ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 5 Март 1965 Апрель № 2

УДК 517.9:532

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

А. А. САМАРСКИЙ, С. П. КУРДЮМОВ, П. П. ВОЛОСЕВИЧ *)

(*Москва*)

Введение

В работах [1]—[5] проводилось изучение уравнения нелинейной теплопроводности. Было установлено, что зависимость коэффициента теплопроводности от температуры приводит к возможности распространения тепла (по нулевому начальному фону температуры) с конечной скоростью. Представляет интерес выяснить, как особенности нелинейной теплопроводности сказываются на взаимодействии тепловых процессов с гидродинамическими.

Известно, что процессы, описываемые уравнениями гидродинамики с нелинейной теплопроводностью, характерны для задач радиационной гидродинамики (см. [4]), где рассматривается взаимодействие излучения с веществом. В предположении о локальном термодинамическом равновесии излучения с веществом, а также при пренебрежении давлением излучения по сравнению с материальным давлением наличие излучения в среде проявляется лишь в аномально большой теплопроводности среды и в зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Молекулярными процессами переноса в такой среде (т. е. обычной вязкостью и теплопроводностью) можно пренебречь по сравнению с теплопроводностью, обусловленной излучением. Высокая теплопроводность среды в ряде случаев приводит, как показано в [4], [5], к появлению температурных волн (ТВ). По типу вызываемого ими гидродинамического движения ТВ разделяются на ТВ-I (распространение тепла со сверхзвуковой скоростью) и ТВ-II (дозвуковое распространение тепла). См. [4], [6], [7].

Указанный подход к задачам с температурными волнами был в некоторой степени новым, так как обычно при рассмотрении задач гидродинамики с теплопроводностью на первый план выдвигались чисто гидродинамические явления, а теплопроводность играла лишь роль диссипирующего и разглаживающего фактора.

Так, в [8] учет процессов обычной молекулярной вязкости и теплопроводности использовался для изучения структуры фронта ударной волны (УВ). Как известно, без учета диссипативных процессов в среде УВ пред-

*) Основное теоретическое содержание статьи было доложено авторами на IV Всесоюзном математическом съезде в 1961 г.

ставляет собой сильный разрыв. Учет теплопроводности приводит, как показано в [8], к образованию определенной эффективной «ширины» волны.

В настоящей работе используется автомодельность типа бегущей волны, но в отличие от [8] изучается случай нелинейной теплопроводности и задача о бегущей волне связывается с задачей о поршне с тепловым режимом. Благодаря такому подходу удается рассмотреть не только структуру бегущей волны, осуществляющей переход с одного константного решения на другое константное решение, но и более общий вид бегущей волны, существенно связанный с нестационарным тепловым и гидродинамическим режимом на поршне.

В рамках одномерной плоской задачи для уравнений гидродинамики при нелинейной теплопроводности (коэффициент теплопроводности $\varkappa = \varkappa_0 T^m \rho^\sigma$, где T — температура, а ρ — плотность) рассматривается задача о поршне с определенным законом изменения теплового потока и скорости на поршне со временем, обеспечивающим образование перед поршнем бегущей волны. В начальный момент предполагается нулевой фон температуры, скорости, давления и постоянное по пространству значение плотности.

В работе построено несколько типов непрерывных и разрывных бегущих волн.

Большинство из построенных волн существует лишь до определенного момента времени. Наряду с метастабильными волнами построена бегущая волна, соединяющая два константных решения и имеющая конечную ширину переходной зоны. В работе устанавливается зависимость этой ширины от параметров задачи. Отметим, что структура УВ в среде с излучением более детально, с привлечением кинетического уравнения для излучения была изучена в [9]. Мы же рассматриваем указанную выше задачу о бегущей волне как модельный пример, позволяющий проанализировать возможные типы решений и их зависимость от степени нелинейности уравнения теплопроводности. В связи с этим в задаче проводится анализ поля интегральных кривых в зависимости от значения показателей нелинейности m и σ, а также в зависимости от значения $\gamma = c_p / c_V$. В ряде случаев удается построить аналитические решения. Проведенный анализ используется для построения и классификации различных типов бегущих температурных волн.

Наряду с построением автомодельных решений в работе приводятся результаты расчета ряда полученных решений на ЭВМ с помощью разностного метода решения системы уравнений в частных производных при соответствующих граничных режимах на поршне.

Сопоставление автомодельных и численных решений позволяет, с одной стороны, сделать суждение о точности примененных разностных методов, а с другой — подтверждает существование и устойчивость ряда построенных бегущих волн.

§ 1. Постановка задачи

Задача рассматривается в плоском одномерном случае с уравнением состояния

$$p = R\rho T, \qquad \varepsilon = c_V T = \frac{R}{\gamma - 1} T.$$

Система уравнений газодинамики с нелинейной теплопроводностью имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x},\qquad \frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x},\qquad w=-\varkappa_0 T^m\eta^\sigma\frac{\partial T}{\partial x},\tag{1}$$

где x — массовая координата, выраженная в $г$, $\eta=1/\rho$ — удельный объем, p — давление, v — скорость, T — температура, w — тепловой поток, $\varkappa$, R, γ — константы. Решение ищется в виде бегущей волны, распространяющейся с постоянной массовой скоростью D *г/сек*. Предполагается, что на фоне перед волной заданы следующие начальные значения:

$$\rho=\rho_0,\qquad v=v_0,\qquad T=0,\qquad w=0.\tag{2}$$

Система уравнений, описывающая автомодельное решение типа бегущей волны, получается из (1) при переходе к новой переменной. Исследуемую систему удобно записать в безразмерном виде. Для этого выразим масштабы величин через постоянные определяющие параметры задачи, имеющие независимую размерность, например через R, $\varkappa_0$, D, ρ_0. Безразмерная автомодельная переменная будет иметь вид

$$\xi=\frac{Dt-x}{\varkappa_0 D^{2m-1}R^{-(m+1)}\rho_0^{-(2m+\sigma)}}.\tag{3}$$

Переход к безразмерным функциям дается следующими формулами:

$$\bar v(\xi)=\frac{v(x,t)}{D\rho_0^{-1}},\qquad \bar p(\xi)=\frac{p(x,t)}{D^2\rho_0^{-1}},\qquad \bar w(\xi)=\frac{w(x,t)}{D^3\rho_0^{-2}},$$
$$\bar T(\xi)=\frac{T(x,t)}{D^2R^{-1}\rho_0^{-2}},\qquad \bar\eta(\xi)=\frac{\rho_0}{\rho(x,t)}=\rho_0\eta(x,t).\tag{4}$$

Используя (3) и (4), получим из (1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar v}{d\xi}=\frac{d\bar p}{d\xi},\qquad \frac{d\bar\eta}{d\xi}=-\frac{d\bar v}{d\xi},\qquad \bar p=\frac{\bar T}{\bar\eta},$$
$$\frac{d\left(\frac{1}{\gamma-1}\bar T\right)}{d\xi}=\bar p\frac{d\bar v}{d\xi}+\frac{d\bar w}{d\xi},\qquad \bar w=\bar T^m\bar\eta^\sigma\frac{d\bar T}{d\xi}.\tag{1'}$$

Система (1′) допускает три интеграла:

$$\bar v=\bar v_0+1-\eta,\qquad \bar p=1-\bar\eta,\qquad \bar w=0.5\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\bar\eta-1\right)(1-\bar\eta),\tag{5}$$

и имеет место выражение

$$\bar T=\bar\eta(1-\bar\eta).\tag{5'}$$

При получении (5) интегрирование ведется от фона перед волной, на котором заданы условия

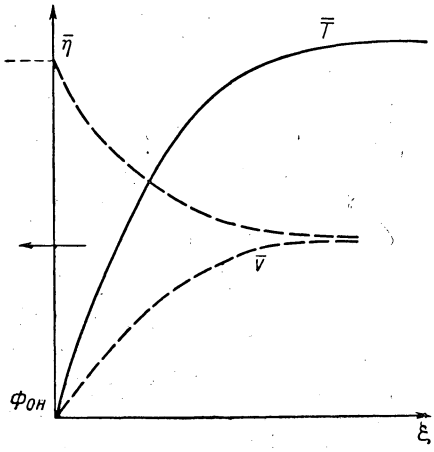
$$\bar\eta=\bar\eta_0=1,\qquad \bar v=\bar v_0,\qquad \bar T=\bar T_0=0,\qquad \bar p=\bar p_0=0,\qquad \bar w=\bar w_0=0.\tag{2'}$$

В результате система (1′) сводится к алгебраическим соотношениям (5) и одному дифференциальному уравнению

$$\bar\eta'=0.5\frac{[(\gamma+1/(\gamma-1)]\bar\eta-1}{(1-\bar\eta)^{m-1}\bar\eta^{\sigma+m}(1-2\bar\eta)}=F(\bar\eta).\tag{6}$$

Ниже будет показано, что начальное значение $\bar{\eta} = \eta_0 = 1$ задается или в конечной точке $\xi = \xi_0$, или при $\xi_0 = -\infty$, в зависимости от области изменения параметра m.

