ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 4 Июль 1964 Август № 4

УДК 518:517.944/.947

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

В [1], [2] предложен и обоснован экономичный метод решения параболических уравнений с несколькими переменными, который был назван локально-одномерным методом.

Цель настоящей статьи — изучение локально-одномерных разностных схем для уравнений гиперболического типа в произвольной области G. Эти схемы сходятся на произвольных неравномерных сетках ω_h.

Если область G — параллелепипед, то можно построить ряд других схем, являющихся схемами расщепления [3], [4]. Впервые схемы расщепления были предложены в [3]. В [5] рассматриваются схемы расщепления повышенного порядка точности.

§ 1. Разностные схемы

1. Будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f(x, t), \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + q_\alpha(x, t)\, u, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_p)$ — точка p-мерного пространства с координатами $x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_p$. Пусть G — произвольная p-мерная ограниченная область с границей Γ, $\overline{Q}_T = (G + \Gamma) \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, $Q_T = G \times (0 < t \leqslant T]$. В цилиндре $\overline{Q}_T$ ищется решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T; \quad u|_\Gamma = u_1(x; t); \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \overline{u}_0(x).$$

Как обычно, предполагаем, что эта задача имеет единственное решение, непрерывное в замкнутой области $\overline{Q}_T$ и обладающее требуемыми по ходу изложения производными.

Относительно G используются те же предположения, что и в [1], [2].

2. Будем пользоваться теми же сетками $\omega_h^{(1)}$, $\omega_h^{(2)}$, что и в [2]. Основное

изложение проведем для сетки $\omega_h = \omega_h^{(2)}$, внутренними узлами которой являются все узлы $x_i \in G$, лежащие внутри G, а все граничные узлы $x_i \in \gamma_h$ лежат на Г. Если область G произвольна, то сетка $\omega_h^{(2)}$ неравномерна вблизи границы даже в том случае, когда основная решетка, покрывающая G, равномерна. Граничные условия на этой сетке задаются без сноса.

Сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau \in [0 \leqslant t \leqslant T]\}$, в отличие от [2], считаем равномерной.

Обозначения те же, что и в [2]. Вводим промежуточные шаги $t_{j+\alpha/p}$ и соответствующие значения $y^{j+\alpha/p} = y_\alpha$. Будем писать $y = y^{j+1}$, $\check{y} = y^j$, $\check{\check{y}} = y^{j-1}$, $\check{y}_\alpha = y^{(j-1)+\alpha/p}$, $y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau$, $y_{\bar{t}\bar{t}} = (y - 2\check{y} + \check{\check{y}})/\tau^2$, $y_{\bar{t}_\alpha} = (y_\alpha - y_{\alpha-1})/\tau$.

При построении локально-одномерных схем поступаем по аналогии с [5]: аппроксимируем отдельно операторы

$$\mathcal{P}_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (L_\alpha u + f_\alpha), \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f, \qquad \alpha = 1, \ldots, p.$$

Для аппроксимации $\partial^2 u/\partial t^2$ используются выражения

$$u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \frac{u_\alpha - 2u_{\alpha-1} + \check{\check{u}}_\alpha}{\tau^2} \sim \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (u_0 = \check{u},\ u_2 = u), \qquad p = 2, \tag{3}$$

$$u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \frac{u_\alpha - u_{\alpha-1} - u_{\alpha-2} + \check{\check{u}}_\alpha}{\tau^2} \sim \frac{2}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \ (u_{-1} = \check{u}_2,\ u_{-2} = \check{u}_1), \ p = 3. \tag{4}$$

Для аппроксимации $L_\alpha u + f_\alpha$ на ω_h воспользуемся однородной разностной схемой $\Lambda_\alpha y + \varphi_\alpha$ второго порядка аппроксимации, описанной в [2]. Коэффициенты Λ_α и φ_α будем брать в момент $\overset{*}{t}_\alpha = 0.5\,(t_{j+\alpha/p} + t_{j-1+\alpha/p})$, так что $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(\overset{*}{t}_\alpha)$, $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, \overset{*}{t}_\alpha)$.

Локально-одномерные схемы для гиперболических уравнений (1) имеют вид

$$y_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \sigma\Lambda_\alpha(y_\alpha + \check{\check{y}}_\alpha) + 2\sigma\varphi_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, p, \ p = 2, 3;$$
$$\sigma = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ при } p = 2, \\ \frac{1}{3} \text{ при } p = 3, \end{cases} \tag{5}$$

где $y_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha}$ дается одной из формул (3) или (4).

При $p = 2$ схема трехслойная, при $p = 3$ — четырехслойная. В этом отличие от параболических уравнений, для которых вид локально-одномерных схем не зависел от числа измерений.

