ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 4 Ноябрь 1964 Декабрь № 6

УДК 518:517.944./947

ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

А. А. САМАРСКИЙ, В. Б. АНДРЕЕВ

(Москва)

Для уравнения Пуассона рассматривается разностная схема четвертого порядка аппроксимации на прямоугольной сетке ($h_\alpha \neq h_\beta$ при $\alpha \neq \beta$). Для задачи Дирихле в p-мерном прямоугольном параллелепипеде ($p = 2, 3$) доказывается сходимость в среднем рассматриваемых схем со скоростью $O(|h|^4)$, где

$$|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2,$$

при любом соотношении между шагами h_α. Выясняются условия, при которых принцип максимума справедлив для предложенных схем на прямоугольной сетке, и доказывается их равномерная сходимость со скоростью $O(|h|^4)$ при $p \leqslant 4$.

Рассматривается итерационный процесс переменных направлений, и изучается вопрос о выборе последовательности итерационных параметров $\{\tau_n\}$, обеспечивающих «достаточно высокую» скорость сходимости рассматриваемого процесса. Исследуется вопрос о выборе оптимальных соотношений между членами последовательности $\{\tau_n\}$, минимизирующих число итераций.

1. Пусть в p-мерном параллелепипеде

$$\bar{D}_p = \{x = (x_1, \ldots, x_p) : 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, p\}$$

с границей Γ ищется решение задачи

$$Lu \equiv \sum_{\alpha=1}^{p} {}_\alpha u = -f(x), \qquad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = g(x). \tag{2}$$

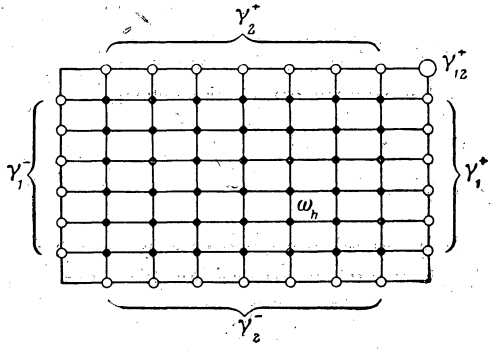
Пусть $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, \ldots, i_p h_p) \in \bar{D}_p: \quad i_\alpha = 0, \ldots, N_\alpha; \quad h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha}, \alpha = 1, \ldots, p\}$ — разностная сетка, равномерная по каждому из направлений x_α, а $\gamma = \{x_i \in \Gamma\}$ — граница сетки $\bar{\omega}_h$.

В работах [1]—[3] для задачи (1)—(2) при $p = 2, 3$ на разностной сетке $\bar{\omega}_h$ с $h_\alpha = h$, $\alpha = 1, \ldots, p$, были предложены разностные схемы четвертого порядка аппроксимации на достаточно гладком решении уравнения (1) и, в случае соизмеримости сторон параллелепипеда l_α, $\alpha = 1, \ldots, p$, доказана их равномерная сходимость со скоростью $O(h^4)$.

В работе [4] *) для этих схем был предложен один итерационный процесс переменных направлений (см. (13) при $\sigma = 1$) с числом итераций

$$\nu \asymp \nu_0 \lg \frac{1}{h} \lg \frac{1}{\varepsilon}, \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ — требуемая точность. Там же изучался вопрос о выборе оптимальных итерационных параметров $\{\tau_n\}$, минимизирующих ν_0. Доказательство оценки скорости сходимости в [4] приведено лишь для $p = 2$.



Фиг. 1

В данной работе рассматривается более общее семейство итерационных схем с

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2}, \tag{4}$$

где σ — некоторый параметр, характеризующий итерационный процесс. Предлагается «одномерная» процедура выбора итерационных параметров $\{\tau_n\}$, минимизирующих ν_0 для разностных схем 4-го порядка точности на прямоугольной сетке ($h_\alpha \neq h_\beta$ при $\alpha \neq \beta$). (Попутно оценка (3) и оптимальное значение ν_0 получаются и для схем 2-го порядка точности.)

2. Для аппроксимации задачи (1)—(2) рассмотрим следующую разностную схему **):

$$\Lambda' y + \varphi = 0, \qquad y|_\gamma = g(x), \tag{5}$$

где

$$\Lambda' = \Lambda + \frac{\theta}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \sum_{\beta \neq \alpha}^{1-p} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta, \qquad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha, \qquad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \tag{6$_\theta$}$$

$$\varphi = f + \frac{\theta}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \Lambda_\alpha f, \qquad \theta = 0,\ 1.$$

Здесь (см. [6])

$$x = x_i = (h_1 i_1, \ldots, h_p i_p),$$

$$x^{(\pm 1_\alpha)} = (h_1 i_1, \ldots, h_{\alpha-1} i_{\alpha-1},\ h_\alpha (i_\alpha \pm 1),\ h_{\alpha+1} i_{\alpha+1}, \ldots, h_p i_p),$$

$$y = y_i = y(x), \qquad y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x^{(\pm 1_\alpha)}),$$

$$y_{\bar{x}_\alpha} = (y - y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha, \qquad y_{x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/h_\alpha.$$

