

Вопрос об ограниченности отношения $|y(x)| / (x+1)^{\bar{c}} \exp \bar{a}x$ для произвольного решения уравнения (5.4) не ставится.

В заключение автор благодарит Е. П. Жидкова, Н. П. Жидкова и В. П. Ширкова за ряд полезных замечаний, высказанных ими при обсуждении данной работы.

Поступила в редакцию
11.11.1964

Цитированная литература

1. А. А. Корнейчук, А. С. Марков, Ом Сан Ха. Вычисление многочленов Якоби. Препринт ОИЯИ, 1733, Дубна, 1964.
2. А. А. Корнейчук. Оценки решений линейных разностных и дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Препринт ОИЯИ, Р-1872, Дубна, 1964.
3. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
4. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. М.; Физматгиз, 1959.
5. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во ин. лит., 1958.

УДК 518:517.944/.947

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ НА «КОСЫХ» СЕТКАХ

А. А. САМАРСКИЙ, А. В. ГУЛИН

(Москва)

1. При использовании разностных схем для уравнений

$$Lu = -f, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \quad (1)$$

где Lu — эллиптический оператор общего вида,

$$Lu = \sum_{\alpha} \sum_{\beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} \right) + \sum_{\alpha=1}^p r_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} - qu, \quad (2)$$

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} > 0, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) \neq 0,$$

в случае произвольной пространственной области G изменения $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ возникают трудности, связанные с аппроксимацией на сетке смешанных производных (см. [1]).

Если коэффициенты $k_{\alpha\beta} = \text{const}$, то всегда можно избавиться от смешанных производных, вводя новые переменные

$$s_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^p b_{\alpha\beta} x_{\beta}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^p c_{\alpha\beta} s_{\beta} \quad (3)$$

и приводя квадратичную форму $\sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta} \xi_{\alpha} \xi_{\beta}$ к диагональному виду во всей области G .

Оператор Lu примет вид

$$L'u = \sum_{\alpha=1}^p \left(b_{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial s_{\alpha}^2} + \tilde{r}_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial s_{\alpha}} \right) - qu. \quad (4)$$

При этом r_{α} и q могут быть переменными. Оператор Lu содержит производные по некоторым направлениям s_{α} . Естественно вводить сетку ω_h в G по переменным s_{α} , проводя гиперплоскости $s_{\alpha}^{(i_{\alpha})} = i_{\alpha} h_{\alpha}$, $i_{\alpha} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, так что $\omega_h = \{s_i = (s_1^{(i_1)}, s_2^{(i_2)}, \dots, s_p^{(i_p)})\}$.

Эту сетку мы условно назовем косо́й сеткой. Если преобразование (3) не является ортогональным, то сетка ω_h косоугольная (при $p = 2$ — параллелограммная). На ω_h оператор (4) аппроксимируется при помощи обычных разностных схем.

2. Для двух пространственных переменных ($p = 2$) оператор (2) можно привести к каноническому виду

$$L'u = \sum_{\alpha=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial s_{\alpha}} \left(b_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial s_{\alpha}} \right) + \tilde{r}_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial s_{\alpha}} \right] - qu \quad (5)$$

во всей области G и в том случае, когда коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ являются переменными

$$k_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}(x_1, x_2), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha},$$

если только выполнено дополнительное условие

$$k_{11} - k_{22} = \mu k_{12}, \quad (6)$$

где μ — произвольная постоянная.

В самом деле, рассмотрим ортогональное преобразование (3) при $p = 2$, приводящее квадратичную форму с матрицей $(k_{\alpha\beta})$ к главным осям. Пусть $x_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 c_{\alpha\beta} s_{\beta}$ — обратное преобразование, причем $c_{11} = c_{22} = c$, $c_{12} = -c_{21} = \bar{c}$. Вычислим производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s_1} &= c \frac{\partial u}{\partial x_1} - \bar{c} \frac{\partial u}{\partial x_2}, & \frac{\partial u}{\partial s_2} &= \bar{c} \frac{\partial u}{\partial x_1} + c \frac{\partial u}{\partial x_2}, \\ L_{11}u &= \frac{\partial}{\partial s_1} \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} \right) = c^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \bar{c}^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \\ &\quad - c\bar{c} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right], \\ L_{22}u &= \frac{\partial}{\partial s_2} \left(b_2 \frac{\partial u}{\partial s_2} \right) = \bar{c}^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(b_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + c^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \\ &\quad + c\bar{c} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(b_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right], \end{aligned}$$

где b_1 и b_2 — пока не известные функции.

Приравняв выражения

$$L_{11}u + L_{22}u = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} \right),$$

получим условия для определения c , \bar{c} , b_1 и b_2 :

$$k_{11} = c^2 b_1 + \bar{c}^2 b_2, \quad k_{22} = \bar{c}^2 b_1 + c^2 b_2,$$

$$k_{12} = c\bar{c}(b_2 - b_1), \quad \bar{c}^2 + c^2 = 1. \quad (7)$$

Отсюда видно, что условие (6) необходимо и достаточно, чтобы c и \bar{c} не зависели от x . Решая уравнения (7) и выбирая корни

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4q}}{2}}, \quad c = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4q}}{2}}, \quad \text{где } q = \frac{1}{4 + \mu^2},$$

найдем

$$b_1 = \frac{k_{11} + k_{22}}{2} - \frac{k_{12}}{2\sqrt{q}} \geq 0, \quad b_2 = \frac{k_{11} + k_{22}}{2} + \frac{k_{12}}{2\sqrt{q}} \geq 0. \quad (8)$$

З а м е ч а н и е 1. Пусть $k_{11} = k_{22}$. Тогда $\mu = 0$, $q = 1/4$ и $c = 1/\sqrt{2}$, $\bar{c} = 1/\sqrt{2}$, $b_1 = k_{11} - k_{12}$, $b_2 = k_{11} + k_{12}$.