В первом случае волна имеет фронт, распространяющийся с конечной скоростью по начальному фону. Инвариантность уравнения (6) относительно преобразования $\xi' = \xi + \xi_0$ позволяет поместить фронт волны в точку $\xi = \xi_0 = 0$. Так как $\xi \sim (Dt - x)$, то фронт волны перемещается по закону $x_{\xi_0} = Dt$.



Фиг. 1

Можно установить связь сформулированной автомодельной задачи с задачей о поршне.

Предположим, что в точке с массовой координатой $x = 0$ находится поршень. Тогда из (3) следует, что на нем автомодельная координата ξ пропорциональна времени. В принятой нами системе координат фронт волны ($\xi = 0$) покоится, а поршень удаляется от него, двигаясь в область $\xi > 0$ (так как $t > 0$) с постоянной массовой скоростью D (предполагается $D > 0$) (см. фиг. 1). Определяя из уравнения (6) с начальным условием $\bar{\eta} = \bar{\eta}_0 = 1$, заданным при $\xi = 0$, профиль $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi)$, можно из (5) найти профили $\bar{v} = \bar{v}(\xi)$ и $\bar{T} = \bar{T}(\xi)$ и тем самым определить закон изменения со временем скорости поршня и закон изменения температуры.

Задавая полученные граничные режимы на поршне и решая систему (1), например, методом конечных разностей с начальными условиями (2), можно рассчитать профиль бегущей волны, уходящей от поршня.

§ 2. Исследование решений для случая $1 < \gamma < 3$

1. Характер решения уравнения (6) вблизи начального фона (линия $\bar{\eta} = 1$ на плоскости $(\bar{\eta}, \xi)$). Рассмотрим последовательно случаи $m > 1$, $m = 1$, $m < 1$, $m = 0$, $m < 0$.

1°. Если $m > 1$ (на фиг. 2 этому случаю соответствуют интегральные кривые, изображенные сплошной линией), то интегральные кривые при $\eta = 1$ имеют производную, обращающуюся в $-\infty$ при конечных значениях ξ. Разложение в окрестности фронта $\xi = 0$, $\eta = 1$ имеет вид

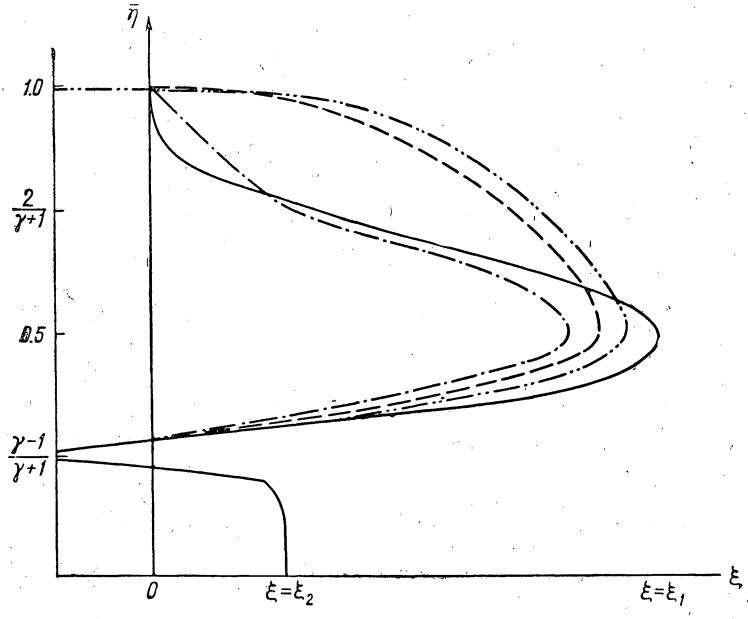
$$\bar{\eta} = 1 - \left(\frac{m}{\gamma - 1}\,\xi\right)^{1/m} + \ldots, \tag{7}$$

где члены более высокого порядка опущены. Отсюда следует, что $\bar{\eta}'(0) < 0$ для $m > 0$ и любых σ. Поэтому функция $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi)$ по мере удаления от фронта волны падает с ростом ξ. Из (5) следует, что остальные функции пропорциональны $\xi^{1/m}$, т. е. на фронте волны производные от всех функций по ξ при $m > 1$ бесконечны. При этом поток тепла, температура, скорость и плотность вблизи фронта резко растут.

2°. Пусть $m = 1$ (см. линию, изображённую на фиг. 2 штрих-пунктиром с одной точкой). Тогда производная $\bar{\eta}'(0)$ конечна и $\bar{\eta}_{\xi=0} = -1/(\gamma - 1)$.

3°. При $0 < m < 1$ (см. штриховую линию на фиг. 2) первые производные на фронте волны равны нулю.

Из (7) следует, что при $m = 1/k$ (где k — целое положительное число) в точке $\bar{\eta} = 1$, $\xi = 0$ производные вплоть до k-й включительно обращаются в нуль, а начиная с $k + 1$-й производные имеют бесконеч-



Фиг. 2

ный разрыв. Таким образом, гладкость касания интегральными кривыми линии $\bar{\eta} = 1$ возрастает при $m \to 0$ $(k \to \infty)$.

4°. При $m = 0$ разложение вблизи $\bar{\eta} = 1$ имеет вид

$$\bar{\eta} = 1 - Ce^{[1/(\gamma-1)]\xi} + O[(1 - \bar{\eta})^2], \tag{8}$$

где C — произвольная постоянная. В этом случае интегральные кривые лишь асимптотически при $\xi \to -\infty$ приближаются к прямой $\bar{\eta} = 1$.

5°. Для $m < 0$ разложение не существует при $\xi = 0$, но имеет смысл при $\xi \to -\infty$. Отсюда следует, что для $m \leqslant 0$ интегральные кривые не могут пересечь прямую $\bar{\eta} = 1$ при конечных значениях ξ. На фиг. 2 этому случаю соответствует штрих-пунктирная линия с двумя точками.

2. Общий характер поля интегральных кривых. В п. 1 показано, что в окрестности точки $(\bar{\eta} = 1;\ \xi = 0)$ функция $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi)$ может только падать. Это означает, что при $1 < \gamma < 3$ возможны лишь волны сжатия и нагрева. Монотонное падение $\bar{\eta}$ с ростом ξ сохраняется в области $0.5 < \bar{\eta} \leqslant 1$. Прямая $\bar{\eta} = 0.5$ пересекается интегральной кривой, выходящей из линии $\bar{\eta} = 1$ в некоторой точке $(\xi = \xi_1;\ \bar{\eta} = 0.5)$ плоскости $(\xi, \bar{\eta})$. Производная $(\bar{\eta}')_{\xi_1-0}$ в этой точке обращается в $+\infty$. В полосе $a < \bar{\eta} \leqslant 0.5$, где $a = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, имеем $\bar{\eta}' > 0$. Это означает, что после пересечения с прямой $\bar{\eta} = 0.5$ интегральные кривые

поворачивают в сторону убывающих значений ξ и далее приближаются к прямой $\bar{\eta} = a$. Прямая $\bar{\eta} = a$ является решением уравнения (6). Покажем, что интегральные кривые, идущие в полосе $a < \bar{\eta} < 0.5$ и в полосе $0 < \bar{\eta} \leqslant a$, не пересекают прямую $\bar{\eta} = a$, а приближаются к ней асимптотически.

В самом деле, линеаризируя уравнение (6) вблизи $\bar{\eta} = a$, получим

$$\bar{\eta} = a + \text{const}\, e^{\varphi(a)\xi} \text{ при } \bar{\eta} > a, \qquad \bar{\eta} = a - \text{const}\, e^{\varphi(a)\xi} \text{ при } \bar{\eta} < a, \tag{9}$$

где $\varphi(a) = 0.5(1-a)^{1-m} a^{-(\sigma+m+1)}(1-2a)^{-1}$, $a = (\gamma-1)/(\gamma+1)$. Следовательно, при $\bar{\eta} \to a + 0$ и, соответственно, при $\bar{\eta} \to a - 0$ аргумент ξ неограниченно возрастает ($\xi \to -\infty$). В полосе $0 < \bar{\eta} < a$ имеем $\bar{\eta}' < 0$ и с ростом ξ значения $\bar{\eta}$ падают вплоть до $\bar{\eta} = 0$. Прямая $\bar{\eta} = 0$ пересекается интегральной кривой в некоторой точке $\xi = \xi_2$.

Подробно поведение интегральных кривых вблизи прямой $\bar{\eta} = 0$ будет изучено в § 4.