---

*) В [4] в замечании 1 допущена ошибка при вычислении d и φ. Должно быть

$$d = q + \frac{h^2}{12} q^2, \qquad \varphi = f + \frac{h^2}{12}(qf + Lf) \text{ и } q = \text{const}.$$

**) Схема (5) — (6^1) для $f = 0$ и $p = 2$ без обоснования сходимости была предложена в [5].

Нетрудно показать (см. также [5]), что при $\theta = 1$ схема (5)—(6_θ) (в дальнейшем схема (5)—(6_1)) имеет 4-й порядок аппроксимации по $|h|$ на классе достаточно гладких решений (1), так что

$$\psi = \Lambda' u + \varphi = O(|h|^4).$$

При $\theta = 0$ схема (5)—(6_θ) (схема (5)—(6_0)) переходит в хорошо изученную схему второго порядка точности.

Докажем, что (5)—(6_1) имеет 4-й порядок точности по $|h|$. Пусть u — решение задачи (1)—(2), y — решение задачи (5)—(6_1). Тогда для функции $z = y - u$ получим

$$\Lambda' z + \psi = 0, \qquad z|_\gamma = 0. \tag{7}$$

Нам потребуются скалярные произведения (см. [6])

$$(y, v) = \sum_{\omega_h} yvH, \quad (yv]_\alpha = \sum_{\omega_h^{+\alpha}} yvH, \quad (y, v]_{\alpha,\beta} = \sum_{\omega_h^{+\alpha+\beta}} yvH$$

и связанные с ними нормы

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}, \quad \|v_{\bar{x}_\alpha}\| = \sqrt{(v_{\bar{x}_\alpha}, v_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha}, \quad \|v_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta}\| = \sqrt{(v_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta}, v_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta}]_{\alpha,\beta}},$$

где

$$H = \prod_{\alpha=1}^{p} h_\alpha,$$

$$\gamma_\alpha^+ = \{x_i \in \Gamma : i_\alpha = N_\alpha;\ i_\beta \neq 0,\ N_\beta \text{ при } \beta \neq \alpha\},$$

$$\gamma_\alpha^- = \{x_i \in \Gamma : i_\alpha = 0;\ i_\beta \neq 0,\ N_\beta \text{ при } \beta \neq \alpha\},$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^+ = \{x_i \in \Gamma : i_\alpha = N_\alpha,\ i_\beta = N_\beta;\ i_\delta \neq 0,\ N_\delta \text{ при } \delta \neq \alpha, \beta\},$$

$$\omega_h = \bar{\omega}_h - \gamma, \qquad \omega_h^{+\alpha} = \omega_h + \gamma_\alpha^+, \qquad \omega_h^{+\alpha+\beta} = \omega_h^{+\alpha} + \gamma_\beta^+ + \gamma_{\alpha\beta}^+,$$

$$\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^+ + \gamma_\alpha^-.$$

Умножая (7) скалярно на z и применяя разностную формулу Грина (см. [6]), получим энергетическое тождество

$$I = \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \sum_{\beta \neq \alpha}^{1-p} \|z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta}\|^2 + (\psi, z), \qquad I \equiv \sum_{\alpha=1}^{p} \|z_{\bar{x}_\alpha}\|^2. \tag{8}$$

На основании лемм 2 и 3 работы [7] имеем

$$\|z\|^2 \leqslant \frac{l_\alpha^2}{4} \|z_{\bar{x}_\alpha}\|^2, \qquad \|z\|^2 \leqslant M_0 I, \qquad M_0 = \frac{1}{4} \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{l_\alpha^2} \right)^{-1},$$

$$h_\alpha^2 \|z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta}\|^2 \leqslant 4 \|z_{\bar{x}_\beta}\|^2, \qquad \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \sum_{\beta \neq \alpha}^{1\ p} \|z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta}\|^2 \leqslant \frac{p-1}{3} I. \tag{9}$$

Оценим (ψ, z):

$$(\psi, z) \leqslant \|\psi\| \|z\| \leqslant (M_0 I)^{1/2} \|\psi\| \leqslant c_0 I + \frac{M_0}{4c_0} \|\psi\|^2. \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (8) и выбирая соответствующим образом c_0, найдем

$$I \leqslant \frac{9M_0}{(4-p)^2} \|\psi\|^2,$$

или, на основании (9),

$$\|z\| \leqslant \frac{3M_0}{4-p}\|\psi\|.$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$\|\psi\| \leqslant M|h|^4,$$

то разностная схема (5)—(6_1) *при* $p \leqslant 3$ *сходится в среднем со скоростью* $O(|h|^4)$, *так что*

$$\|y-u\| \leqslant M'|h|^4, \qquad M' = M\,\frac{3M_0}{4-p},$$

где M — *положительная постоянная, не зависящая от* $|h|$.