Уравнения (5) можно записать в виде

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_\alpha)(y_\alpha + \check{y}_\alpha) = \begin{cases} 2y_{\alpha-1} + 2\sigma\tau^2\varphi_\alpha & \text{при } p = 2, \\ y_{\alpha-1} + y_{\alpha-2} + 2\sigma\tau^2\varphi_\alpha & \text{при } p = 3. \end{cases} \tag{6}$$

Для определения $y_\alpha + \check{y}_\alpha$ ($\check{y}_\alpha$ известно) надо обратить трехточечный оператор $E - \sigma\tau^2\Lambda_\alpha$, что можно сделать по формулам прогонки, пользуясь граничным условием

$$y_\alpha = u_1(x, t_{j+\alpha/p}) \quad \text{при } x \in \gamma_h^\alpha. \tag{7}$$

2*

В случае сетки $\omega_h^{(1)}$ граничное условие имеет вид

$$y_\alpha = \beta_\alpha^{\mp} y_\alpha^{(\pm 1_\alpha)} + (1 - \beta_\alpha^{\mp})\, u_{1\alpha}^{\mp} \quad \text{при } x \in \gamma_h^{\mp\alpha}$$

(см. [1], [2]). Если оператор $L_\alpha u$ содержит младшие члены $l_\alpha u = r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + q_\alpha u$, то при пользовании формулами прогонки появляется, вообще говоря, требование достаточной малости шагов сетки ω_h. Чтобы избавиться от ограничений на шаги сетки ω_h, следует, по аналогии с [2], брать младшие члены на промежуточных строках. Тогда y_α определяется после обращения оператора $E - \sigma\tau^2\Lambda_\alpha^0$, где

$$\Lambda_\alpha^0 y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} \sim L_\alpha^0 u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

что возможно при любых h_α.

Из предыдущих работ [1], [2], [6], [7] ясно, что учет младших членов лишь усложняет изложение, не меняя основных свойств изучаемых разностных схем. Поэтому в дальнейшем, без ограничения общности, можно считать $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^0$.

Начальные условия возьмем в следующей форме:

а) если $p = 2$, то

$$y(x, 0) = u_0(x), \qquad (E - \sigma\tau^2\Lambda_1)\, y^{1/2} = F_1, \qquad y^{1/2} = y\left(x, \frac{\tau}{2}\right), \tag{8}$$

$$F_1 = u_0 + 0.5\bar{u}_0\tau + \tfrac{1}{4}\tau^2\Lambda_1 u_0 + \tau^2\left[\tfrac{1}{2} f_1 - \tfrac{1}{8}(\Lambda u + f)\right]_{t=0};$$

б) если $p = 3$, то

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (E - \sigma\tau^2\Lambda_1)\, y^{1/3} = F_1, \quad (E - \sigma\tau^2\Lambda_2)(y^{2/3} + u_0) = 2y^{1/3} + F_2, \tag{9}$$

$$F_1 = u_0 + \tfrac{1}{3}\tau\bar{u}_0 + \tfrac{1}{3}\tau^2\Lambda_1 u_0 + \tau^2\left[\tfrac{2}{3} f_1 - \tfrac{1}{6}(\Lambda u + f)\right]_{t=0},$$

$$F_2 = \tau^2\left[\tfrac{2}{3} f_2 - \tfrac{1}{9}(\Lambda u + f)\right]_{t=0}.$$

Таким образом, задаче (2) мы ставим в соответствие разностную *задачу, определяемую условиями* (5), (7), (8) *или* (9). Будем называть ее *задачей* II.

3. Вычислим погрешность разностной схемы. Пусть u — решение задачи (2), y — решение задачи II. Погрешность $z_\alpha = y_\alpha - u^{j+\alpha/p}$ определяется условиями

$$z_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \sigma\Lambda_\alpha(z_\alpha + \check{z}_\alpha) + \psi_\alpha \quad \text{при } t \geqslant \tau\ (j \geqslant 1),$$

$$z_\alpha = 0, \quad x \in \gamma_h^\alpha; \qquad z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_1)\, z^{1/p} = \tau^2\psi_1 \quad \text{при } t = \frac{\tau}{p}, \quad p = 2, 3,$$

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_2)\, z^{2/3} = 2z^{1/3} + \tau^2\psi_2 \quad \text{при } p = 3,$$

где $\psi_\alpha = \sigma\Lambda_\alpha(u_\alpha + \check{u}_\alpha) - u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} + 2\sigma\varphi_\alpha$. Погрешность аппроксимации схемы есть сумма

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha.$$

Учитывая, что (см. [2])

$$\frac{1}{2}\Lambda_\alpha (u_\alpha + \check{u}_\alpha) = (L_\alpha u)_{t=t_\alpha^*} + (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_\alpha^2),$$

где $\mu_\alpha = O(h_\alpha^2)$, можно написать

$$\psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \overset{*}{\psi}_\alpha, \quad \overset{\circ}{\psi}_\alpha = 2\sigma\left[L_\alpha u - \frac{1}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f_\alpha\right]^{(j-0.5)+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, \ldots, p.$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_\alpha = O(\tau), \qquad \psi_\alpha^* = (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_\alpha^2 + \tau^2), \qquad \mu_\alpha = O(h_\alpha^2).$$

В случае $p = 2$ имеем $\overset{\circ}{\psi}_2 + 2\overset{\circ}{\psi}_1 + \check{\overset{\circ}{\psi}}_1 = O(\tau^2)$.

Перейдем к выяснению вопроса об устойчивости и сходимости схемы II.

§ 2. Сходимость разностных схем

1. Рассмотрим отдельно случаи $p = 2$, $p = 3$.

Будем пользоваться скалярными произведениями и нормами, введенными в [2]:

$$(y, z) = \sum_{\omega_h} yzH, \qquad \|y\|^2 = (y, y) \text{ и т. д.}, \tag{10}$$

где

$$H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha, \qquad \hbar_\alpha = 0.5\,(h_\alpha + h_{\alpha+}).$$

Относительно Λ_α используется лишь одно предположение

$$\begin{gathered}(-\Lambda_\alpha (z_\alpha + \check{z}_\alpha),\ z_\alpha - \check{z}_\alpha) \geqslant I_\alpha - (1 + c_*\tau)\,\check{I}_\alpha,\\ I_\alpha \geqslant c_1 \|z_\alpha\|^2,\end{gathered} \tag{11}$$

где c_*, c_1 — положительные постоянные, не зависящие от сетки. Нетрудно убедиться в том, что схема $\overset{\circ}{\Lambda}_\alpha z = (a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}$ удовлетворяет этим требованиям, если $z|_{\gamma_h^\alpha} = 0$ и $a_\alpha = a_\alpha(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица по t. В дальнейшем будем предполагать условия (11) выполненными, не конкретизируя при этом вид Λ_α.