Заметим, что интегральные кривые имеют только тогда физический смысл, когда значение ξ на них возрастает. Это обстоятельство связано с тем, что на поршне $\xi \approx D^{-2m+2}t$ и поэтому уменьшение ξ вдоль интегральной кривой эквивалентно обратному ходу времени. Таким образом, профилю бегущей волны соответствует лишь кусок интегральной кривой в полосе $0.5 \leqslant \bar{\eta} \leqslant 1$, т. е. $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$. В остальную часть плоскости $(\xi, \bar{\eta})$ непрерывное решение продолжить невозможно.

3. Основные свойства бегущей волны для $\gamma < 3$. Из приведенного выше анализа можно сделать следующие выводы.

Для $m \leqslant 0$ фронт волны находится при $\xi = -\infty$, а при $m > 0$ волна имеет фронт при конечных значениях $\xi = \xi_0 = 0$. Это показывает, что для $m \leqslant 0$ скорость распространения тепла бесконечна.

При $m > 0$ волна распространяется с конечной массовой скоростью D. Так же как и в случае одного уравнения нелинейной теплопроводности без учета влияния газодинамики, физические величины непрерывны на фронте волны.

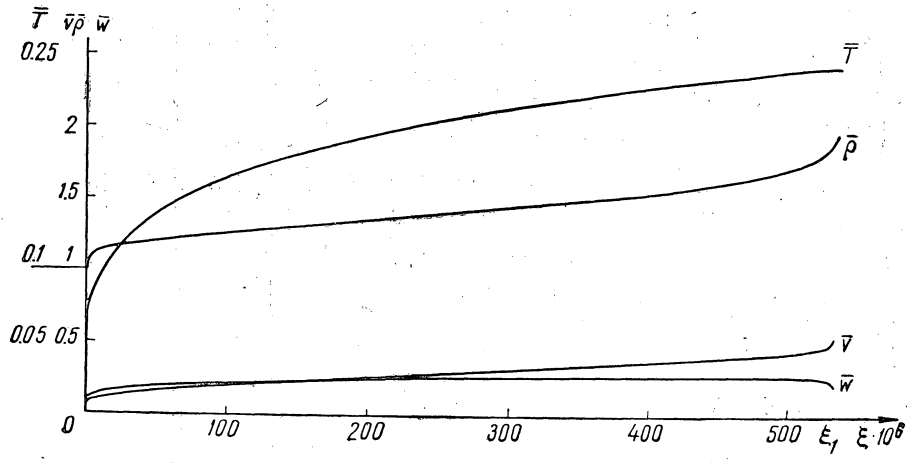
Заметим, что аналогичные результаты получаются при рассмотрении одного уравнения нелинейной теплопроводности без учета влияния гидродинамического движения (работы сжатия).

На фиг. 3 приведены профили $\bar{T}(\xi)$, $\bar{v}(\xi)$, $\bar{\rho}(\xi)$, $\bar{w}(\xi)$, полученные при решении (6) в области $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$ для $m = 4$, $\sigma = 1$, $\gamma = 5/3$.

Решение в виде непрерывной бегущей волны существует лишь до $\xi = \xi_1$ ($\bar{\eta} = 0.5$), т. е. лишь до определенного момента $t = t_1$, когда на поршне будет достигнута безразмерная критическая температура $\bar{T}_1 = 0.25$. Отметим, что в случае уравнения нелинейной теплопроводности без учета влияния гидродинамики никаких ограничений по температуре для бегущих ТВ нет (см. [1]).

Существование решения лишь до $\xi = \xi_1$ можно объяснить, если учесть, что процесс распространения тепла в среде порождает одновременно звуковые возмущения. Однако лагранжева скорость переноса состояния ($D_л = D/\rho$) в бегущей волне меняется от точки к точке, поскольку в

волне меняется ρ. Покажем, что в области бегущей ТВ (и на самом ее фронте) $D_л$ больше, чем местная изотермическая скорость возникающих звуковых возмущений ($c_т = \sqrt{RT}$). Неравенство $D_л > c_т$ в безразмерном виде превратится в условие $\bar{\eta} > \sqrt{\bar{\eta}(1-\bar{\eta})}$. Как легко видеть, оно выполняется при $\bar{\eta} > 0.5$, которое всегда имеет место в области $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$.



Фиг. 3

При $\xi = \xi_1$, т. е. при $\bar{\eta} = 0.5$, имеем $D_л = c_т$. Итак, во всей области построенной нами непрерывной бегущей ТВ $D_л > c_т$, т. е. такая ТВ является сверхзвуковой (тепло распространяется быстрее звуковых возмущений). Следуя [6], будем называть ее температурной волной первого рода (ТВ-I). По мере удаления от фронта волны разность $D_л - c_т$ уменьшается, пока в точке $\xi = \xi_1$ или, соответственно, в момент $t = t_1$ на поршне не выполнится условие $D_л = c_т$. Для $t > t_1$ режим бегущей волны может сохраниться в том случае, если изменится D или внутри бегущей волны возникнет изотермический разрыв, позволяющий осуществить решение с $D_л < c_т$.

Из разложения вблизи $\xi = \xi_1 - 0$

$$\bar{\eta} = 0.5 + 2^{m+0.5\sigma-2}\left(\frac{3-\gamma}{\gamma-1}\right)^{0.5}(\xi_1-\xi)^{0.5} + \ldots,$$

$$\bar{w} = \frac{0.125(3-\gamma)}{\gamma-1} + 2^{m+0.5\sigma-3}\left(\frac{3-\gamma}{\gamma-1}\right)^{0.5}(\xi_1-\xi)^{0.5} + \ldots, \qquad (10)$$

$$\bar{T} = 0.25 - 2^{2m+\sigma-4}\left(\frac{3-\gamma}{\gamma-1}\right)(\xi_1-\xi) + \ldots$$

следует: 1) температура ($\bar{T}$) по мере приближения к точке ξ_1 растет; условия (5) показывают, что в точке $\xi = \xi_1$ ($\bar{\eta} = 0.5$) температура достигает максимального значения $\bar{T}_1 = 0.25$; 2) вблизи $\xi = \xi_1$ при стремлении ξ к $\xi_1 - 0$ величина потока $\bar{w}$ уменьшается; с другой стороны, вблизи фронта волны (при $\xi = 0$) поток растет с ростом ξ; следовательно, функция $\bar{w} = \bar{w}(\xi)$ не монотонна в промежутке $0 < \xi < \xi_1$; максимальное значение потока $\bar{w}_m = 0.5/(\gamma^2-1)$ достигается в точке ξ, для которой $\eta = \gamma/(\gamma+1)$; 3) непрерывным образом продолжить решение в область $\xi > \xi_1$ при $1 < \gamma < 3$ невозможно.

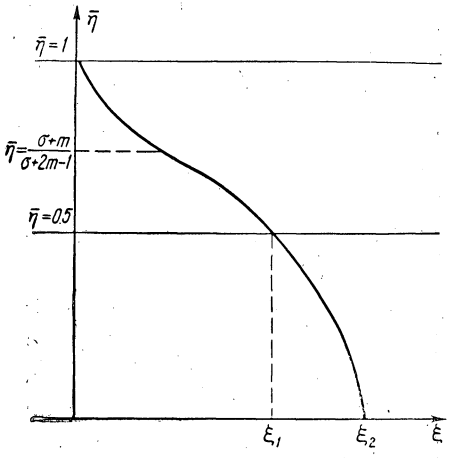
§ 3. Исследование решения в случае $\gamma \geqslant 3$

1. Поле интегральных кривых при $\gamma = 3$. В зависимости от значения γ меняется относительное положение выделенных нами на плоскости $(\xi, \bar{\eta})$ линий (см. фиг. 2). При $\gamma = 3$ прямые $\bar{\eta} = 2/(\gamma + 1)$ и $\bar{\eta} = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ сливаются с прямой $\bar{\eta} = 0.5$, т. е. при $\gamma = 3$ исчезает область $2/(\gamma + 1) > \bar{\eta} > (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ и прямая $\bar{\eta} = 0.5$ перестает быть линией поворота интегральных кривых.