Теорема 1 устанавливает сходимость схемы (5)—(6_1) в среднем на любой последовательности прямоугольных, равномерных по каждому направлению сеток при единственном требовании $|h| \to 0$. Если на соотношения между шагами h_α сетки $\bar{\omega}_h$ наложить некоторые ограничения, то для схемы (5)—(6_1) может быть доказана равномерная сходимость. Распишем (5)—(6_1) по точкам:

$$\frac{7-p}{3}\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{h_\alpha^2}y = \frac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{p}\left[(7-p)\frac{1}{h_\alpha^2} - \sum_{\beta\neq\alpha}^{1-p}\frac{1}{h_\beta^2}\right](y^{(+1_\alpha)}+y^{(-1_\alpha)}) + \tag{11}$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p-1}\sum_{\beta=\alpha+1}^{p}\left(\frac{1}{h_\alpha^2}+\frac{1}{h_\beta^2}\right)(y^{(+1_\alpha,+1_\beta)}+y^{(+1_\alpha,-1_\beta)}+y^{(-1_\alpha,+1_\beta)}+y^{(-1_\alpha,-1_\beta)})+\varphi.$$

Из (11) видно, что коэффициент при y в левой части равен сумме всех коэффициентов в правой части. Пусть h_α, $\alpha = 1, \ldots, p$, таковы, что все коэффициенты уравнения (11) неотрицательны, т. е.

$$(7-p)\frac{1}{h_\alpha^2} - \sum_{\beta\neq\alpha}^{1-p}\frac{1}{h_\beta^2} \geqslant 0. \tag{12}$$

Тогда для уравнения (11) имеет место принцип максимума (см. [2]) и теми же самыми рассуждениями, что и в [2], доказывается *)

Теорема 2. *Если*

$$\|\psi\|_0 = \max_{\omega_h}|\psi| \leqslant M|h|^4$$

и условия (12) *выполнены, то разностная схема* (5)—(6_1) *при* $p \leqslant 4$ *равномерно сходится со скоростью* $O(|h|^4)$, *так что*

$$\|y-u\|_0 \leqslant M'|h|^4,$$

где M' — *положительная постоянная, не зависящая от* $|h|$.

Условия (12) при $p = 2$ принимают вид $1/\sqrt{5} \leqslant h_1/h_2 \leqslant \sqrt{5}$. При $p = 3$, те значения отношений h_1^2/h_2^2 и h_1^2/h_3^2, которые удовлетворяют соотношениям (12), задаются координатами части плоскости, заключенной внутри треугольника с вершинами в точках $A(\frac{1}{3}\,\frac{1}{3})$, $B(1, 3)$, $C(3, 1)$. Если $p = 4$, то из (12) следует, что теорема 2 имеет место лишь при $h_\alpha = h$ ($\alpha = 1, \ldots, 4$), что возможно только в случае соизмеримости сторон l_α, $\alpha = 1, \ldots, 4$, области D_p.

*) В случае $p = 2$ см. [8].

Замечание 1. Если область D_p имеет соизмеримые стороны l_α, то в ней можно ввести разностную сетку $\overline{\omega}_h$ с $h_\alpha = h$, $\alpha = 1, \ldots, p$. На этой сетке задаче (1) — (2) может быть сопоставлена разностная схема

$$\Lambda^* y + \varphi^* = 0, \qquad y|_\gamma = g(x), \tag{5*}$$

где

$$\begin{gathered}\Lambda^* = \Lambda + \frac{h^2}{6}\sum_{\alpha=1}^{p-1}\sum_{\beta=\alpha+1}^{p}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta + \frac{h^4}{30}\sum_{\alpha=1}^{p-2}\sum_{\beta=\alpha+1}^{p-1}\sum_{\delta=\beta+1}^{p}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta\Lambda_\delta,\\ \varphi^* = f + \frac{h^2}{12}Lf + \frac{h^4}{360}\left(L^2 f + 2\sum_{\alpha=1}^{p-1}\sum_{\beta=\alpha+1}^{p}L_\alpha L_\beta f\right).\end{gathered} \tag{6*}$$

Схема (5*)—(6*) при $p = 2,3$ была предложена в [3], [9], и там же была доказана ее равномерная сходимость со скоростью $O(h^6)$.

3. Для приближенного решения задачи (5) — (6_θ) рассмотрим метод переменных направлений. Пусть $v = v^{(n+1)}$ есть $(n+1)$-я итерация, $\check{v} = v^{(n)}$, $\tau = \tau_n$ — итерационный параметр, который будет выбран позже, $v_{\bar{t}} = (v - \check{v})/\tau$. Производящую схему (см. [4]), связывающую v и $\check{v}$, возьмем в виде

$$Av_{\bar{t}} = \Lambda'\check{v} + \varphi, \qquad v|_\gamma = g(x), \qquad v^{(0)}(x) = v_0(x), \tag{13}$$

где

$$A = \prod_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \qquad A_\alpha = E - \sigma\tau\Lambda_\alpha, \qquad Ev = v, \qquad \sigma \geqslant \frac{1}{2},$$

а $v_0(x)$ — нулевое приближение.

