=1, \ldots, p$, h_α — шаг сетки; узлы $x_i=(i_1h_1, \ldots, i_ph_p)\in G$ внутренние, граница γ_h сетки ω_h состоит из точек пересечения гиперплоскостей $x_\alpha=i_\alpha h_\alpha$ с границей Γ области G. Множество ω_h^* внутренних узлов, соседних с узлами $x_i\in\gamma_h$, назовем пограничной зоной, множество $\tilde{\omega}_h$ остальных узлов — основной областью сетки.

Перейдем к написанию схемы для задачи (1). Член со второй производной по x_α в $L_\alpha{}^0$, как обычно, заменяется трехточечной однородной схемой. Естественная замена первой производной $\partial u/\partial x_\alpha$ двусторонним разностным отношением дает схему второго порядка аппроксимации. Эта схема монотонна лишь при достаточно малых шагах h_α $(\alpha=1, \ldots, p)$ сетки. На одномерном примере ($p=1$) видно, что формулы прогонки применимы при достаточно малом h_α, когда $h_\alpha|r_\alpha|<k_\alpha$. Если воспользоваться односторонними разностями (правой при $r_\alpha>0$ и левой при $r_\alpha<0$), то получим монотонную схему, для которой всегда справедлив принцип максимума Однако она имеет первый порядок точности.

Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащую односторонние разностные производные, учитывающие знак r_α.

Пусть $\Lambda_\alpha^* u$ — трехточечная схема второго порядка для $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$:

$$\Lambda_\alpha^* u = (a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + O(h_\alpha^2),$$

где $u_{\bar{x}_\alpha}$ — левое, а u_{x_α} — правое разностное отношение по направлению x_α. Коэффициент a_α аппроксимирует, согласно [1], k_α:

$$a_\alpha = k_\alpha - 0{,}5 h_\alpha \frac{\partial k_\alpha}{\partial x_\alpha} + O(h_\alpha^2).$$

Простейшее выражение для a_α

$$a_\alpha = k_\alpha^{(-0.5\alpha)},$$

где $k_\alpha^{(-0.5\alpha)}$ — значение k_α в средней точке левого интервала сетки, направленного по x_α.

Подставим r_α в виде суммы

$$r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \qquad r_\alpha^+ = \frac{r_\alpha + |r_\alpha|}{2} \geqslant 0, \qquad r_\alpha^- = \frac{r_\alpha - |r_\alpha|}{2} \leqslant 0$$

и аппроксимируем $r_\alpha(\partial u / \partial x_\alpha)$ выражением

$$r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \frac{r_\alpha}{k_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) \approx b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} u_{x_\alpha} + b_\alpha^- a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha}, \tag{3}$$

где $b_\alpha^\pm = r_\alpha^\pm / k_\alpha$, $a_\alpha^{(+1\alpha)}$ — значение a_α в правом соседнем по направлению x_α узле.

Чтобы получить монотонную схему второго порядка точности для уравнения (1), надо написать монотонную схему с односторонними первыми разностными производными для уравнения с возмущенными коэффициентами

$$\tilde{L}u = \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{L}_\alpha u - qu = -f, \tag{4}$$

$$\tilde{L}_\alpha u = \varkappa_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha};$$

где

$$\varkappa_\alpha = \left(1 + \sum_{\beta \neq \alpha}^{1-p} R_\beta\right) \Big/ \left(1 + \sum_{\beta=1}^{p} R_\beta\right), \tag{5}$$

$R_\beta = 0.5 h_\beta |r_\beta| / k_\beta$ — «разностное число Рейнольдса». В результате мы получаем схему

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y - qy = -f, \tag{6}$$

$$\Lambda_\alpha y = \varkappa_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}. \tag{6'}$$

Так как $b_\alpha^+ \geqslant 0$, $b_\alpha^- \leqslant 0$, то для этой схемы справедлив принцип максимума. Нетрудно убедиться в том, что она на решении $u = u(x)$ уравнения (1) имеет второй порядок аппроксимации.

$$\Psi = \Lambda u - Lu = O(|h|^2) \quad \text{при } x \in \tilde{\omega}_h,$$

где $|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2$. В случае постоянных коэффициентов можно строить монотонные схемы повышенного порядка точности.

Краевые условия задаются одним из способов, гарантирующих второй порядок точности для $(2p+1)$-точечной схемы в случае уравнения Лапласа. Предпочтительнее такой способ: $y = f_1$ на γ_h, а в пограничной зоне ω_h^* пишется разностная схема $\Lambda y = -f$ с учетом неравномерности сетки.

Тем самым мы получили монотонную схему, равномерно сходящуюся со скоростью $O(|h|^2)$, если выполнены условия, обеспечивающие равномерную аппроксимацию.

2. Рассмотрим теперь смешанную задачу для параболического уравнения в цилиндре $\bar{Q}_T = (G + \Gamma) \times [0 \leqslant t \leqslant T]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \qquad u|_\Gamma = \nu(x, t), \tag{7}$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

где Lu имеет вид (2), $k_\alpha = k_\alpha(x, t)$, $q = q(x, t)$, $f = f(x, t)$. Чтобы получить схему второго порядка по пространству, мы должны писать схему, имеющую для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{L}u + f \tag{8}$$

второй порядок аппроксимации при $r_\alpha = 0$, а члены с первой производной заменить по формуле (3).

