

### Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры. Докл. АН СССР, 1950, 73, вып. 2, 295—297.
2. Y. Kato, T. Kikuchi. On the phase difference of earth current induced by the changes of the earth's magnetic field. Sci. Rept. Tohoku Univ., 1950, 2, № 2, 139—141; 142—145.
3. L. Cagniard. Basic theory of the magnito-telluric method. Geophysics, 1953, 18, № 3, 605—635.
4. А. Н. Тихонов. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Матем. сб., 1950, 27(69), 147—156.

УДК 518:517.944/947

### О МОНОТОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕСАМОСOPЯЖЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

В этой заметке предлагаются монотонные схемы, равномерно сходящиеся со скоростью  $O(h^2)$ , для несамосопряженного эллиптического уравнения второго порядка в произвольной области, а также монотонные локально-одномерные схемы, равномерно сходящиеся со скоростью  $O(h^2 + \tau)$  для параболического уравнения с несамосопряженным эллиптическим оператором.

1. Рассмотрим первую краевую задачу в области  $G + \Gamma$   $p$ -мерного пространства  $x = (x_1, \dots, x_p)$  для эллиптического уравнения, содержащего первые производные

$$Lu = -f, \quad x \in G, \quad u|_{\Gamma} = f_1, \quad (1)$$

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}^0 u - qu, \quad L_{\alpha}^0 u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) + r_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}}, \quad (2)$$

где  $k_{\alpha} = k_{\alpha}(x) \geq c_1 > 0$ ,  $q = q(x) \geq 0$ ,  $r_{\alpha} = r_{\alpha}(x)$ ,  $f = f(x)$ ,  $f_1 = f_1(x)$ ,  $c_1$  — постоянная.

Рассмотрим, как обычно, сетку  $\omega_h(G)$  в области  $G$ , образованную пересечением гиперплоскостей  $x_{\alpha} = i_{\alpha} h_{\alpha}$ ,  $i_{\alpha} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$ ,  $h_{\alpha}$  — шаг сетки; узлы  $x_i = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p) \in G$  внутренние; граница  $\gamma_h$  сетки  $\omega_h$  состоит из точек пересечения гиперплоскостей  $x_{\alpha} = i_{\alpha} h_{\alpha}$  с границей  $\Gamma$  области  $G$ . Множество  $\omega_h^*$  внутренних узлов, соседних с узлами  $x_i \in \gamma_h$ , назовем пограничной зоной, множество  $\tilde{\omega}_h$  остальных узлов — основной областью сетки.

Перейдем к написанию схемы для задачи (1). Член со второй производной по  $x_{\alpha}$  в  $L_{\alpha}^0$ , как обычно, заменяется трехточечной однородной схемой. Естественная замена первой производной  $du / dx_{\alpha}$  двусторонним разностным отношением дает схему второго порядка аппроксимации. Эта схема монотонна лишь при достаточно малых шагах  $h_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, \dots, p$ ) сетки. На одномерном примере ( $p = 1$ ) видно, что формулы прогонки применимы при достаточно малом  $h_{\alpha}$ , когда  $h_{\alpha} |r_{\alpha}| < k_{\alpha}$ . Если воспользоваться односторонними разностями (правой при  $r_{\alpha} > 0$  и левой при  $r_{\alpha} < 0$ ), то получим монотонную схему, для которой всегда справедлив принцип максимума. Однако она имеет первый порядок точности.

Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащую односторонние разностные производные, учитывающие знак  $r_{\alpha}$ .

Пусть  $\Lambda_\alpha^* u$  — трехточечная схема второго порядка для  $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$ :

$$\Lambda_\alpha^* u = (a_\alpha \bar{u}_{x_\alpha})_{x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + O(h_\alpha^2),$$

где  $\bar{u}_{x_\alpha}$  — левое, а  $u_{x_\alpha}$  — правое разностное отношение по направлению  $x_\alpha$ . Коэффициент  $a_\alpha$  аппроксимирует, согласно [1],  $k_\alpha$ :

$$a_\alpha = k_\alpha - 0.5h_\alpha \frac{\partial k_\alpha}{\partial x_\alpha} + O(h_\alpha^2).$$

Простейшее выражение для  $a_\alpha$

$$a_\alpha = k_\alpha^{(-0.5\alpha)},$$

где  $k_\alpha^{(-0.5\alpha)}$  — значение  $k_\alpha$  в средней точке левого интервала сетки, направленного по  $x_\alpha$ .