В случае $\theta = 0$ схема (13) была предложена и изучена в работе [10] (см. также [11]—[13]). Для определения v из [13] можно воспользоваться одним из алгоритмов переменных направлений (см. [4], [7], [10] — [13]); некоторые из них работают лишь при $\theta = 0$. Укажем, например, алгоритм, предложенный в [7]:

$$\begin{gathered}A_1 w_{(1)} = \Lambda'\check{v} + \varphi, \qquad \Lambda_\alpha w_{(\alpha)} = w_{(\alpha-1)}, \qquad \alpha = 2, \ldots, p,\\ w_{(\alpha)} = 0 \text{ при } x \in \gamma_\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots, p, \qquad v = \check{v} + \tau w_{(p)}.\end{gathered} \tag{14}$$

Заметим, что алгоритм, предложенный в [12], следует из (14), если произвести в (14) замену $w_{(\alpha)} = (v_{(\alpha)} - \check{v})/\tau$; однако (14) экономичнее и, кроме того, $w_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, p$, всегда удовлетворяет нулевым граничным условиям.

4. Исследуем сходимость итерационного процесса (13).

Для $w = v - y$, где y — решение задачи (5) — (6_θ), а v — решение задачи (13), получим

$$Aw_{\bar{t}} = \Lambda'\check{w}, \qquad w|_\gamma = 0, \qquad w^{(0)}(x) = v_0(x) - y(x). \tag{15}$$

Для нахождения решения задачи (15) применим метод Фурье. Пусть $\mu_\alpha = \mu_{k_\alpha}(x)$ и $\lambda_\alpha = \lambda_{k_\alpha}$, $k_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha - 1$, $\alpha = 1, \ldots, p$, — собственные функции и собственные значения одномерной разностной задачи Штурма — Лиувилля

$$\Lambda_\alpha\mu_\alpha + \lambda_\alpha\mu_\alpha = 0, \qquad \mu_\alpha(0) = \mu_\alpha(l_\alpha) = 0. \tag{16}$$

Тогда задача

$$\Lambda\mu + \lambda\mu = 0, \qquad \mu|_\gamma = 0 \tag{17}$$

имеет следующее решение:

$$\mu = \mu_k(x) = \prod_{\alpha=1}^{p} \mu_{k_\alpha}(x_\alpha), \qquad \lambda = \lambda_k = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_{k_\alpha}, \qquad k = (k_1, \ldots, k_p).$$

Собственные значения задачи (16) легко находятся:

$$\lambda_{k_\alpha} = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{k_\alpha \pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \qquad k_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha - 1, \tag{18}$$

но нам в дальнейшем потребуются лишь наибольшее и наименьшее из них.

Решение задачи (16) будем искать в виде

$$w = w^{(n+1)} = \sum_k a_{k,n+1}\mu_k(x), \qquad \check{w} = \sum_k a_{k,n}\mu_k(x). \tag{19}$$

Подставляя (19) в (15) и учитывая, что функции $\mu_k(x)$ ортогональны, получим

$$a_{k,\,n+1} = \rho_{k,\,n+1} a_{k,\,n}, \tag{20}$$

где

$$\rho_{k,n+1} = 1 - \tau\left[\lambda - \frac{\theta}{12}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \sum_{\beta\neq\alpha}^{1-p} \lambda_\alpha\lambda_\beta\right] \prod_{\alpha=1}^{p} (1 + \sigma\tau\lambda_\alpha)^{-1}. \tag{21$_\theta$}$$

Из (20) находим

$$a_{k,n+1} = a_{k,\,0} \prod_{s=1}^{n+1} \rho_{k,s},$$

а отсюда и из (19)

$$w^{(n+1)} = \sum_k a_{k,0} \prod_{s=1}^{n+1} \rho_{k,s}\mu_k,$$

$$\|w^{(n+1)}\| = \left(\sum_k \left[a_{k,0} \prod_{s=1}^{n+1} \rho_{k,s}\mu_k\right]^2, 1\right)^{1/2} \leqslant R_{n+1}\|w^{(0)}\|, \tag{22}$$

где

$$R_{n+1} = \max_k \prod_{s=1}^{n+1} \rho_{k,s}. \tag{23}$$

Теорема 3. *Итерационный процесс* (13) *для* $p = 2, 3$ *при выполнении условий* (4) *сходится в среднем для любого выбора параметров* τ_n, *удовлетворяющих условию*

$$0 < c_1 \leqslant \tau_n \leqslant c_2, \tag{24}$$

где c_1 *и* c_2 — *постоянные, не зависящие от номера* n.