2. Пусть $p = 2$. Рассмотрим задачу

$$z_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \sigma\Lambda_\alpha (z_\alpha + \check{z}_\alpha) + \psi_\alpha, \tag{12}$$

$$z(x, 0) = 0, \qquad \frac{1}{\tau} z_{\bar{t}_1} = \sigma\Lambda_1 z_1 + \psi_1 \text{ при } t = \frac{\tau}{2}, \tag{13}$$

$$z_\alpha = 0 \qquad \text{при } x \in \gamma_h^\alpha,\ t \in \omega_\tau, \quad \alpha = 1, 2. \tag{14}$$

Умножим (12) скалярно на $\tau(z_{\bar{t}_\alpha} + z_{\bar{t}_{\alpha-1}}) = z_\alpha - \check{z}_\alpha = \tau(z_\alpha)_{\bar{t}}$ и воспользуемся условием (11):

$$\begin{gathered}\|z_{\bar{t}_\alpha}\|^2 + \sigma I_\alpha \leqslant \|z_{\bar{t}_{\alpha-1}}\|^2 + \sigma(1 + c_*\tau)\,\check{I}_\alpha + \tau(\psi_\alpha, (z_\alpha)_{\bar{t}}),\\ \|z_{\bar{t}_1}\|^2 + \sigma I_1 \leqslant \tau(\psi_1, z_{\bar{t}_1}).\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь ψ_α имеют вид, указанный в § 1. Для дальнейшего удобнее считать

$$\psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*, \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0;$$
$$\psi_\alpha^* = (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_\alpha^2) + O(\tau), \qquad \mu_\alpha = O(h_\alpha^2). \tag{16}$$

Решение задачи (12) — (14) представим в виде суммы $z = \xi + v$, где ξ — решение задачи (12) — (14) с правой частью $\psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha$, а v — решение той же задачи с правой частью $\psi_\alpha = \psi_\alpha^*$. Напишем энергетическое неравенство для ξ:

$$\| \xi_{\bar{t}_\alpha} \|^2 + \sigma I_\alpha [\xi] \leqslant \| \xi_{\bar{t}_{\alpha-1}} \|^2 + \sigma (1 + c_* \tau) \check{I}_\alpha [\xi] + \tau (\mathring{\psi}_\alpha, (\xi_\alpha)_{\bar{t}}).$$

Просуммируем по $\alpha = 1, 2$ и учтем, что

$$\tau \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathring{\psi}_\alpha, (\xi_\alpha)_{\bar{t}}) = \tau^2 (\mathring{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2 \bar{t}}) = \tau^2 (\mathring{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2})_{\bar{t}} - \tau^2 (\mathring{\psi}_{2\bar{t}}, \check{\xi}_{\bar{t}_2}) \leqslant$$
$$\leqslant \tau^2 (\mathring{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2})_{\bar{t}} + c_* \tau \| \check{\xi}_{\bar{t}_2} \|^2 + \frac{\tau^3}{4c_*} \| \mathring{\psi}_{2\bar{t}} \|^2.$$

Тогда получим

$$\| \xi \|_*^2 = \| \xi_{\bar{t}_2} \|^2 + \sigma (I_2 + I_1) \leqslant (1 + c_* \tau) \| \check{\xi} \|_*^2 + \tau^2 (\mathring{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2})_{\bar{t}} + \frac{\tau^3}{4c_*} \| \mathring{\psi}_{2\bar{t}} \|^2.$$

Пользуясь леммой 4 из [6] и неравенством

$$\tau (\mathring{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2}) \leqslant c_0 \| \xi_{\bar{t}_2} \|^2 + \frac{\tau^2}{4c_0} \| \mathring{\psi}_2 \|^2 \leqslant c_0 \| \xi \|_*^2 + \frac{\tau^2}{4c_0} \| \mathring{\psi}_2 \|^2,$$

будем иметь

$$\| \xi^{j+1} \|_*^2 \leqslant M_1 \| \xi^1 \|_*^2 + M_2 \max_{\omega_\tau} (\| \mathring{\psi}_2 \|^2 + \| \mathring{\psi}_{2\bar{t}} \|^2) \tau^2 \qquad (c_0, M_1, M_2 = \text{const} > 0).$$

Присоединяя сюда неравенства

$$\| \xi^1 \|_*^2 \leqslant \tau (\mathring{\psi}_2, (\xi_2)_{\bar{t}}) + \tau (\mathring{\psi}_1, \xi_{\bar{t}_1}) = \tau (\mathring{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2}) \leqslant$$
$$\leqslant 0.5 \tau^2 \| \mathring{\psi}_2^1 \|^2 + 0.5 \| \xi_{\bar{t}_2} \|^2 \leqslant 0.5 \tau^2 \| \mathring{\psi}_2^1 \|^2 + 0.5 \| \xi^1 \|_*^2 \quad \text{при } t = \tau,$$
$$\| \xi^1 \|_*^2 \leqslant \tau^2 \| \mathring{\psi}_2^1 \|^2,$$