Подставим  $r_\alpha$  в виде суммы

$$r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \quad r_\alpha^+ = \frac{r_\alpha + |r_\alpha|}{2} \geq 0, \quad r_\alpha^- = \frac{r_\alpha - |r_\alpha|}{2} \leq 0$$

и аппроксимируем  $r_\alpha (\partial u / \partial x_\alpha)$  выражением

$$r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \frac{r_\alpha}{k_\alpha} \left( k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) \approx b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} u_{x_\alpha} + b_\alpha^- a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha}, \quad (3)$$

где  $b_\alpha^\pm = r_\alpha^\pm / k_\alpha$ ,  $a_\alpha^{(+1\alpha)}$  — значение  $a_\alpha$  в правом соседнем по направлению  $x_\alpha$  узле.

Чтобы получить монотонную схему второго порядка точности для уравнения (1), надо написать монотонную схему с односторонними первыми разностными производными для уравнения с возмущенными коэффициентами

$$\bar{L}u = \sum_{\alpha=1}^p \bar{L}'_\alpha u - qu = -f, \quad (4)$$

$$\bar{L}'_\alpha u = \kappa_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha},$$

где

$$\kappa_\alpha = \left( 1 + \sum_{\beta \neq \alpha}^{1-p} R_\beta \right) / \left( 1 + \sum_{\beta=1}^p R_\beta \right), \quad (5)$$

$R_\beta = 0.5h_\beta |r_\beta| / k_\beta$  — «разностное число Рейнольдса». В результате мы получаем схему

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y - qy = -f, \quad (6)$$

$$\Lambda_\alpha y = \kappa_\alpha (a_\alpha \bar{y}_{x_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}. \quad (6')$$

Так как  $b_\alpha^+ \geq 0$ ,  $b_\alpha^- \leq 0$ , то для этой схемы справедлив принцип максимума. Нетрудно убедиться в том, что она на решении  $u = u(x)$  уравнения (1) имеет второй порядок аппроксимации.

$$\Psi = \Lambda u - Lu = O(|h|^2) \quad \text{при } x \in \tilde{\omega}_h,$$

где  $|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2$ . В случае постоянных коэффициентов можно строить монотонные

схемы повышенного порядка точности.

Краевые условия задаются одним из способов, гарантирующих второй порядок точности для  $(2p + 1)$ -точечной схемы в случае уравнения Лапласа. Предпочтитель-

нее такой способ:  $y = f_i$  на  $\gamma_h$ , а в пограничной зоне  $\omega_h^*$  пишется разностная схема  $\Delta y = -f$  с учетом неравномерности сетки.

Тем самым мы получили монотонную схему, равномерно сходящуюся со скоростью  $O(|h|^2)$ , если выполнены условия, обеспечивающие равномерную аппроксимацию.

2. Рассмотрим теперь смешанную задачу для параболического уравнения в цилиндре  $\bar{Q}_T = (G + \Gamma) \times [0 \leq t \leq T]$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad u|_{\Gamma} = v(x, t), \quad (7)$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

где  $Lu$  имеет вид (2),  $k_\alpha = k_\alpha(x, t)$ ,  $q = q(x, t)$ ,  $f = f(x, t)$ . Чтобы получить схему второго порядка по пространству, мы должны писать схему, имеющую для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{L}u + f \quad (8)$$

второй порядок аппроксимации при  $r_\alpha = 0$ , а члены с первой производной заменить по формуле (3).

Представим  $\tilde{L}$  в виде

$$\tilde{L}u = \sum_{\alpha=1}^p \tilde{L}_\alpha u, \quad \tilde{L}_\alpha u = \kappa_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x, t) u, \quad (9)$$

где  $q_\alpha \geq 0$ ,  $\sum_{\alpha=1}^p q_\alpha = q$ , например,  $q_\alpha = q/p$ ,  $\kappa_\alpha$  определяются по формуле (5).

Идея получения локально-одномерной схемы из [2] состоит в следующем. Вводится сетка  $\omega_\tau = \{t^j = j\tau \in [0, T]\}$  и каждый интервал  $(t^j, t^{j+1})$  делится на  $p$  частей точками

$$t_\alpha^j = t_{\alpha-1}^j + \sigma_\alpha \tau, \quad \sigma_\alpha > 0, \quad \sum_{\alpha=1}^p \sigma_\alpha = 1,$$

например,  $\sigma_\alpha = 1/p$  (см. [2]). В интервале  $(t_{\alpha-1}^j, t_\alpha^j)$  решается одномерная задача

$$\sigma_\alpha \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial t} = \tilde{L}_\alpha v + f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f, \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (10)$$