На основании (22) для доказательства теоремы нужно показать, что $R_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Но для этого достаточно убедиться в том, что

$$|\rho_{k,\,s}| < \rho < 1, \tag{25}$$

где ρ — постоянная, не зависящая от n, так как при этом из (23) имеем $R_{n+1} \leqslant \rho^{n+1}$. В силу (18)

$$h_\alpha^2\lambda_\alpha\lambda_\beta < 4\lambda_\beta \text{ и } \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \sum_{\beta\neq\alpha}^{1-p} \lambda_\alpha\lambda_\beta < \frac{p-1}{3}\sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha = \frac{p-1}{3}\lambda.$$

Отсюда и из (21_θ) следует, что

$$\rho_{k,s} < 1 - \left(1 + \theta\frac{1-p}{3}\right)\tau\lambda \prod_{\alpha=1}^{p} (1 + \sigma\tau\lambda_\alpha)^{-1}, \tag{26_θ}$$

$$\rho_{k,s} > 1 - \tau\lambda \prod_{\alpha=1}^{p} (1 + \sigma\tau\lambda_\alpha)^{-1} > 1 - \frac{\tau\lambda}{1+\sigma\tau\lambda}. \tag{27}$$

Воспользовавшись теперь условием (24), найдем, что

$$|\rho_{k,s}| < \rho,$$

где

$$\rho = \max\left\{\left|1 - \left(1 + \theta\frac{1-p}{3}\right)c_1\lambda \prod_{\alpha=1}^{p} (1 + \sigma c_2\lambda_\alpha)^{-1}\right|, \left|1 - \frac{c_2\lambda}{1+\sigma c_2\lambda}\right|\right\},$$

т. е. ρ не зависит от n. Принимая во внимание (4), убеждаемся, что $\rho < 1$. (Теорема 3 для $\theta = 0$ была доказана в [10].)

Замечание 2. Итерационная схема для задачи (5*)—(6*) имеет вид

$$Av_{\bar{t}} = \Lambda^{\circ}\check{v} + \varphi^*, \qquad v|_\gamma = g(x), \qquad v^{(0)}(x) = v_0(x), \tag{13*}$$

а соответствующая функция

$$\overset{*}{\rho}_{k,n+1} = 1 - \tau\left[\lambda - \frac{h^2}{6}\sum_{\alpha=1}^{p-1}\sum_{\beta=\alpha+1}^{p}\lambda_\alpha\lambda_\beta + \frac{h^4}{30}\sum_{\alpha=1}^{p-2}\sum_{\beta=\alpha+1}^{p-1}\sum_{\gamma=\beta+1}^{p}\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\right]\prod_{\alpha=1}^{p}(1+\sigma\tau\lambda_\alpha)^{-1}. \tag{21*}$$

Принимая во внимание (18), из (21*) легко видеть, что при (4) и (24) оценка для функции $\rho^*_{k,n+1}$ имеет тот же вид, что и для функции $\rho_{k,n+1}$ при $\theta = 1$. Тем самым теорема 1 имеет место и для схемы (13*).

5. Для оценки скорости сходимости (числа итераций) итерационного процесса (13) нам потребуется более тонкая оценка $|\rho_{k,n+1}|$.

Лемма 1. *Для функции* $\rho_{k,n+1}$, *определяемой соотношением* (21_θ), *при*

$$\sigma \geqslant \sigma_{p,\theta}, \qquad \sigma_{2,1} = \tfrac{5}{9}, \qquad \sigma_{3,1} = \tfrac{1}{2}, \qquad \sigma_{p,0} = \tfrac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\right] \tag{28}$$

имеет место оценка

$$|\rho_{k,n+1}| < \bar{\rho}(a), \tag{29}$$

где

$$0 < \bar{\rho}(a) = 1 - \frac{1}{\sigma}\left(1 + \theta\frac{1-p}{3}\right)\frac{pa}{(1+a)^p}, \qquad a = \frac{\sigma\tau\lambda}{p} > 0. \tag{30}$$

В самом деле, на основании теоремы о среднеарифметическом и среднегеометрическом (см. [14], стр. 29) имеем

$$\prod_{\alpha=1}^{p}(1+\sigma\tau\lambda_\alpha) \leqslant \left(1 + \frac{\sigma\tau\lambda}{p}\right)^p.$$

Отсюда и из (26_θ) находим, что

$$\rho_{k,n+1} < 1 - \left(1 + \theta\frac{1-p}{3}\right)\frac{\tau\lambda}{\left(1+\frac{\sigma\tau\lambda}{p}\right)^p} = \bar{\rho}(a)$$

при любых положительных σ_p.

Из (27) следует, что для завершения доказательства леммы 1 нам достаточно установить неравенство

$$-1+\left(1+\theta\frac{1-p}{3}\right)\frac{\tau\lambda}{\left(1+\frac{\sigma\tau\lambda}{p}\right)^p}<1-\frac{\tau\lambda}{1+\sigma\tau\lambda}. \tag{31}$$

Для этого рассмотрим функцию

$$F_{p,\theta}=2\sigma-\frac{pa}{1+pa}-\left(1+\theta\frac{1-p}{3}\right)\frac{pa}{(1+a)^p},$$

положительность которой эквивалентна неравенству (31). Преобразуем $F_{p,1}$ к виду

$$F_{2,1}=2\sigma-\frac{10}{9}+\frac{2}{9}\frac{a^3-5a^2+5a+5}{(a+1)^2(2a+1)},\qquad F_{3,1}=2\sigma-1+\frac{a^3+2a+1}{(a+1)^3(3a+1)}.$$

Отсюда положительность $F_{3,1}$ при (28) очевидна. Положительность $F_{2,1}$ при (28) эквивалентна положительности числителя, которая легко может быть установлена оценкой его минимума. При исследовании функции $F_{p,0}$ будем довольствоваться грубой оценкой. Именно, оценим отдельно $pa/(1+a)^p$ и $pa/(1+pa)$. Тогда

$$F_{p,0}>2\sigma-1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1},$$

а отсюда на основании (28) следует справедливость леммы.