получим

$$\| \xi^{j+1} \|_*^2 \leqslant M_1 \tau^2 \max_{\omega_\tau} \| \mathring{\Psi} \|^2, \qquad \| \mathring{\Psi} \|^2 = \| \mathring{\psi}_2 \|^2 + \| \mathring{\psi}_{2\bar{t}} \|^2.$$

Отсюда и из (11) следует

$$\| \xi^{j+1} \| \leqslant M \tau \max_{\omega_\tau} \| \mathring{\Psi} \|. \tag{17}$$

Обратимся теперь к оценке v. Напишем для v неравенство (15) и оценим:

$$\tau (\psi_\alpha^*, (v_\alpha)_{\bar{t}}) = \tau (\psi_\alpha^*, v_\alpha)_{\bar{t}} - \tau (\psi_{\alpha \bar{t}}^*, \check{v}_\alpha) \leqslant \tau (\psi_\alpha^*, v_\alpha)_{\bar{t}} + \frac{c_0 \tau}{2c_1} \check{I}_\alpha [v] + \frac{\tau}{2c_0} \| \psi_{\alpha \bar{t}}^* \|^2,$$
$$(\psi_\alpha^*, v_\alpha) \leqslant \frac{c_0}{2} \| v_\alpha \|^2 + \frac{1}{2c_0} \| \psi_\alpha^* \|^2 \leqslant \frac{c_0}{2c_1} I_\alpha + \frac{1}{2c_0} \| \psi_\alpha^* \|^2.$$

Подставим эти оценки в (15):

$$\| v \|_*^2 \leqslant (1 + M_1\tau) \| \check{v} \|_*^2 + M_2\tau \sum_{\alpha=1}^{2} \| \psi_{\alpha\bar{t}}^* \|^2 + \tau \sum_{\alpha=1}^{2} (\psi_\alpha^*, v_\alpha)_{\bar{t}}. \tag{18}$$

Учтем уравнения при $t = 0.5\,\tau$ и $t = \tau$. После обычных рассуждений получим априорную оценку вида

$$\| v_{\bar{t}_2}^{j+1} \|^2 + \| v^{j+1} \|^2 \leqslant M \max_{\omega_\tau} \| \Psi^* \|^2, \tag{19}$$

где

$$\| \Psi^* \|^2 = \sum_{\alpha=1}^{2} (\| \psi_\alpha^* \|^2 + \| \psi_{\alpha\bar{t}}^* \|^2). \tag{20}$$

Оценка ψ_α^* в норме $\| \psi_\alpha^* \|^2$ слишком груба из-за слагаемого $(\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha}$, которое появляется на неравномерной сетке. Поэтому необходимо ввести норму $\| \psi_\alpha \|_{3_\alpha}$ (см. [2]).

Для этого условия (11) заменим условиями

$$(-\Lambda_\alpha (z_\alpha + \check{z}_\alpha),\ z_\alpha - \check{z}_\alpha) \geqslant I_\alpha - (1 + c_0\tau)\, \check{I}_\alpha,\ I_\alpha \geqslant \frac{1}{c_2^2} \| z_{\bar{x}_\alpha} \|^2, \tag{21}$$

что дает (см. [2])

$$(z_\alpha, \psi_\alpha^*) \leqslant c_2 I_\alpha^{1/2} \| \psi_\alpha^* \|_{3_\alpha}. \tag{22}$$

В результате вместо (19) получим оценку

$$\| v_{\bar{t}_2}^{j+1} \|^2 + \| v^{j+1} \|^2 \leqslant M \max_{\omega_\tau} \| \Psi^* \|_3^2, \tag{23}$$

где

$$\| \Psi^* \|_3^2 = \sum_{\alpha=1}^{2} [\| \psi_\alpha^* \|_{3_\alpha}^2 + \| (\psi_\alpha^*)_{\bar{t}} \|_{3_\alpha}^2].$$

3. Тем самым доказана

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия* (11) *и* (16), *то для решения задачи* (12) — (14) *справедлива оценка*

$$\| z^{j+1} \| + \| z_{\bar{t}}^{j+1} \| \leqslant M_1\tau \max_{\omega_\tau} \| \mathring{\Psi} \| + M_2 \max_{\omega_\tau} \| \Psi^* \|. \tag{24}$$

Если выполнены условия (21) *и* (16), *то справедлива априорная оценка*

$$\| z^{j+1} \| + \| z_{\bar{t}}^{j+1} \| \leqslant M_1\tau \max_{\omega_\tau} \| \mathring{\Psi} \| + M_2 \max_{\omega_\tau} \| \Psi^* \|_3, \tag{24'}$$

где M_1, M_2 — *положительные постоянные, не зависящие от сетки.*

Отсюда и из (16) следует

Т е о р е м а 2. *Схема* II *при* $p = 2$ *сходится со скоростью* $O(\| h^2 \| + \tau)$ *на произвольной последовательности сеток* $\omega_h \times \omega_\tau$:

$$\| y^{j+\alpha/2} - u^{j+\alpha/2} \| = O(\| h^2 \| + \tau), \qquad \| h^2 \| = \sum_{\alpha=1}^{2} \| h_\alpha^2 \|, \qquad \alpha = 1, 2, \tag{25}$$

если выполнены условия (21) *и условия, обеспечивающие максимальный порядок аппроксимации:* $\| \mathring{\Psi} \| = O(1)$, $\| \Psi^* \|_3 = O(\| h^2 \| + \tau)$.