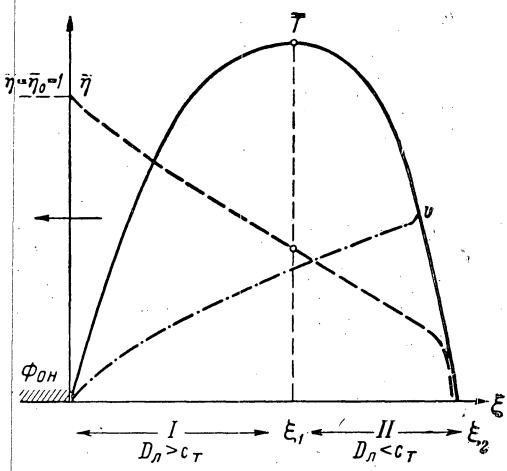
Уравнение (6) при $\gamma = 3$ принимает вид

$$\bar{\eta}' = -0.5\, \bar{\eta}^{-(\sigma+m)} (1 - \bar{\eta})^{1-m}. \tag{11}$$

Отсюда следует, что $\bar{\eta}'$ не меняет знака в области $1 \geqslant \bar{\eta} \geqslant 0$ и интегральные кривые, начинающиеся при $\bar{\eta} = 1$, доходят до прямой $\bar{\eta} = 0$. На линии $\bar{\eta} = (\sigma + m)/(\sigma + 2m - 1)$ имеет место перегиб интегральных кривых (фиг. 4).



Фиг. 4



Фиг. 5

Характер поведения интегральных кривых вблизи фона $(\bar{\eta} = 1)$ остается таким же, как и в случае $\gamma < 3$ (см. § 3).

Рассмотрим поведение интегральных кривых вблизи линии $\bar{\eta} = 0$. Разложение вблизи точки $(\xi = \xi_2 - 0,\ \bar{\eta} = 0)$ при $m + \sigma \neq -1$ с точностью до членов второго порядка малости имеет вид

$$\bar{\eta} = \left[2^{m+2} (\sigma + m) \frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}\right]^{1/(m+\sigma+1)} (\xi_2 - \xi)^{1/(m+\sigma+1)} + \ldots. \tag{12}$$

В разложении для общности сохранено произвольное значение γ.

Из (11) и (12) следует:

а) при $m + \sigma > -1$ интегральные кривые пересекаются с линией $\bar{\eta} = 0$ в конечной точке $\xi = \xi_2$, $\bar{\eta} = 0$, причем $(\bar{\eta}')_{\bar{\eta}=0} = -\infty$ для $m + \sigma > 0$, $(\bar{\eta}')_{\bar{\eta}=0} = -0.5$ для $m + \sigma = 0$, $(\bar{\eta}')_{\bar{\eta}=0} = 0$ для $0 > m + \sigma > -1$;

б) при $m + \sigma \leqslant -1$ интегральные кривые лишь асимптотически при $\xi \to +\infty$ стремятся к прямой $\bar{\eta} = 0$, причем при $m + \sigma = -1$ разложение вблизи $\bar{\eta} = 0$ имеет вид $\bar{\eta} \simeq Ce^{-0.5\xi} + \ldots$

2. Основные свойства бегущей волны в случае $\gamma = 3$.

1°. В п. 3 было показано, что $D_л = c_т$ в точке $\xi = \xi_1 (\bar{\eta} = 0.5)$. Для случая $\gamma < 3$ решение в виде бегущей волны существовало лишь до $\xi \leqslant \xi_1$ (до момента $t \leqslant t_1$, соответствующего появлению на поршне температуры $\bar{T}_1 = 0.25$). В случае $\gamma = 3$ решение в виде непрерывной бегущей волны продолжается и в область $\xi > \xi_1$ $(\bar{\eta} < 0.5)$ вплоть до точки $(\xi = \xi_2,\ \bar{\eta} = 0)$.

2°. Характер профилей температуры $\bar{T}$ и удельного объема $\bar{\eta}$, имеющий место в бегущей волне при $\gamma = 3$, приведен на фиг. 5.

Как следует из фиг. 5, профиль температуры в бегущей волне немонотонен.

В области I $(0 < \xi < \xi_1)$ температура растет с ростом ξ. В этой области $\eta > 0.5$ и потому $D_л > c_т$, т. е. в ней осуществляется режим ТВ-I.

В области II $(\xi_1 < \xi < \xi_2)$ температура падает с ростом ξ. Значения η меняются в пределах $0 < \bar{\eta} < 0.5$, и потому $D_л < c_т$. Следуя [6], будем называть режим распространения тепла при условии, что $D_л < c_т$, режимом температурной волны II рода (ТВ-II). С этой точки зрения можно говорить о том, что в области II осуществляется ТВ-II охлаждения.

3°. Поскольку значения $\bar{\eta} < 0$ не имеют физического смысла, рассматриваемая бегущая волна существует лишь до момента $t = t_2$, когда на поршне плотность обращается в бесконечность $(\bar{\eta} = 0)$. Разложение вблизи значения $\xi = \xi_2 - 0$ с точностью до членов второго порядка малости имеет вид

$$\begin{aligned}
\bar{\eta} &= A^{1/(m+\sigma+1)}(\xi_2 - \xi)^{1/(m+\sigma+1)} + \ldots,\\
\bar{p} &= 2 - A^{1/(m+\sigma+1)}(\xi_2 - \xi)^{1/(m+\sigma+1)} + \ldots,\\
\bar{v} &= 1 - A^{1/(m+\sigma+1)}(\xi_2 - \xi)^{1/(m+\sigma+1)} + \ldots,\\
\bar{w} &= -0.5 + \left(2A\frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}\right)^{1/(m+\sigma+1)}(\xi_2 - \xi)^{1/(m+\sigma+1)} + \ldots,\\
\bar{T} &= (0.5\,A)^{1/(m+\sigma+1)}\ (\xi_2 - \xi)^{1/(m+\sigma+1)} + \ldots,
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$A = 2^{m+2}(\sigma + m)\frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}.$$

Из (13) следует, что при $\xi = \xi_2$ безразмерный удельный объем и температура обращаются в нуль, а значения безразмерной скорости, давления и теплового потока остаются конечными.

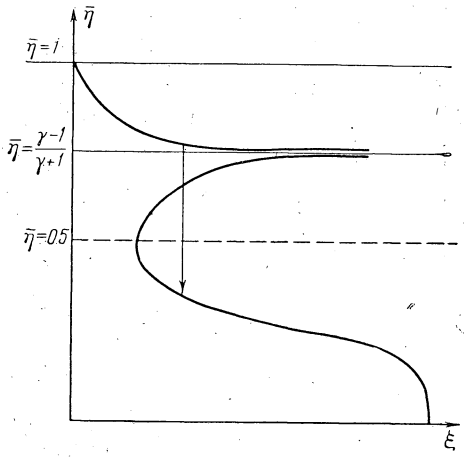
Бегущая волна рассматриваемого типа, как видно из фиг. 5, образуется благодаря немонотонному режиму температуры на поршне при монотонном росте скорости поршня со временем. Напомним, что в рассматриваемой нами системе координат (связанной с фронтом волны) поршень движется с постоянной скоростью D в область $\xi > 0$.

4°. ТВ-II охлаждения, возникающая на порошке в момент $t = t_1$, имеет передний фронт (точка $\xi = \xi_1$), распространяющийся по веществу с конечной скоростью, равной местной изотермической скорости звука. Отметим, что волна охлаждения распространяется с конечной скоростью по массе газа с отличной от нуля температурой.

Без учета влияния гидродинамики на нелинейную теплопроводность таких немонотонных по температуре бегущих волн не существует.

Можно дать качественное объяснение конечной скорости охлаждения по отличному от нуля фону температуры, основываясь на влиянии члена, соответствующего работе сжатия в уравнении энергии. Работа сжатия газа поршнем в рассматриваемом случае дает источники тепла, распределенные в волне охлаждения таким образом, что они, как показывает решение, делают скорость ее распространения конечной.

5°. С этой точки зрения ТВ-II нагрева должна быть волной разрежения, чтобы благодаря наличию отрицательной работы сжатия иметь конечную скорость тепла по ненулевому фону температуры. Отметим, что в режимах ТВ-II нагрева, построенных в [6], действительно происходило падение плотности в волне по мере роста в ней температуры. Аналогичные явления наблюдались при численном расчете ряда неавтомодельных задач.



Фиг. 6

В связи с этим есть основания предположить, что при режиме распространения тепла II рода (ТВ-II) именно сильное взаимное влияние тепловых и гидродинамических процессов делает возможным распространение температурных волн с конечной скоростью по ненулевому фону температуры. К этому предположению мы вернемся еще в § 5 при исследовании разрывных бегущих волн.