Оценка функции $\rho_{k,n+1}$, устанавливаемая леммой 1, имеет место при более сильных ограничениях на σ (за исключением случая $p=3$, $\theta=1$), чем теорема 3. При $p=2$ удается получить несколько иную по сравнению с (29) оценку для $\rho_{k,n+1}$, которая справедлива при $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$.

Лемма 2. *Пусть дана функция*

$$\rho(a_1,a_2)=1-\varkappa\frac{a_1+a_2-\alpha a_1a_2}{(1+a_1)(1+a_2)},\qquad \varkappa\geqslant 0,\quad \alpha\geqslant 0,\quad a_\alpha>0.$$

Если выполнено условие

$$\varkappa\leqslant 2, \tag{32}$$

то справедливы неравенства

$$\rho(a_\alpha,a_\alpha)\geqslant 0,\qquad \rho^2(a_1,a_2)\leqslant\rho(a_1,a_1)\rho(a_2,a_2). \tag{33}$$

Первое неравенство устанавливается сразу:

$$\rho(a_\alpha,a_\alpha)\geqslant\frac{1-2(\varkappa-1)a_\alpha+a_\alpha^2}{(1+a_\alpha)^2}\geqslant 0\quad\text{при } \varkappa\leqslant 2.$$

Рассмотрим разность

$$\rho(a_1,a_1)\rho(a_2,a_2)-\rho^2(a_1,a_2)=\frac{J}{(1+a_1)^2(1+a_2)^2},$$

где

$$J=[(1+a_1)^2+\varkappa\alpha a_1^2-2\varkappa a_1][(1+a_2)^2+\varkappa\alpha a_2^2-2\varkappa a_2]-$$
$$-[(1+a_1)(1+a_2)+\varkappa\alpha a_1a_2-\varkappa(a_1+a_2)]^2.$$

Раскрывая скобки, после приведения подобных членов находим

$$J = \varkappa(2 - \varkappa + \alpha)(a_1 - a_2)^2.$$

Отсюда при выполнении условия (32) получаем (33).

Из леммы 2 немедленно следует

Лемма 3. *Если $p = 2$, то для функции $\rho_{k,\,n+1}$, определяемой соотношением* (21_θ), *при выполнении условия* (4) *имеет место оценка*

$$(\rho_{k,n+1})^2 \leqslant \prod_{\alpha=1}^{2} \bar{\rho}(a_\alpha), \tag{34}$$

где

$$\bar{\rho}(a_\alpha) = 1 - \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{\theta}{3}\right)\frac{2a_\alpha}{(1+a_\alpha)^2}, \qquad a_\alpha = \sigma\tau\lambda_\alpha. \tag{35}$$

В самом деле, из леммы 2 следует, что

$$(\rho_{k,n+1})^2 \leqslant \prod_{\alpha=1}^{2} \rho_{k_\alpha,\,n+1}, \qquad \rho_{k_\alpha,n+1} = 1 - \frac{2\tau\lambda_\alpha - \theta\frac{h_\alpha^2}{6}\tau\lambda_\alpha^2}{(1+\sigma\tau\lambda_\alpha)^2},$$

так как $\rho_{k_\alpha,n+1} > 0$ при $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$. Но на основании (18) имеем

$$\frac{h^2}{6}\tau\lambda_\alpha^2 \leqslant \frac{2}{3}\tau\lambda_\alpha \text{ и } \rho_{k_\alpha,n+1} \leqslant \bar{\rho}(a_\alpha).$$

(Эта лемма при $\theta = 0$ и $\sigma = 1$ была доказана в [12].)

Наконец, нам потребуется

Лемма 4. *Пусть даны два числа*

$$0 < m < M. \tag{36}$$

Тогда наибольшее значение функции $\bar{\rho}(a)$, определяемой соотношениями (30) *и* (35), *на отрезке $[m, M]$ равно*

$$\rho_p = \max_{m \leqslant a \leqslant M} \bar{\rho}(a) = \tag{37}$$

$$= \max\left[1 - \frac{1}{\sigma}\left(1 + \theta\frac{1-p}{3}\right)\frac{pm}{(1+m)^p},\ 1 - \frac{1}{\sigma}\left(1 + \theta\frac{1-p}{3}\right)\frac{pM}{(1+M)^p}\right].$$

В самом деле, из выражения

$$\bar{\rho}'(a) = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \theta\frac{1-p}{3}\right)p\frac{(p-1)a - 1}{(1+a)^{p+1}} = \begin{cases} \leqslant 0 & \text{при } a \leqslant \frac{1}{p-1}, \\ \geqslant 0 & \text{при } a \geqslant \frac{1}{p-1} \end{cases}$$

следует, что $\bar{\rho}(a)$ принимает наибольшее значение либо на левом, либо на правом конце интервала $[m, M]$.