2. Пусть $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0$. Тогда

$$b_1 = \begin{cases} 0, & k_{12} > 0, \\ k_{11} + k_{22}, & k_{12} < 0; \end{cases} \quad b_2 = \begin{cases} k_{11} + k_{22}, & k_{12} > 0, \\ 0, & k_{12} < 0. \end{cases}$$

Пользуясь указанным выше ортогональным преобразованием, приводящим оператор (2) к виду (5), решение первой краевой задачи

$$Lu = -f, \quad x \in G, \quad u|_{\Gamma} = v(x) \quad (9)$$

сводим к решению той же задачи в переменных (s_1, s_2) с оператором (5), не содержащим смешанной производной. Разностная схема строится на кривой сетке $\omega_h = \{s_i \in G\}$ согласно [2]. Она монотонна и равномерно сходится со скоростью $O(|h|^2)$.

Если коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ переменные, то должно быть выполнено условие (6). Если $k_{\alpha\beta} = \text{const}$, то условие (6) выполняется автоматически.

3. Рассмотрим смешанную задачу в цилиндре $\bar{Q}_T = (G + \Gamma) \times [0 \leq t \leq T]$ для квазилинейного уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x_1, x_2, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 r_\alpha(x_1, x_2, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + f(x, t, u), \quad (10)$$

$$u|_{\Gamma} = v(x_1, x_2, t), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (11)$$

$$k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}, \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \geq 0$$

при любых $(x, t) \in \bar{Q}_T$, $|u| \leq M_0$, где M_0 — произвольная постоянная.

Если выполнено условие (6), то при помощи указанного выше поворота осей мы преобразуем уравнение (10) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha u + \tilde{f}(s, t, u), \quad (12)$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \left(b_\alpha(s, t, u) \frac{\partial u}{\partial s_\alpha} \right) + \tilde{r}_\alpha(s, t, u) \frac{\partial u}{\partial s_\alpha}, \quad \tilde{f}(s, t, u) = f(x, t, u), \quad b_\alpha \geq 0;$$

b_α выражается через $k_{\alpha\beta}$ по формулам (8).

Для решения уравнения (12) с условиями (11) мы воспользуемся локально-одномерными схемами [3], [4] на кривой пространственной сетке $\omega_h = \{s_i \in G\}$ и сетке $\omega_t = \{t^j \in (0, T), j = 0, 1, \dots\}$. Соответствующие схемы приведены в [3], [4], и нег необходимости их выписывать здесь.

Для случая несамосопряженного оператора L_α , т. е. при $r_\alpha \neq 0$, помимо схем, указанных в [3], [4], по аналогии с [2] строится монотонная локально-одномерная схема, равномерно устойчивая по правой части, граничным и начальным данным. Эта

схема равномерно сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, где h_α — шаг по направлению s_α , τ — шаг по t .

Устойчивость и сходимость доказываются при помощи принципа максимума.

При этом граничные условия на сетке ω_h ставятся одним из указанных в [3], [4] способов, обеспечивающих второй порядок точности по h (со сносом по s_α или без сноса).

Аргумент u , входящий в коэффициенты $b_\alpha(s, t, u)$, $\tilde{r}_\alpha(s, t, u)$ и правую часть $\tilde{f}(s, t, u)$, берется либо при $u = y_\alpha$ (см. [4]), либо по известному значению $u = y_{(\alpha-1)}$.

Во втором случае схема линейна относительно $y_{(\alpha)}$, в первом случае для решения системы нелинейных уравнений используется метод итераций.

4. Рассмотрим случай произвольного числа измерений. Если коэффициенты $k_{\alpha\beta} = \text{const}$, то оператор (2) приводится к нормальному виду (4) во всей области преобразованием (3). Это позволяет решать первую краевую задачу на косоугольной сетке $\omega_h = \{s, \in G\}$ при помощи монотонных схем $O(|h|^2)$, смешанную задачу для параболического уравнения $\partial u / \partial t = Lu + f$ и для гиперболического уравнения $\partial^2 u / \partial t^2 = Lu + f$ при помощи локально-одномерных схем, изученных ранее в [3] — [5].

При $p > 2$ вычислить коэффициенты ортогонального преобразования (3), вообще говоря, очень трудно. Поэтому практически можно пользоваться любым преобразованием (3) (приводящим (2) к каноническому виду (4)), коэффициенты которого легко вычисляются. Однако при этом мы будем получать косоугольные сетки, которые «сплющиваются» при уменьшении дискриминанта квадратичной формы

$\sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$. При ортогональном преобразовании сетка ω_h прямоугольна и получаемые разностные схемы пригодны даже в случае вырождения ($k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0$).

*Поступила в редакцию
2.04.1965*

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Экономичные разностные схемы для уравнений параболического типа со смешанными производными. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, 753—759.
2. А. А. Самарский. О монотонных разностных схемах для эллиптического и параболического уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, 5, № 3, 548—551.
3. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 549—565.
4. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431—466.
5. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, 638—648.

УДК 512.25/.26+519.3:330.115

АЛГОРИТМ НУМЕРАЦИИ СОЧЕТАНИЙ

В. И. МУДРОВ

(Москва)

Во многих задачах комбинаторного анализа в роли основных элементов изучаемых структур выступают сочетания. В таких случаях часто требуется установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех сочетаний из N элементов по M и отрезком $[1; (\frac{N}{M})]$ натурального ряда. Это соответствие при небольшом числе