3. Режим бегущей волны с присоединенной массой. Выясним вопрос, продолжается ли решение непрерывным образом в область $\xi > \xi_2$. Это возможно, если прямая $\bar{\eta} = 0$ является решением уравнения (11). Необходимым условием будет выполнение неравенства $m + \sigma < 0$. Интегральная кривая пересекает линию $\bar{\eta} = 0$ в конечной точке $\xi = \xi_2$ ($\bar{\eta} = 0$), как показано в п. 2 § 3, лишь при условии $m + \sigma > -1$. Поэтому при $0 > m + \sigma > -1$ решение может быть продолжено в область $\xi > \xi_2$ в виде непрерывной бегущей волны. В этом случае от поршня вслед за ТВ-I нагрева и ТВ-II охлаждения при $t > t_2$ распространяется по массе газа волна бесконечного сжатия. В каждой точке этой волны, как следует из (5′), $\bar{T} = \bar{\eta} = 0$, $\bar{p} = 2$, $\bar{v} = 1$, $\bar{w} = -0.5$. Из существования решения в виде бегущей волны с конечной массовой скоростью следует, что масса, охваченная волной, возрастает и остается конечной, несмотря на то, что во всей области волны $\bar{\eta} = 0$. Решение такого вида можно трактовать как налипание массы на поршень. Благодаря бесконечной плотности налипающей массы налипающий слой все время остается бесконечно тонким. Действительно, поскольку при $-1 < m + \sigma < 0$ решение в виде бегущей волны в указанной области возможно, то массовая скорость (D) движения волны с $\bar{\eta} = 0$ остается конечной. Так как

$D = \rho(D_э - V)$, а $\rho = \infty$, то отсюда следует, что $D_э = V$, т. е. эйлерова скорость волны при $\bar{\eta} = 0$ совпадает со скоростью поршня.

Это означает, что толщина налипающего слоя массы остается равной нулю.

4. Рассмотрим характер поля интегральных кривых при $\gamma > 3$. Поведение интегральных кривых вблизи начального фона $\bar{\eta} = 1$ ничем не отличается от случая, разобранного в § 2. Однако прямая $\bar{\eta} = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$ оказывается ближе к фронту волны, чем прямая $\bar{\eta} = 0.5$. Вследствие этого существует непрерывная бегущая волна, соединяющая константное решение в области $\xi < 0$ (начальный фон перед волной) с константным решением $\bar{\eta} = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$, устанавливающимся за волной при $\xi \to +\infty$. Поле интегральных кривых, соответствующее случаю $\gamma > 3$, изображено на фиг. 6.

§ 4. Составные бегущие волны

Поставим вопрос: существует ли решение в области $\xi > \xi_1$ в форме бегущей волны при наличии в точке $\xi = \xi_1$ или перед ней изотермической УВ? Такой тип решения будет соответствовать скачкообразному изменению режима поршня в момент t_p, $0 < t_p < t_1$.

Записывая условие Гюгонио и условие изотермичности на фронте УВ (см. [4]) и используя интегралы (5), получим

$$\begin{gathered} \bar{\eta}_2 = 1 - \bar{\eta}_1, \qquad \bar{v}_2 = \bar{v}_0 + 1 - \bar{\eta}_2, \qquad \bar{p}_2 = 1 - \bar{\eta}_2, \\ \bar{T}_2 = \bar{\eta}_2 (1 - \bar{\eta}_2) = \bar{T}_1, \qquad \bar{w}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\bar{\eta}_2 - 1\right)(1 - \bar{\eta}_2), \end{gathered} \tag{14}$$

где индексы 0, 1, 2 относятся, соответственно, к значению на фронте ТВ-I, перед фронтом УВ и за фронтом УВ.

Выясним, как будет влиять место постановки изотермического скачка за фронтом ТВ-I на характер решения, возникающего за ним.

1. Предположение о наличии скачка в точке $\xi = \xi_1$, где $\bar{\eta}_1 = 0.5$, дает $\bar{\eta}_2 = 0.5 = \bar{\eta}_1$. Следовательно, изотермический скачок не может существовать в точке $\xi = \xi_1$.

2. Если скачок возникает при значениях $0.5 < \bar{\eta}_1 < 2/(\gamma + 1)$, то значение $\bar{\eta}_2$ изменяется в полосе $0.5 > \bar{\eta}_2 > (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. Функция $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi)$ в этой полосе с ростом ξ монотонно растет и приходит в точку поворота $\xi = \xi_1'$ (см. фиг. 2).

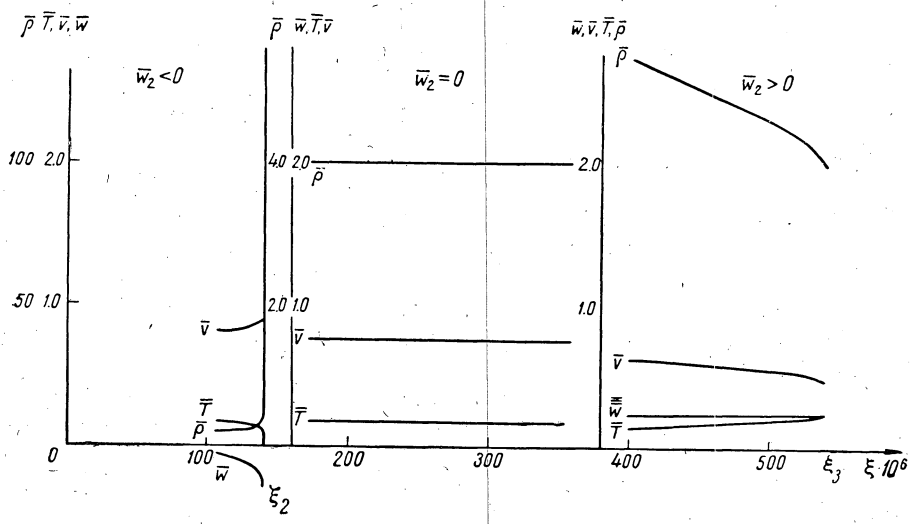
Поток тепла, соответствующий указанным значениям $\bar{\eta}_2$, положителен и изменяется в пределах $\frac{1}{8}(3 - \gamma)/(\gamma - 1) > \bar{w}_2 > 0$.

Таким образом, составная бегущая волна, состоящая из ТВ-I, движущейся по фону с нулевой температурой, и следующей за ней изотермической УВ с положительным потоком тепла за фронтом, метастабильна. Она существует при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1'$. Точка $\xi = \xi_1'$ соответствует на поршне моменту $t = t_1'$, при котором $D_л = c_т$.

3. Если $2/(\gamma + 1) < \bar{\eta}_1 < 1$, то из (14) следует $0 < \bar{\eta}_2 < (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, $-0.5 < \bar{w}_2 < 0$. Интегральные кривые с ростом ξ монотонно падают, доходят до прямой $\bar{\eta} = 0$ и пересекают ее в точке $\xi = \xi_2'$, $\bar{\eta} = 0$, где $(\eta')_{\xi=\xi_2'} = -\infty$ для $m > 1$ (см. фиг. 8).

Следовательно, составная волна с отрицательным тепловым потоком за фронтом УВ также метастабильна и существует до момента $t = t_2'$, при котором $\bar{\eta} = 0$, т. е. на поршне имеет место бесконечное сжатие при конечном давлении. Подробный анализ решения вблизи линии $\bar{\eta} = 0$ приведен в § 3.

4. Пусть, наконец, скачок возникает при $\bar{\eta}_1 = 2/(\gamma + 1)$. В результате скачка мы попадаем на прямую $\bar{\eta} = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ (см. фиг. 7).



Фиг. 7

Все значения за фронтом УВ удовлетворяют равенствам

$$\bar{\eta}_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \qquad \bar{T}_2 = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}, \qquad \bar{v}_2 = \bar{v}_0 + \frac{2}{\gamma + 1}, \qquad \bar{w}_2 = 0. \quad (15)$$

Составная бегущая волна в этом случае осуществляет переход с одного константного решения на другое константное решение. Ее можно рассматривать как обобщение известной беккеровской волны (см. [8]) для случая нелинейной теплопроводности.

Полученное решение позволяет точно ответить на вопрос о ширине фронта УВ «размазанной» нелинейной теплопроводностью в случае, когда фон перед ТВ нулевой.

Ширина фронта УВ (в *см*) имеет вид

$$\Delta u = \xi_{\text{ск}} K_0 D^{2m-1} R^{-(m+1)} \rho_0^{-2(m-1)}, \quad (16)$$

где $\xi_{\text{ск}}$ — автомодельная координата скачка.

На фиг. 7 приводятся автомодельные профили за скачком для трех типов составных волн для случая $m = 4$, $\sigma = 1$, $\gamma = 5/3$.

В области за изотермическим скачком всегда $\bar{\eta}_2 < 1$ и потому $D_{\text{л}} > c_{\text{т}}$. Поэтому в случае составных волн с отрицательным тепловым потоком за скачком ($\bar{w}_2 < 0$) в области за скачком имеет место ТВ-II охлаждения.

Из фиг. 7 следует, что в ТВ-II охлаждения скорости, плотности давления и тепловые потоки (отрицательные) растут по мере удаления от ее фронта.

В случае положительного теплового потока за изотермическим скачком ($\bar{w}_2 > 0$) имеет место режим ТВ-II нагрева.

Из фиг. 7 следует, что в ТВ-II нагрева тепловой поток растет, а плотность, скорость и давление падают по мере удаления от фронта волны.