З а м е ч а н и е. Если оператор L_α (и, следовательно, Λ_α) содержит младшие члены, то условия (11) и (21) выполняются лишь при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$. Поэтому и оценки теоремы 1 будут верны при $\tau \leqslant \tau_0$.

4. Оценка порядка точности, даваемая теоремой 2, вообще говоря, является заниженной. Если область G — прямоугольник, то наша схема имеет второй порядок точности на произвольной неравномерной сетке ω_h:

$$\| y^{j+1} - u^{j+1} \| = O (\| h^2 \| + \tau^2) \quad \text{при } \tau \leqslant \tau_0. \tag{26}$$

Перепишем уравнение (6) в виде

$$A_\alpha (y_\alpha + \check{y}_\alpha) = 2y_{\alpha-1} + 0.5\tau^2 \varphi_\alpha, \qquad A_\alpha = E - \sigma\tau^2\Lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \tag{27}$$

Из уравнений $A_1 (y_1 + \check{y}_1) = 2\check{y} + 0.5 \tau^2\varphi_1$, $A_2 (y + \check{y}) = 2y_1 + 0.5\tau^2\varphi_2$, $\check{A}_2 (\check{y} + \check{\check{y}}) = 2\check{y}_1 + 0.5\tau^2\check{\varphi}_2$ исключим y_1 и $\check{y}_1$:

$$A_1A_2 (y + \check{y}) + A_1\check{A}_2 (\check{y} + \check{\check{y}}) = 4\check{y} + \tau^2\Phi; \qquad \Phi = \varphi_1 + 0.5A_1 (\varphi_2 + \check{\varphi}_2). \tag{28}$$

Уравнения (27) пишутся вдоль границ и служат для определения граничных условий при $t = t_{j+1/2}$ через граничные условия при $t = t_{j+1}$ и $t = t_j$. В этом состоит отличие от прежней формулировки (7) граничных условий.

При $t = \tau$ получим уравнение

$$A_1A_2 (y + \check{y}) = 2\check{y} + \tau^2\Phi_1 + \tau\bar{u}_0, \quad \Phi_1 = 2\varphi_1 + A_1\varphi_2. \tag{29}$$

Перепишем уравнения (28) и (29) в виде

$$y_{\bar{t}t} = \sigma(\Lambda_1 + \Lambda_2)(y + \check{y}) + \sigma (\Lambda_1 + \check{\Lambda}_2) (\check{y} + \check{\check{y}}) - \sigma^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2 (y + \check{y}) - \tag{30}$$
$$- \sigma^2\tau^2\Lambda_1\check{\Lambda}_2 (\check{y} + \check{\check{y}}) + \Phi \quad \text{при } t > \tau,$$

$$\frac{1}{\tau} (y_{\bar{t}} - 0.5 \bar{u}_0) = \sigma (\Lambda_1 + \Lambda_2) (y + \check{y}) - \sigma^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2 (y + \check{y}) + \Phi_1, \quad t = \tau, \tag{31}$$

$$y|_{\gamma_h} = u_1, \qquad y (x, 0) = u_0 (x). \tag{32}$$

Отсюда видно, что схему (27) нужно трактовать как схему расщепления в случае простейшей области. Для $z = y - u$ получим условия

$$z_{\bar{t}t} = \sigma (\Lambda_1 + \Lambda_2) (z + \check{z}) + \sigma (\Lambda_1 + \check{\Lambda}_2) (\check{z} + \check{\check{z}}) - \sigma^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2 (z + \check{z}) - \tag{33}$$
$$- \sigma^2\tau^2\Lambda_1\check{\Lambda}_2 (\check{z} + \check{\check{z}}) + \Psi \quad \text{при } t > \tau,$$

$$\frac{1}{\tau} z_{\bar{t}} = \sigma (\Lambda_1 + \Lambda_2) (z + \check{z}) - \sigma^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2 (z + \check{z}) + \Psi, \quad t = \tau, \tag{34}$$

$$z (x, 0) = 0, \qquad z (x, t)|_{\gamma_h} = 0. \tag{35}$$

Погрешность аппроксимации $\Psi = O (| h |^2 + \tau^2)$ при $t > \tau$ и $\Psi = O (| h |^2 + \tau)$ при $t = \tau$.

Пользуясь приемами, развитыми в [2], [5], нетрудно получить методом энергетических неравенств априорную оценку вида

$$\| z^{j+1} \| \leqslant M \max_{\omega_\tau} (\| \Psi \|_3 + \| \Psi_{\bar{t}} \|_3), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad \| z^1 \| \leqslant M_\tau \| \Psi^1 \|_3, \tag{36}$$

которая верна при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$. Отсюда и следует (26). Для получения энергетического тождества надо (33) умножить скалярно на $\tau (z + \check{z})_{\bar{t}}$ (при $t > \tau$) и (34) на $\tau z_{\bar{t}}$ (при $t = \tau$) и воспользоваться явным выражением для $\Lambda_\alpha z = (a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + b_\alpha^+ z_{\hat{x}_\alpha} + b_\alpha^- z_{\check{x}_\alpha} + d_\alpha z$ (см. [2]), предполагая, что $|(a_\alpha)_{\bar t}|$, $|(a_\alpha)_{\bar x_\beta}|$ (α, $\beta = 1, 2$) ограничены. Нет необходимости воспроизводить доказательство оценки (36), а также останавливаться на условиях, при которых схема (30) — (32) имеет максимальную погрешность аппроксимации.