6. Оценим теперь скорость сходимости итерационного процесса (13). Точнее, выберем такую последовательность итерационных параметров $\{\tau_n\}$, которая обеспечивает «достаточно высокую» скорость сходимости. Из теоремы 3 следует, что параметр τ_n может меняться в довольно широких пределах. Поэтому последовательность $\{\tau_n\}$ постараемся выбрать так, чтобы для каждого значения λ нашлось хотя бы одно значение τ такое, что $|\rho_{k,\,n+1}| < \rho < 1$, где ρ не зависит ни от n, ни от $|h|$. Тогда проведение цикла итераций (13) с данным набором параметров на основании (22)—(23) даст нам уменьшение нормы погрешности в ρ^{-1} раз. Желательно, чтобы общее число параметров в данной последовательности $\{\tau_n\}$ было не «очень велико» (очевидно, что в худшем случае можно обойтись

числом параметров, равным числу различных собственных значений λ), т. е. чтобы один параметр τ «обслуживал» не одно собственное значение, а целую серию. Именно, пусть последовательность интервалов $(\xi_{(n-1)}, \xi_{(n)})$, $n = 1, \ldots, n_0$, покрывает интервал $[\lambda_1, \lambda_{N-1}]$, причем

$$\xi_{(0)} = \lambda_1, \quad \xi_{(n_0-1)} < \lambda_{N-1}, \quad \xi_{(n_0)} \geqslant \lambda_{N-1}, \tag{38}$$

а координаты $\xi_{(n)}$ и число n_0 подлежат определению. Пусть τ_n «обслуживает» те значения λ_k, которые удовлетворяют неравенству

$$\xi_{(n-1)} \leqslant \lambda_k \leqslant \xi_{(n)}, \tag{39}$$

т. е. для k, определяемых при помощи (39), функции $\rho_{k,\, n+1}$ удовлетворяют соотношению (25) с ρ, не зависящим ни от n, ни от $|h|$. В данном случае на основании лемм 1 и 4 это означает, что

$$pm \leqslant \tau_n \sigma \xi_{(n-1)} \leqslant \tau_n \sigma \lambda_k \leqslant \tau_n \sigma \xi_{(n)} \leqslant pM,$$

где $m < M$ — положительные постоянные, не зависящие ни от n, ни от $|h|$. Если m и M выбраны, то пусть

$$pm = \sigma \tau_n \xi_{(n-1)}, \qquad pM = \sigma \tau_n \xi_{(n)}. \tag{40}$$

Тогда отсюда и из (38)

$$\xi_{(n)} = q^{-n} \lambda_1, \qquad \tau_n = \frac{pm}{\sigma} \lambda_1^{-1} q^{n-1}, \qquad q = \frac{m}{M}, \tag{41}$$

$$\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_{N-1}} \lg^{-1} q \leqslant n_0 < \lg \frac{\lambda_1}{\lambda_{N-1}} \lg^{-1} q + 1. \tag{42}$$

На основании леммы 4 из (41), (42) и (22)—(23) заключаем, что имеет место

Лемма 5. *Если проводится цикл n_0 итераций по методу* (13) *с набором параметров* $\{\tau_n\}$, *задаваемых* (41), *то при выполнении условий* (28)

$$\| z^{(n_0)} \| \leqslant \rho_p \| z^{(0)} \|, \tag{43}$$

где ρ_p определяется из (37).

Из леммы 5 без труда следует

Теорема 4. *Для того чтобы при помощи метода* (13) *уменьшить L_2 — норму погрешности $\|z^{(0)}\|$ — в $1/\varepsilon$ раз, достаточно при выполнении условий* (28) *провести цикл n_0 итераций с набором параметров* $\{\tau_n\}$, *задаваемых* (41) *k_0 раз, где n_0 определяется из* (42), *а k_0 — из* (44):

$$k_0 \geqslant \lg \varepsilon \lg^{-1} \rho_p. \tag{44}$$

При этом для общего числа итераций $\nu = n_0 k_0$ справедливо асимптотическое равенство

$$\nu \asymp \nu_0 \lg \frac{\lambda_1}{\lambda_{N-1}} \lg \varepsilon, \qquad \nu_0 = \frac{1}{\lg q \lg \rho_p}. \tag{45}$$

Замечание 3. В силу (18) имеем

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_{N-1}} = \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha}}{\sum\limits_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha}}.$$

Если $\bar{D}$ есть p-мерный куб со стороной l и сетка ω_h квадратная, т. е. $h_\alpha = h$, $\alpha = 1, \ldots, p$, то

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_{N-1}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2l} = O(h^2) \quad \text{и} \quad \lg \frac{\lambda_1}{\lambda_{N-1}} = O(\lg h).$$

Построения, используемые при доказательстве леммы 5 и теоремы 4, основаны на лемме 1 и, следовательно, справедливы лишь при выполне-