Начальные условия для  $v^{(\alpha)}$  задаются при  $t = t_{\alpha-1}^j$ , а краевые условия — на той части  $\Gamma_\alpha$  границы  $\Gamma$ , которая состоит из точек пересечения  $\Gamma$  любыми прямыми, параллельными  $Ox_\alpha$  и проходящими через точки  $x \in G$ . Нетрудно убедиться в том, что при любых  $\sigma_\alpha$  справедлива оценка (ср. [2])

$$\max_{\bar{Q}_T} |v - u| = O(\tau).$$

Можно даже указать примеры, когда имеет место точное равенство  $v^j = u^j$  при  $t = t^j$ . Это так, например, в случае задачи Коши или первой смешанной задачи с нулевыми краевыми условиями для уравнения теплопроводности  $\partial u / \partial t = \Delta u$ ,  $G = G_0$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $G_0$  — параллелепипед. Для численного решения (10) можно пользоваться различными двухслойными и даже трехслойными схемами. Мы предпочитаем (особенно в данном случае) чисто неявные схемы, для которых при любых  $\tau$ ,  $h_\alpha$  справедлив принцип максимума. При  $v^j = u^j$  можно пользоваться схемами  $O(h^4 + \tau^2)$ .

Напишем локально-одномерную схему для задачи (8). Пусть  $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(t^*)$ ,  $t^* \in (t_j, t_{j+1}) =$  схема (6'). Тогда локально-одномерная схема для (8) будет иметь вид

$$\frac{y_{(\alpha)}^j - y_{(\alpha-1)}^j}{\tau} = \Lambda_\alpha(t_\alpha^*) y_{(\alpha)}^j + f_\alpha(x, t_\alpha^*), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

$$y|_{t=0} = u_0(x),$$

где  $y_{(p)}^j = y^{j+1}$ ,  $y_{(0)}^j = y^j$ . Краевые условия для  $y_{(\alpha)}^j = v(x, t_\alpha^{**})$  берутся на той части  $\gamma_h$ , которая принадлежит  $\Gamma_\alpha$ . В пограничной зоне  $\omega_h^*$  значение  $y_{(\alpha)}^j$  определяется либо согласно [2] (снос при помощи линейной интерполяции по направлению  $x_\alpha$ ), либо согласно [3] (в узлах  $\omega_h^*$  пишется уравнение с учетом неравномерности пространственной сетки, см. выше). Напомним, что  $t_\alpha^* \in [t_j, t_{j+1}]$ ,  $t_\alpha^{**} \in [t_j, t_{j+1}]$ . Можно рекомендовать, например,  $t_\alpha^* = t_\alpha^{**} = t_{j+1}$ . Способ выбора  $t_\alpha^*$  и  $t_\alpha^{**}$  в указанных пределах не меняет порядка точности по  $\tau$ .

При обоих способах задания краевых условий принцип максимума выполняется и справедлива оценка

$$\max_{\omega_h} |y^j - u^j| = O(|h|^2 + \tau),$$

если выполнены условия аппроксимации, указанные в [2]. Таким образом, локально-одномерная схема (11) равномерно сходится со скоростью  $O(|h|^2 + \tau)$ .

Предложенный выше метод может быть использован при построении монотонных схем 2-го порядка точности по  $h$  для квазилинейных параболических уравнений, а также для некоторых систем дифференциальных уравнений (например, для аналога уравнений Навье — Стокса).

Случай неравномерных сеток и разрывных коэффициентов нуждается в дополнительном исследовании.

Поступила в редакцию  
6.02.1965

#### Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 5—63.
2. А. А. Самарский. Об одном экономичном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 787—811.
3. А. А. Самарский. Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. физ., 1962, 3, № 3, 431—466.

УДК 518:517.944/947

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ ДВУХСТОРОННЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ $2n$ -ВОЛНОВОЙ СИСТЕМЫ

Ю. И. КОВАЧ

(Ужгород)

Пусть задана система \*)

$$\frac{\partial^{2n} U_i(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} = f_i[U_1, U_2, \dots, U_m], \quad (1)$$

где

$$f_i[U_1, U_2, \dots, U_m] = f_i \left( x, y, U_i, U_{ix}, \dots, \frac{\partial^{r_1} U_1}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}}, \dots, U_m, U_{mx}, \dots, \frac{\partial^{r_m} U_m}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} \right)$$

\*) Старшие производные в разных уравнениях не обязательно одинакового порядка, так что вместо  $\partial^{2n} U / \partial x^n \partial y^n$  можно писать  $\partial^{2n_i} U_i / \partial x^{n_i} \partial y^{n_i}$