5. Если рассматривать равномерную по каждому из переменных x_1 и x_2 сетку $\omega_h^{(1)}$, введенную в [1], [2], то можно показать, что для решения задачи II при $p = 2$ в произвольной области G справедлива оценка

$$\|y - u\|^{j+1} = O(|h|^2) + O(\tau^2 h_1^{-1/2}), \qquad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2. \tag{37}$$

Укажем основные моменты вывода этой оценки. Прежде всего представим ψ_α в виде

$$\psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \overset{*}{\psi}_\alpha, \quad \text{где } \overset{\circ}{\psi}_1 = -0.5\,(\overset{\circ}{\psi}_2 + \check{\overset{\circ}{\psi}}_2), \ \overset{\circ}{\psi}_2 = O(1), \tag{38}$$

так что

$$\overset{*}{\psi}_\alpha = O(\tau^2) + O(h_\alpha^2) \quad \text{при } t > \tau, \qquad \overset{*}{\psi}_1 = O(\tau) + O(h_1^2) \quad \text{при } t = \tau/2. \tag{39}$$

Решение задачи (12) — (14) по аналогии с [1] ищется в виде суммы

$$z = \eta + v, \tag{40}$$

где η определяется из условий

$$\eta_{\bar t_\alpha \bar t_\alpha} = \overset{\circ}{\psi}_\alpha, \qquad \eta(x, 0) = 0, \qquad \eta(x, \tau) = 0, \tag{41}$$

так что $\eta_2 - 2\eta_1 + \check\eta_2 = \tau^2 \overset{\circ}{\psi}_2$, $\quad \eta_1 - 2\check\eta + \check\eta_1 = -0.5\,\tau^2 (\check{\overset{\circ}{\psi}}_2 + \check{\check{\overset{\circ}{\psi}}}_2)$, $\check\eta - 2\check\eta_1 + \check{\check\eta}_2 = \tau^2 \check{\overset{\circ}{\psi}}_2$. Исключим отсюда η_1 и $\check\eta_1$: $\eta - 2\check\eta + \check{\check\eta} = 0$ и, в силу (41), $\eta^j = 0$ для всех $j = 0, 1, \ldots$. Уравнение (41) при $\alpha = 2$ сразу дает

$$\eta^{j+1/2} = -0.5\,\tau^2 \overset{\circ}{\psi}{}_2^{j+1} = O(\tau^2).$$

Доопределим η в точках γ_h^1 по аналогии с [1], так, чтобы $\Lambda_1 \eta = O(\eta)$ вблизи границы. Для сеточной функции v получим условия

$$\left.\begin{aligned}
&v_{\bar t_\alpha \bar t_\alpha} = \sigma\Lambda_\alpha (v_\alpha + \check v_\alpha) + \Psi_\alpha, \qquad \Psi_\alpha = \overset{*}{\psi}_\alpha + \sigma\Lambda_\alpha (\eta_\alpha + \check\eta_\alpha)\,\delta_{\alpha,1}, \quad \alpha = 1, 2,\\
&v = \beta_\alpha^\pm v^{(\mp 1_\alpha)} + \nu_\alpha^\pm, \qquad \nu_\alpha^\pm = O(h_\alpha^2) + O(\eta)\,\delta_{\alpha,1} \quad \text{при } x \in \gamma_h^{\pm\alpha} \ (\text{см. [2]}),\\
&v(x, 0) = 0, \qquad (E - \sigma\tau^2\Lambda_1)\, v\left(x, \frac{\tau}{2}\right) = \tau^2 \Psi_1, \qquad \Psi_1 = \overset{*}{\psi}_1 + \sigma\Lambda_1 \eta^1,\\
&\qquad \text{или} \quad \frac{1}{\tau} v_{\bar t_1} = \sigma\Lambda_1 v_1 + \Psi_1, \qquad \overset{*}{\psi}_1 = O(\tau + h_1^2).
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Так как v удовлетворяет неоднородным граничным условиям, то пользоваться (11) и (21) нельзя. Нужно конкретное выражение для Λ_1. Рассуждения достаточно провести для отрезка (для одной цепочки $ц_1$), опуская суммирование по x_2. Множитель $h_1^{-1/2}$ появляется из-за неоднородности граничных условий и необходимости пользоваться неравенствами типа

$$\nu_{\bar t} v_{\bar x_1} \leqslant \frac{1}{2c_0} \left(\frac{\nu_{\bar t}}{\sqrt{h_1}}\right)^2 + \frac{c_0}{2} v_{\bar x_1}^2 h_1, \qquad c_0 = \text{const} > 0.$$

В [1] мы оценивали v при помощи принципа максимума. Если же воспользоваться и там энергетическим методом, то вместо оценки $\|v\|_0 = O(\tau)$ получим оценку $\|v\| = O(\tau/\sqrt{h_1})$.

Поэтому можно надеяться, что появление множителя $h_1^{-1/2}$ в (37) связано с методом доказательства.