Таким образом, в случае составных бегущих волн удается получить области в волне как с режимом ТВ-II охлаждения, так и с режимом ТВ-II нагрева. В этих случаях также можно говорить о конечной скорости распространения тепла по ненулевому фону в режиме ТВ-II, так как наличие ТВ-II охлаждения или ТВ-II нагрева не сказывается на структуре бегущей ТВ-I, идущей впереди них.

§ 5. Некоторые аналитические решения

Аналитическое решение для целых m и σ (при $m > 1$, $\sigma > 0$). Для целых m, σ и при условиях $m > 1$, $\sigma > 0$ можно получить аналитическое решение *) уравнения (6):

$$\begin{aligned}\xi - \xi_0 = & \sum_{k=0}^{m+\sigma-1} \sum_{l=0}^{m-1} 2C_{m+\sigma-1}^{k} C_{m-1}^{l} \frac{1}{2m+\sigma-2-k-l} (-1)^{m-1+l} a^{k+1} \times \\ & \times (1-a)^{l} (1-2a) [(\bar{\eta}-a)^{2m+\sigma-2-k-l} - (\bar{\eta}_0-a)^{2m+\sigma-2-k-l}] - \\ & - \sum_{k=0}^{m+\sigma-1} \sum_{l=0}^{m-1} 4C_{m+\sigma-1}^{k} C_{m-1}^{l} \frac{1}{2m+\sigma-1-k-l} (-1)^{m-1+l} a^{k+1} \times \\ & \times (1-a)^{l} [(\bar{\eta}-a)^{2m+\sigma-1-k-l} - (\bar{\eta}_0-a)^{2m+\sigma-1-k-l}] + \\ & + 2a^{m+\sigma} (1-a)^{m-1} \left[(1-2a) \ln \frac{\bar{\eta}-a}{\bar{\eta}_0-a} - (\bar{\eta}-\bar{\eta}_0) \right],\end{aligned} \tag{17}$$

где $a = (\gamma-1)/(\gamma+1)$, $\bar{\eta}_0$ — значение, соответствующее точке ξ_0. Выражение (17) можно записать в другом виде:

$$\begin{aligned}\xi - \xi_0 = & \sum_{k=0}^{m+\sigma-1} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{2m+\sigma-1-k-l} 2C_{m+\sigma-1}^{k} C_{m-1}^{l} C_{2m+\sigma-1-k-l}^{i} \frac{(-1)^{m-1+l+i}}{(2m+\sigma-2-k-l)} \times \\ & \times a^{k+i+1} (1-a)^{l} (1-2a) [\bar{\eta}^{2m+\sigma-2-k-l-i} - \bar{\eta}_0^{2m+\sigma-2-k-l-i}] - \\ & - \sum_{k=0}^{m+\sigma-1} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{2m+\sigma-k-l-1} 4C_{m+\sigma-1}^{k} C_{m-1}^{l} C_{2m+\sigma-k-l}^{i} \frac{(-1)^{m-1+l+i}}{2m+\sigma-1-k-l} \times \\ & \times a^{k+1+i} (1-a)^{l} [\bar{\eta}^{2m+\sigma-1-k-l-i} - \bar{\eta}_0^{2m+\sigma-1-k-l-i}] + \\ & + 2a^{m+\sigma} (1-a)^{m-1} \left[(1-2a) \ln \frac{\bar{\eta}-a}{\bar{\eta}_0-a} - 2(\bar{\eta}-\bar{\eta}_0) \right].\end{aligned} \tag{18}$$

Общий вид решения, даваемый формулой (18), показывает, что решение имеет вид

$$\xi - \xi_0 = P(\bar{\eta}) + 2a^{m+\sigma} (1-a)^{m-1} (1-2a) \ln \frac{\bar{\eta}-a}{\bar{\eta}_0-a}, \tag{19}$$

где $P(\bar{\eta})$ — полином от $\bar{\eta}$, начинающийся с члена $4a(-1)^{m-1}/(2m+\sigma-2)\bar{\eta}^{2m+\sigma-1}$, $a = (\gamma-1)/(\gamma+1)$.

*) Первые два члена в формулах (17) и (18) получены при $k \neq m+\delta-1$ и $l \neq m-1$ одновременно, третий член — при условии, что $k = m+\delta-1$ и $l = m-1$ одновременно.

Наличие в решении логарифмического члена приводит к разделению поля интегральных кривых на две области $\bar{\eta} > a$ и $\bar{\eta} < a$. Построить решение, существующее в обеих областях, можно лишь с помощью интегральной кривой со скачками.

Выражение (19) позволяет установить влияние параметра $a = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ на тип решения. Так, при значениях $a = 0\,(\gamma = 1)$, $a = 1\,(\gamma = \infty)$ и $a = 0.5\,(\gamma = 3)$ логарифмический член не входит в уравнение и в этом случае можно построить непрерывное решение от $\bar{\eta} = 1$, до $\bar{\eta} = 0$. При $a < 0.5\,(\gamma < 3)$ знак перед логарифмическим членом положительный и интегральные кривые при $\bar{\eta} \to a - 0$ стремятся к $\xi \to -\infty$, а при $\bar{\eta} \to a + 0$ имеем $\xi \to +\infty$.

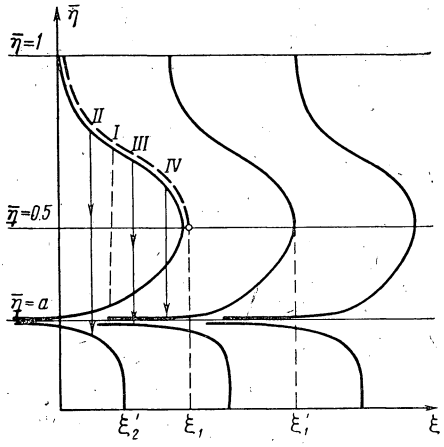
Для $a > 0.5\,(\gamma > 3)$ знак перед логарифмическим членом отрицательный и при $\bar{\eta} \to a - 0$ имеем $\xi \to +\infty$, а при $\bar{\eta} \to a + 0$ имеем $\xi \to -\infty$. В случае $a \geq 0.5\,(\gamma \geq 3)$ оказывается возможным построить непрерывное решение от $\bar{\eta} = 1$ до $\bar{\eta} = a$.

Далее отметим, что из разложения (9), справедливого при любых m и σ, следует, что показатели m и σ не влияют существенным образом на перечисленные выше результаты. Они сильно сказываются лишь на структуре решения вблизи линий $\bar{\eta} = 1$ (фронта волны) и $\bar{\eta} = 0$.

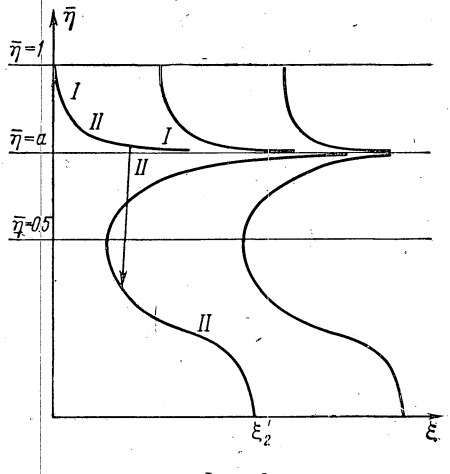
Чтобы получить более полное представление об особенностях, вносимых в решение нелинейностью уравнения теплопроводности, рассмотрим решение (18) в двух частных случаях:

случай А — при $m = 1$, $\sigma = 0$ — простейший случай нелинейной теплопроводности;

случай В — при $m = 0$, $\sigma = -1$ — случай обычной линейной теплопроводности.



Фиг. 8



Фиг. 9

2. Аналитическое решение при $m = 1$, $\sigma = 0$ (случай А). Из (18) сразу следует, что решение имеет вид

$$\xi = 2a\,(1 - 2a)\ln\frac{\bar{\eta} - a}{1 - a} + 4a\,(1 - \bar{\eta}) \text{ для } \bar{\eta} > a,$$
$$\xi - \xi_2' = 2a\,(1 - 2a)\ln\frac{a - \bar{\eta}}{a} - 4a\bar{\eta} \text{ для } \bar{\eta} < a. \tag{20}$$

Отсюда видно, что $\xi_0 = 0$ при $\bar{\eta}_0 = 1$, $\xi = \xi_2'$ при $\bar{\eta} = 0$.

Поле интегральных кривых для случая $1 < \gamma < 3$ ($a < 0.5$) дано на фиг. 8. Бегущие волны различного типа помечены римскими цифрами. Решение I — непрерывная бегущая волна, существующая при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$ (штриховая линия). Решение II — составная бегущая волна с $\bar{w}_2 < 0$ за фронтом изотермического скачка.