Таблица 1

p	θ	σ	ν	m	q	ρ
2	1	$\frac{1}{2}$	3.425	0.277	0.0766	0.547
		$\frac{5}{9}$	3.939	0.296	0.0710	0.601
	0	$\frac{1}{2}$	1.707	0.415	0.1719	0.171
		$\frac{3}{4}$	3.425	0.277	0.0766	0.547
3	1	$\frac{1}{2}$	10.577	0.135	0.0850	0.815
	0	$\frac{13}{18}$	4.432	0.153	0.1070	0.586

Таблица 2

p	θ	σ	ν	m	q	ρ
2	1	1	7.958	0.237	0.0563	0.793
	0	1	4.957	0.254	0.0645	0.677
3	1	1	22.258	0.128	0.0786	0.911
	0	1	6.648	0.142	0.0938	0.714

нии условий (28). При $p = 2$ на основании леммы 3 по аналогии с [11] может быть доказана

Теорема 5. *Для того чтобы в случае $p = 2$ при помощи метода* (13) *уменьшить L_2 — норму погрешности $\|z^{(0)}\|$ — в $1/\varepsilon$ раз, достаточно при любом $\sigma \geqslant 0.5$ провести цикл n_0 итераций с набором параметров*

$$\tau_n = \frac{m}{\sigma} c_* q^{n-1} \tag{46}$$

k_0 раз, где k_0 определяется из соотношения (44), *а*

$$\lg \frac{c^*}{c_*} \lg^{-1} \frac{1}{q} \leqslant n_0 < \lg \frac{c^*}{c_*} \lg^{-1} \frac{1}{q} + 1 \tag{47}$$

и

$$c_* = \min_{k_\alpha} \lambda_{k_\alpha}, \qquad c^* = \max_{k_\alpha} \lambda_{k_\alpha}.$$

При этом для общего числа итераций $\nu = n_0 k_0$ справедливо ассимптотическое равенство

$$\nu = \nu_0 \lg \frac{c^*}{c_*} \lg \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \nu_0 = \frac{1}{\lg q \lg \rho_p}. \tag{48}$$

Заметим, что в квадратной области и на квадратной сетке (46) совпадает с (41), (47) с (42) и (48) с (45).

Замечание 4. На основании замечания 1 легко проверить, что для итерационной схемы (13*) теорема 4 также имеет место.

Займемся теперь минимизацией коэффициента ν_0. Из (45) и (48) на основании (37) и (41) видно, что ν_0 при фиксированном значении θ есть функция трех переменных m, M и σ. Так как q и ρ_p всегда меньше едини-

цы, то ν_0 убывает вместе с убыванием q и ρ_p. Поэтому при фиксированном ρ_p число ν минимально, если минимально q. Но из (41) следует, что q минимально при условии, что первый и второй члены в правой части соотношения (37) совпадают, т. е. $m/(1+m)^p = M/(1+M)^p$. Отсюда

$$M_2 = \frac{1}{m}, \quad M_3 = \frac{\sqrt{(3+m)^2 + 4/m} - (3+m)}{2}.$$

Из (37) видно, что ρ_p по σ есть функция возрастающая. Поэтому для того, чтобы ν_0 было по возможности меньше, σ тоже нужно брать минимальными. После выбора M и σ величина ν_0 остается функцией лишь m и ее минимум с любой степенью точности может быть найден численно. В табл. 1 приведены численные значения параметров, входящие в ν_0, оптимальные по m для минимально возможного σ.

В табл. 2 для сравнения приведены те же параметры для $\sigma = 1$. (Значения параметров для $p = 2$ и $\theta = 0$ получены в [12], а для $p = 2, 3$ и $\theta = 1$ — в [4]. Приведенные там числа соответствуют натуральным логарифмам в (45) и (47), в то время как у нас логарифмы десятичные.)

Поступила в редакцию
8.06.1964

Цитированная литература

1. Ш. Е. Микеладзе. О численном интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1934, № 6, 819—842.
2. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. М., Изд-во АН СССР, 1936.
3. Ш. Е. Микеладзе. О численном решении дифференциального уравнения $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = f(x, y, z)$. Докл. АН СССР, 1937, **14**, № 4, 177—180.
4. А. А. Самарский, В. Б. Андреев. Об одной разностной схеме повышенного порядка точности для уравнения эллиптического типа с несколькими пространственными переменными. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 6, 1006—1013.
5. D. Greenspan. On «best» nine-point Laplace difference analogues on rectangular grids. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, **12**, № 1, 111—116.
6. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 3, 431—466.
7. А. А. Самарский. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 5, 812—840.
8. В. В. Бадагадзе. О численном решении уравнения эллиптического типа второго порядка. Сообщ. АН ГрузССР, 1963, **30**, № 6, 689—696.
9. Ш. Е. Микеладзе. О численном решении дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1938, № 2, 271—292.
10. Е. Г. Дьяконов. Решение некоторых многомерных задач математической физики при помощи метода сеток. Дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1962.
11. D. W. Peaceman, H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1955, **3**, № 1, 28—41.
12. J. Douglas, H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **82**, № 2, 421—439.
13. J. Douglas. Alternating direction methods for three space variables. Numer. Math., 1962, **4**, № 1, 41—63.
14. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. М., Изд-во ин. лит., 1948.