6. Перейдем теперь к трехмерной задаче ($p = 3$):

$$z_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \frac{1}{\tau}(w_\alpha - w_{\alpha-2}) = \sigma\Lambda_\alpha(z_\alpha + \check{z}_\alpha) + \psi_\alpha, \qquad t \geqslant \tau, \tag{43}$$

$$\frac{1}{\tau} w_1 = \sigma\Lambda_1 z_1 + \psi_1 \quad \text{при } t = \tau/3, \tag{44}$$

$$\frac{1}{\tau}(w_2 - w_1) = \sigma\Lambda_2 z_2 + \psi_2 \quad \text{при } t = \frac{2\tau}{3}; \tag{45}$$

$$z(x, 0) = 0, \quad \text{при } x \in \omega_h, \qquad z_\alpha = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_h^\alpha, \tag{46}$$

где

$$w_\alpha = z_{\bar{t}_\alpha} = (z_\alpha - z_{\alpha-1})/\tau. \tag{47}$$

Для получения энергетического неравенства умножим уравнение (43) на $z_\alpha - \check{z}_\alpha$ и учтем (11). Справедлива формула

$$(z_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha}, z_\alpha - \check{z}_\alpha) = \| z_{\bar{t}_\alpha} \|_*^2 - \| z_{\bar{t}_{\alpha-1}} \|_*^2, \tag{48}$$

где

$$\| z_{\bar{t}_\alpha} \|_*^2 = \| w_\alpha \|^2 + (w_\alpha, w_{\alpha-1}) + \| w_{\alpha-1} \|^2. \tag{49}$$

В самом деле, $z_\alpha - \check{z}_\alpha = \tau(w_\alpha + w_{\alpha-1} + w_{\alpha-2})$ и $(z_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha}, z_\alpha - \check{z}_\alpha) = (w_\alpha - w_{\alpha-2}, w_\alpha + w_{\alpha-1} + w_{\alpha-2}) = [\|w_\alpha\|^2 + (w_\alpha, w_{\alpha-1})] - [\|w_{\alpha-2}\|^2 + (w_{\alpha-1}, w_{\alpha-2})] = \| z_{\bar{t}_\alpha} \|_*^2 - \| z_{\bar{t}_{\alpha-1}} \|_*^2$, если прибавить и вычесть $\|w_{\alpha-1}\|^2$. Справедлива оценка

$$(\psi_\alpha, z_\alpha - \check{z}_\alpha) = \tau(\psi_\alpha, z_\alpha)_{\bar{t}} - \tau(\psi_{\alpha\bar{t}}, \check{z}_\alpha) \leqslant \tau(\psi_\alpha, z_\alpha)_{\bar{t}} + 0.5 c_2 \tau \check{I}_\alpha + 0.5(\tau/c_2)\| \psi_\alpha \|_{3_\alpha}, \tag{50}$$

если выполнено условие (21).

Напишем энергетическое неравенство $\| z_{\bar{t}_\alpha} \|_*^2 + \sigma I_\alpha \leqslant \| z_{\bar{t}_{\alpha-1}} \|_*^2 + (1 + c_*\tau)\sigma \check{I}_\alpha + \tau(\psi_\alpha, (z_\alpha)_{\bar{t}})$. Суммирование по $\alpha = 1, 2, 3$ дает

$$\| z_{\bar{t}_3} \|_*^2 + \sigma I \leqslant \| \check{z}_{\bar{t}_3} \|_*^2 + (1 + c_*\tau)\sigma \check{I} + \tau \sum_{\alpha=1}^{3} (\psi_\alpha, (z_\alpha)_{\bar{t}}), \tag{51}$$

где

$$\overset{\circ}{I} = \sum_{\alpha=1}^{3} I_\alpha.$$

Заметим, что $\| z_{\bar{t}_\alpha} \|_*^2 \geqslant \frac{1}{2}(\| z_{\bar{t}_\alpha} \|^2 + \| z_{\bar{t}_{\alpha-1}} \|^2)$.

По аналогии со случаем $p = 2$ представим z в виде суммы

$$z = \xi + v,$$

где ξ — решение задачи с правой частью $\psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha$, причем

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0.$$

Для оценки ξ воспользуемся неравенством (51), заменив в нем z на ξ, а ψ_α на $\mathring{\psi}_\alpha$. Условие $\mathring{\psi}_1 + \mathring{\psi}_2 + \mathring{\psi}_3 = 0$ дает

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \tau\,(\mathring{\psi}_\alpha, (z_\alpha)_{\bar{t}}) = \tau^2\,[(\mathring{\psi}_3, z_{\bar{t}_3\bar{t}}) - (\mathring{\psi}_1, z_{\bar{t}_2\bar{t}})] = \tau^2\,[(\mathring{\psi}_3, z_{\bar{t}_3}) - (\mathring{\psi}_1, z_{\bar{t}_2})]_{\bar{t}} - \tau^2\,[(\mathring{\psi}_{3\bar{t}}, \check{z}_{\bar{t}_3}) - (\mathring{\psi}_{1\bar{t}}, \check{z}_{\bar{t}_2})] \leqslant \tau^2\,[(\mathring{\psi}_3, z_{\bar{t}_3}) - (\mathring{\psi}_1, z_{\bar{t}_2})]_{\bar{t}} + \tau c_*\|\check{z}_{\bar{t}_\alpha}\|_*^2 + 0.5\,\frac{\tau^3}{c_*}\,[\|\mathring{\psi}_{1\bar{t}}\|^2 + \|\mathring{\psi}_{3\bar{t}}\|^2].$$

Энергетическое неравенство примет вид

$$\|z_{\bar{t}_3}\|_*^2 + \sigma I \leqslant (1 + c_*\tau)\,(\|\check{z}_{\bar{t}_3}\|_*^2 + \sigma \check{I}) + \tau^2\,[(\mathring{\psi}_3, z_{\bar{t}_3}) - (\mathring{\psi}_1, z_{\bar{t}_2})]_{\bar{t}} + 0.5\,\frac{\tau^3}{c_*}\,[\|\mathring{\psi}_{1\bar{t}}\|^2 + \|\mathring{\psi}_{3\bar{t}}\|^2]. \tag{52}$$