Заметим, что скачок с $\bar{w}_2 < 0$ в зависимости от места его постановки приводит к переходу каждый раз на новую интегральную кривую в области $\bar{\eta} < a$.

Решение III — при постановке скачка при $\bar{\eta}_1 = 2/(\gamma + 1)$ за изотермическим скачком $\bar{w}_2 = 0$, и мы переходим на решение $\bar{\eta} = a$.

Решение IV. При постановке скачка в области $\bar{\eta} < 2/(\gamma + 1)$ скачок приводит нас также на новую интегральную кривую в области $0.5 > \bar{\eta} > a$. Решение опять существует лишь до точки $\xi = \xi_1'$, причем значение $\xi = \xi_1'$ не совпадает с аналогичным значением ξ_1 для решения I.

Отметим, что при постановке скачка при значениях, очень близких к $\bar{\eta} = 2/(\gamma + 1)$, значения ξ_1' и ξ_2' могут быть как угодно велики, т. е. режим бегущей волны с $\bar{w}_2 > 0$ и $\bar{w}_2 < 0$ за изотермическим скачком можно продолжить при уменьшении $|\bar{w}_2|$ до сколь угодно больших значений ξ.

Для случая $a > 0.5$ ($\gamma > 3$) поле интегральных кривых дано на фиг. 9.

Решение I — непрерывные бегущие волны, соединяющие константное решение $\bar{\eta} = 1$ и константное решение $\bar{\eta} = a$.

Решение II — составные бегущие волны с $\bar{w}_2 < 0$ за фронтом изотермического скачка.

Отметим, что для $a > 0.5$ невозможно построить решение с положительным потоком ($\bar{w}_2 > 0$) за изотермическим скачком. Действительно, из (14) видно, что $\bar{w}_2 \leqslant 0$, если $\bar{\eta}_1 \geqslant 2/(\gamma + 1)$ или в случае $\gamma \geqslant 3$ для $\bar{\eta}_1 \geqslant 0.5$, откуда и следует, что случай $\bar{w}_2 > 0$ невозможен при $\gamma \geqslant 3$.

Наконец, для случая $a = 0.5$ ($\gamma = 3$) поле интегральных кривых изображено на фиг. 10.

В этом случае член с логарифмом вообще выпадает, т. е. $\xi = 2(1 - \bar{\eta})$ или $\bar{\eta} = 1 - 0.5\xi$ (если $\xi_0 = 0$). Отсюда следует, что $\xi = \xi_2' = 2$ при $\eta = 0$. В этом случае наряду с непрерывным решением существуют еще и разрывные решения с $\bar{w}_2 < 0$ за изотермическим скачком (см. на фиг. 10 решение со скачком, изображенным стрелкой).

3. Аналитическое решение для $m = 0$, $\sigma = -1$ (случай B). В случае $m = 0$ и $\sigma = -1$ решение для $\bar{\eta} > a$ имеет вид

$$\left(\frac{\bar{\eta} - a}{1 - a}\right)^{2(1-2a)/(1-a)} \frac{1}{\bar{\eta}^2}(1 - \bar{\eta})^{2a/(1-a)} = e^{\xi},$$

а для $\bar{\eta} < a$

$$\left[\frac{(a - \bar{\eta})}{a}\right]^{2(1-2a)/(1-a)} \frac{1}{\bar{\eta}}(1 - \bar{\eta})^{2a/(1-a)} = e^{\xi}.$$

Решение справедливо для $a > 0.5$ и $a < 0.5$.

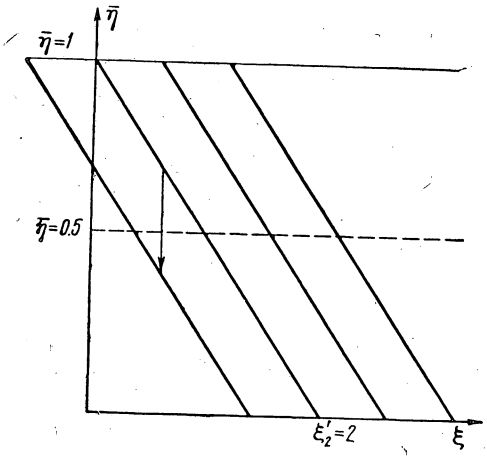
В случае $a = 0.5$ решение дается выражением

$$\frac{1}{\bar{\eta}^2}(1 - \bar{\eta})^2 = Ce^{\xi}.$$

Сопоставляя решения для случая В с решением в случае А, можно отметить:

а) в обоих случаях картина поля интегральных кривых одинаково меняется при изменении параметра γ;

б) резкие различия имеются в районе прямой $\bar{\eta} = 1$, где в случае нелинейной теплопроводности наблюдается конечный фронт волны, а в случае обычной линейной теплопроводности условие $\eta = 1$ выполняется лишь при $\xi \to -\infty$; в) аналогично этому и вблизи прямой $\eta = 0$ в случае В интегральные кривые лишь асимптотически (при $\xi \to +\infty$) стремятся к прямой $\bar{\eta} = 0$.



Фиг. 10

Поэтому можно сказать, что случай В асимптотически соответствует случаю А. Эти различия показывают, что возможность существования конечной ширины ударной волны и появление в решении характерной длины и характерного времени (t_1 или t_2 и т. д.) существенно обусловлены взаимодействием гидродинамики с нелинейной теплопроводностью и не имеют места ни в случае просто нелинейной теплопроводности (без влияния гидродинамики), ни в случае гидродинамики с обычной линейной теплопроводностью.

§ 6. Некоторые численные решения

Пользуясь установленной в § 1 связью автомодельной задачи о бегущей волне с аналогичной задачей для поршня, проведем серию расчетов.

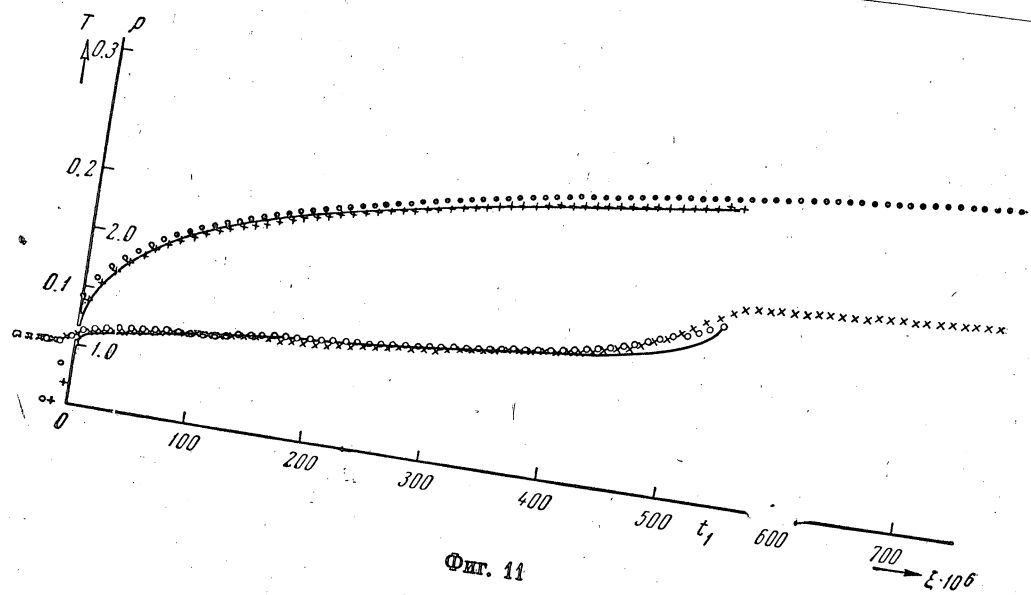
1. Расчет непрерывной ТВ-I, существующей до $t = t_1$. На фиг. 11 приведены результаты сравнения автомодельного решения и численного расчета системы уравнений в частных производных для аналогичной задачи с поршнем.

Сплошные линии — профиль безразмерной температуры (сверху) и безразмерной плотности (снизу) — соответствуют автомодельному решению. Знаки + и ○ показывают профили соответствующих величин, найденных численным расчетом аналогичной задачи для поршня в момент $t = t_1$.