Представим $\tilde{L}$ в виде

$$\tilde{L}u = \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{L}_\alpha u, \quad \tilde{L}_\alpha u = \varkappa_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x, t)u, \tag{9}$$

где $q_\alpha \geqslant 0$, $\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha = q$, например, $q_\alpha = q/p$, $\varkappa_\alpha$ определяются по формуле (5).

Идея получения локально-одномерной схемы из [2] состоит в следующем. Вводится сетка $\omega_\tau = \{t^j = j\tau \in [0, T]\}$ и каждый интервал (t^j, t^{j+1}) делится на p частей точками

$$t_\alpha^j = t_{\alpha-1}^j + \sigma_\alpha \tau, \qquad \sigma_\alpha > 0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} \sigma_\alpha = 1,$$

например, $\sigma_\alpha = 1/p$ (см. [2]). В интервале $(t_{\alpha-1}^j, t_\alpha^j)$ решается одномерная задача

$$\sigma_\alpha \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = \tilde{L}_\alpha v + f_\alpha, \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f, \quad \alpha = 1, \ldots, p. \tag{10}$$

Начальные условия для $v_{(\alpha)}$ задаются при $t = t_{\alpha-1}^j$, а краевые условия — на той части Γ_α границы Γ, которая состоит из точек пересечения Γ любыми прямыми, параллельными Ox_α и проходящими через точки $x \in G$. Нетрудно убедиться в том, что при любых σ_α справедлива оценка (ср. [2])

$$\max_{\bar{Q}_T} |v - u| = O(\tau).$$

Можно даже указать примеры, когда имеет место точное равенство $v^j = u^j$ при $t = t^j$. Это так, например, в случае задачи Коши или первой смешанной задачи с нулевыми краевыми условиями для уравнения теплопроводности $\partial u / \partial t = \Delta u$, $G = G_0$, где Δ — оператор Лапласа, G_0 — параллелепипед. Для численного решения (10) можно пользоваться различными двухслойными и даже трехслойными схемами. Мы предпочитаем (особенно в данном случае) чисто неявные схемы, для которых при любых τ, h_α справедлив принцип максимума. При $v^j = u^j$ можно пользоваться схемами $O(h^4 + \tau^2)$.

Напишем локально-одномерную схему для задачи (8). Пусть $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(t^*)$, $t^* \in (t_j, t_{j+1})$ = схема (6′). Тогда локально-одномерная схема для (8) будет иметь вид

$$\frac{y_{(\alpha)}^j - y_{(\alpha-1)}^j}{\tau} = \Lambda_\alpha(t_\alpha^*) y_{(\alpha)}^j + f_\alpha(x, t_\alpha^*), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 0, 1 \ldots, \tag{11}$$

$$y|_{t=0} = u_0(x),$$

где $y_{(p)}^j = y^{j+1}$, $y_{(0)}^j = y^j$. Краевые условия для $y_{(\alpha)}^j = \nu(x, t_\alpha^{**})$ берутся на той части γ_h, которая принадлежит Γ_α. В пограничной зоне ω_h^* значение $y_{(\alpha)}^j$ определяется либо согласно [2] (снос при помощи линейной интерполяции по направлению x_α), либо согласно [3] (в узлах ω_h^* пишется уравнение с учетом неравномерности пространственной сетки, см. выше). Напомним, что $t_\alpha^* \in [t_j, t_{j+1}]$, $t_\alpha^{**} \in [t_j, t_{j+1}]$. Можно рекомендовать, например, $t_\alpha^* = t_\alpha^{**} = t_{j+1}$. Способ выбора t_α^* и t_α^{**} в указанных пределах не меняет порядка точности по τ.

При обоих способах задания краевых условий принцип максимума выполняется и справедлива оценка

$$\max_{\omega_h} | y^j - u^j | = O(| h |^2 + \tau),$$

если выполнены условия аппроксимации, указанные в [2]. Таким образом, локально-одномерная схема (11) равномерно сходится со скоростью $O(| h |^2 + \tau)$.

Предложенный выше метод может быть использован при построении монотонных схем 2-го порядка точности по h для квазилинейных параболических уравнений, а также для некоторых систем дифференциальных уравнений (например, для аналога уравнений Навье — Стокса).

Случай неравномерных сеток и разрывных коэффициентов нуждается в дополнительном исследовании.

Поступила в редакцию
6.02.1965

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 5—63.
2. А. А. Самарский. Об одном экономичном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 5, 787—811.
3. А. А. Самарский. Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. физ., 1962, **3**, № 3, 431—466.

УДК 518:517.944/.947

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ ДВУХСТОРОННЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ $2n$-ВОЛНОВОЙ СИСТЕМЫ

Ю. И. КОВАЧ

(Ужгород)

Пусть задана система *)

$$\frac{\partial^{2n} U_i(x, y)}{\partial x^n \, \partial y^n} = f_i [U_1, U_2, \ldots, U_m], \tag{1}$$

где

$$f_i [U_1, U_2, \ldots, U_m] = f_i \left(x, y, U_1, U_{1x}, \ldots, \frac{\partial^{r_1} U_1}{\partial x^{k_1} \, \partial y^{k_2}}, \ldots, U_m, U_{mx}, \ldots, \frac{\partial^{r_m} U_m}{\partial x^{\tau_1} \, \partial y^{\tau_2}} \right)$$

---

*) Старшие производные в разных уравнениях не обязательно одинакового порядка, так что вместо $\partial^{2n} U / \partial x^n \partial y^n$ можно писать $\partial^{2n_i} U_i / \partial x^{n_i} \partial y^{n_i}$