Проводя стандартные рассуждения, учитывая неравенства при $t = \tau/3$, $t = 2\tau/3$ и оценку

$$\tau\,[(\mathring{\psi}_3, z_{\bar{t}_3}) - (\mathring{\psi}_1, z_{\bar{t}_2})] \leqslant 0.5\|z_{\bar{t}_3}\|_*^2 + 0.5\tau^2(\|\mathring{\psi}_1\|^2 + \|\mathring{\psi}_3\|^2),$$

убеждаемся в том, что справедлива оценка

$$\|\xi^{j+1}\| \leqslant M\tau \max_{\omega_\tau}\|\mathring{\Psi}\|, \qquad \|\mathring{\Psi}\|^2 = \|\mathring{\psi}_1\|^2 + \|\mathring{\psi}_3\|^2 + \|\mathring{\psi}_{1\bar{t}}\|^2 + \|\mathring{\psi}_{3\bar{t}}\|^2, \tag{53}$$

где M — положительная постоянная, зависящая от c_1, c_*, c_2. При выводе априорной оценки для v используется неравенство (51).

В результате мы убеждаемся, что и для $p = 3$ теорема 1 и теорема 2 сохраняют силу.

7. Если область G — параллелепипед, то можно построить большое число экономичных схем, имеющих точность $O(|h|^2 + \tau^2)$. В [5] даже построена схема $O(|h|^4 + \tau^2)$. Мы не имеем возможности подробно останавливаться на схемах расщепления здесь. Отметим лишь различные варианты производящих схем. Пишется сначала исходная схема

$$y_{\bar{t}t} = 0.5\Lambda\,(y + \check{\check{y}}) + \varphi, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha.$$

Заменяя оператор $E - 0.5\tau^2\Lambda$ произведением $\prod_{\alpha=1}^{p}(E - 0.5\tau^2\Lambda_\alpha)$, можно получить следующие производящие схемы:

$$Ay_{\bar{t}} = \check{y}_{\bar{t}} + 0.5\tau\Lambda\,(\check{y} + \check{\check{y}}) + \tau\varphi, \qquad A = \prod_{\alpha=1}^{p} A_\alpha,\ A_\alpha = E - 0.5\tau^2\Lambda_\alpha,$$

$$Ay_{\mathring{t}} = \check{y}_{\bar{t}} + 0.5\tau\Lambda\check{y} + 0.5\tau\varphi, \qquad y_{\mathring{t}} = 0.5\,(y_{\bar{t}} + \check{y}_{\bar{t}}), \quad Ay = 2\check{y} - \check{\check{y}} + \tau^2\varphi.$$

Для каждой из них можно предложить ряд вычислительных алгоритмов переменных направлений. Столь большое число алгоритмов расщепления вызывает необходимость в сравнении различных алгоритмов по экономичности, простоте и т. д.

В отличие от локально-одномерных схем схемы расщепления, вообще говоря, устойчивы лишь при достаточно малом τ, что на практике может приводить к занижению шага τ, не вызываемому требованиями точности, и к завышению объема вычислений.

8. Для системы уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha \mathbf{u}, \qquad L_\alpha \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha (x, t) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_\alpha}\right),$$

где $k_\alpha = (k_\alpha^{is})$ — симметричная положительно определенная матрица $n \times n$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, могут быть написаны экономичные локально-одномерные схемы по аналогии с [1]. Рассмотрим, например, случай $p = 2$. Матрицу k_α представим в виде суммы треугольных матриц $k_\alpha = k_\alpha^- + k_\alpha^+$, причем $(k_\alpha^-)^{ii} = (k_\alpha^+)^{ii} = 0.5 k_\alpha^{ii}$, так что k_α^- и k_α^+ — сопряженные матрицы. Тогда

$$L_\alpha \mathbf{u} = L_\alpha^- \mathbf{u} + L_\alpha^+ \mathbf{u}$$

и, соответственно, $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^- + \Lambda_\alpha^+$.

Простейшая локально-одномерная схема имеет вид

$$\mathbf{y}_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = 2\sigma (\Lambda_\alpha^- \mathbf{y}_\alpha + \Lambda_\alpha^+ \check{\mathbf{y}}_\alpha).$$

Определение вектора $\mathbf{y}_\alpha$ сводится, в силу треугольности оператора Λ_α^-, к n-кратному применению прогонки. Для этой схемы верна оценка (26).

Рассмотренные выше локально-одномерные схемы сходятся в классе разрывных коэффициентов, имеющих разрывы того же типа, что и в [2].

Все результаты переносятся на случай уравнения

$$c (x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f, \qquad c (x, t) \geqslant c_3 > 0,$$

где $L_\alpha u$ дано формулой (1), $f = f (x, t, u)$, $b = b (x, t, u)$, $r_\alpha = r_\alpha (x, t, u)$.

Поступила в редакцию
9.01.1964

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 549—565.
2. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431—466.
3. Н. Н. Анучина, Н. Н. Яненко. Неявные схемы расщепления для гиперболических уравнений и систем. Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 6, 1103—1105.
4. Е. Г. Дьяконов. О применении разностных схем с расщепляющимся оператором для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1963, **151**, № 4, 762—765.
5. А. А. Самарский. Об одной экономичной схеме повышенного порядка точности для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 1, 161—165.
6. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 2, 266—298.
7. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 6, 979—1000.