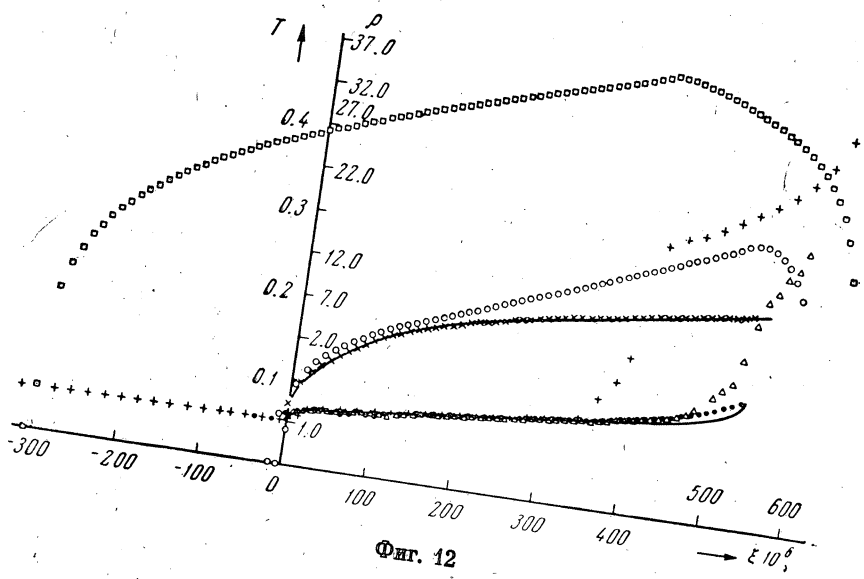
Знаки ∘ и × показывают профили температуры и плотности, полученные на машине для $t = 1.43t_1$ при условии сохранения закона роста температуры, имевшегося при $t < t_1$, и линейном законе роста скорости на поршне во всем промежутке $t_1 < t < 1.43t_1$.

Полученные результаты показывают, что в момент $t = t_1$ при заданном выше режиме поршня происходит изменение скорости распространения волны при сохранении характерного вида режима бегущей ТВ-I.

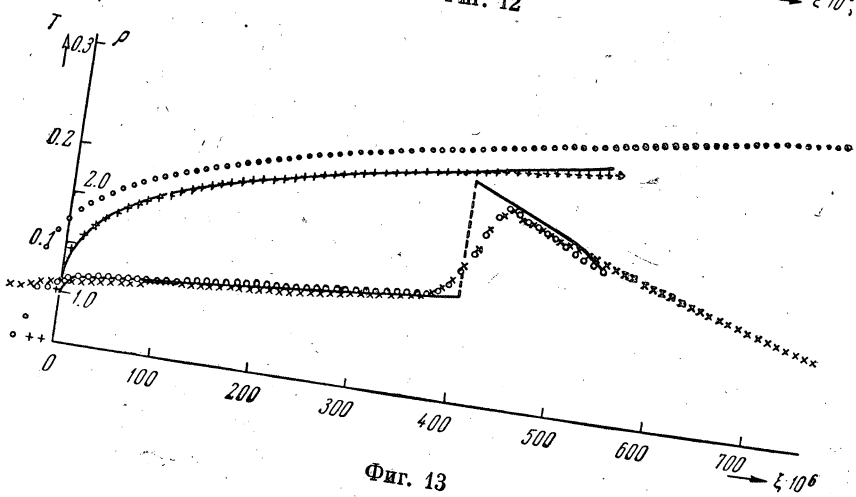
2. Расчет, описывающий появление внутри бегущей ТВ-I изотермического скачка для моментов $t > t_1$.



Фиг. 11



Фиг. 12



Фиг. 13

На фиг. 12 приведены результаты расчетов, аналогичные случаю, изученному в п. 1 § 6, но при другом способе продолжения граничных режимов на поршне на моменты $t > t_1$. А именно, температура растет по тому же закону, что и в п. 1, а скорость поршня нарастает в 4 раза быстрее, чем в п. 1. Сплошными линиями на фиг. 12 изображены профили безразмерной температуры (сверху) и безразмерной плотности (снизу), полученные из автомодельного решения для бегущей волны; значки $\times$ и $\cdot$ показывают профили соответствующих величин на момент $t = t_1$, значки $\bigcirc$ и $\triangle$ — на момент $t = 1.1t_1$, значки $\square$ и $+$ — на момент $t = 1.20t_1$. При этих условиях при $t > t_1$ в бегущей волне возникает изотермический скачок с $\bar{w}_2 < 0$.

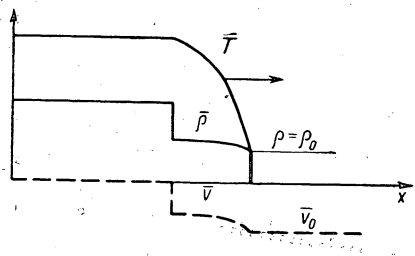
3. Наконец, на фиг. 13 приведен расчет бегущей составной волны с положительным потоком за изотермическим скачком (ТВ-I — ТВ-II).

Сплошные линии — соответственно, профили безразмерных температуры (сверху) и плотности (снизу) — получены из автомодельного решения для составной волны с положительным тепловым потоком за скачком. Значки $+$ и $\bigcirc$ показывают профили соответствующих величин на момент $t = t_1$, а значки $\cdot$ и $\times$ — то же для $t = 1.41t_1$. Метод продолжения состоит в том, что сохраняется производная температуры и линейный закон нарастания скорости при $t > t_1$.

§ 7. Обсуждение результатов

Есть основания считать, что построенные автомодельные решения устойчивы до момента $t = t_1$. Это подтверждается совпадением их с численными решениями системы (1), приведенными на фиг. 11—13.

Важной особенностью рассмотрения является нелинейность уравнения теплопроводности, что приводит к конечной скорости распространения тепла по фону с нулевой температурой. Это обстоятельство позволяет рассматривать нестационарные решения. Нелинейность уравнения теплопроводности при учете влияния гидродинамики приводит к появлению в решениях характерной длины (расстояние от фронта ТВ-I до изотермического скачка в составных волнах, или для ТВ-I имеется характерная длина, соответствующая $t = t_1$) и возникновению характерного времени. Другая особенность построенных решений связана с тем, что в бегущей волне профиль не деформируется со временем, несмотря на наличие диссипативных процессов в среде. Используя инвариантность решения относительно преобразования скоростей, легко построить волну типа, представленного на фиг. 14.



Фиг. 14

Составная бегущая волна с потоком за изотермическим разрывом, равным нулю, распространяется по «холодной» среде, текущей навстречу ей с постоянной скоростью $\bar{v}_0$. Частично в области ТВ, а частично на изотермическом скачке эта скорость уменьшается так, что за скачком она

обращается в нуль. Таким образом, в волне идет процесс превращения направленного гидродинамического движения среды в тепловое движение и за счет этого поддерживается жесткая структура (организация) волны.

В решениях типа ТВ-I распространение состояния происходит со сверхзвуковой скоростью. Это приводит к слабому взаимодействию тепловых процессов переноса с гидродинамическими. Хотя режим ТВ-I существует лишь до $t = t_1$, но так как время его существования растет пропорционально D^{2m-2}, то при сильной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры ($m \gg 1$) и высоких скоростях распространения тепла ($D \gg 1$) режим ТВ-I может являться преобладающей формой теплоотвода.

В решениях типа составных бегущих волн мы наблюдаем и области дозвукового переноса тепла, связанные с сильным взаимодействием тепловых и гидродинамических явлений, режимы ТВ-II нагрева и ТВ-II охлаждения.

Отличительной особенностью рассмотренных задач является их неадиабатичность. Выбирая тот или иной закон движения поршня и различные законы изменения теплового потока на нем, можно существенным образом повлиять на характер связи гидродинамических и тепловых процессов. Решение с поршнем, на котором задан теплоотвод, показывает, что можно осуществить режимы с сильно пережатыми изотермическими УВ и, несмотря на наличие теплопроводности в среде, получить бесконечный пик плотности на поршне.

Авторы благодарны Л. Н. Бусуриной и В. П. Крусу за составление программы и проведение расчетов на ЭВМ, а также Л. Н. Лукьяновой, А. М. Захаровой и Н. Г. Тепловой, участвовавшим в проведении расчетов и оформлении результатов.

Авторы признательны Б. Л. Рождественскому за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
8.06.1964

Цитированная литература

1. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец. К теории распространения тепла для теплопроводности, зависящей от температуры. В «Сб., посвященном семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе». М., Изд-во АН СССР, 1950, 61—71.
2. Г. И. Баренблатт. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. Прикл. матем и механ., 1952, 16, № 6, 67—68.
3. Г. И. Баренблатт, И. М. Вишик. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. Прикл. матем. и механ., 1956, 20, № 3, 411—417.
4. R. Marschak. An influence of the radiation on the behavior of the schock waves. Phys. Fluids, 1958, № 1, 24—29.
5. А. А. Самарский, И. М. Соболь. Примеры численного расчета температурных волн. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 4, 702—719.
6. П. П. Волосевич, С. П. Курдюмов, Л. Н. Бусурина, В. П. Крус. Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 1, 159—169.
7. M. Hanin, On Rayleigh's problems compressible fluids. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1960, 13, № 2, 184—195.
8. B. Becker. Stoßwell und Detonation. Z. Phys., 1922, 8, 321—362.
9. Я. Б. Зельдович, Ю. Л. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.