

УДК 518:517.944/.947

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ
ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

В [1], [2] предложен и обоснован экономичный метод решения параболических уравнений с несколькими переменными, который был назван локально-одномерным методом.

Цель настоящей статьи — изучение локально-одномерных разностных схем для уравнений гиперболического типа в произвольной области G . Эти схемы сходятся на произвольных неравномерных сетках ω_h .

Если область G — параллелепипед, то можно построить ряд других схем, являющихся схемами расщепления [3], [4]. Впервые схемы расщепления были предложены в [3]. В [5] рассматриваются схемы расщепления повышенного порядка точности.

§ 1. Разностные схемы

1. Будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u + f(x, t), \quad L_{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) + r_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} + q_{\alpha}(x, t) u, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_p)$ — точка p -мерного пространства с координатами $x_1, \dots, x_{\alpha}, \dots, x_p$. Пусть G — произвольная p -мерная ограниченная область с границей Γ , $\bar{Q}_T = (G + \Gamma) \times [0 \leq t \leq T]$, $Q_T = G \times (0 < t \leq T]$. В цилиндре \bar{Q}_T ищется решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T; \quad u|_{\Gamma} = u_1(x, t); \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x).$$

Как обычно, предполагаем, что эта задача имеет единственное решение, непрерывное в замкнутой области \bar{Q}_T и обладающее требуемыми по ходу изложения производными.

Относительно G используются те же предположения, что и в [1], [2].

2. Будем пользоваться теми же сетками $\omega_h^{(1)}, \omega_h^{(2)}$, что и в [2]. Основное

изложение проведем для сетки $\omega_h = \omega_h^{(2)}$, внутренними узлами которой являются все узлы $x_i \in G$, лежащие внутри G , а все граничные узлы $x_i \in \gamma_h$ лежат на Γ . Если область G произвольна, то сетка $\omega_h^{(2)}$ неравномерна вблизи границы даже в том случае, когда основная решетка, покрывающая G , равномерна. Граничные условия на этой сетке задаются без сноса.

Сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau \in [0 \leq t \leq T]\}$, в отличие от [2], считаем равномерной.

Обозначения те же, что и в [2]. Вводим промежуточные шаги $t_{j+\alpha/p}$ и соответствующие значения $y^{j+\alpha/p} = y_\alpha$. Будем писать $y = y^{j+1}$, $\check{y} = y^j$, $\check{\check{y}} = y^{j-1}$, $\check{y}_\alpha = y^{(j-1)+\alpha/p}$, $y_{\check{t}} = (y - \check{y})/\tau$, $y_{\check{\check{t}}} = (y - 2\check{y} + \check{\check{y}})/\tau^2$, $y_{\check{t}_\alpha} = \frac{1}{2}(y_\alpha - y_{\alpha-1})/\tau$.

При построении локально-одномерных схем поступаем по аналогии с [5]: аппроксимируем отдельно операторы

$$\mathcal{P}_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (L_\alpha u + f_\alpha), \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Для аппроксимации $\partial^2 u / \partial t^2$ используются выражения

$$u_{\check{t}_\alpha \check{t}_\alpha} = \frac{u_\alpha - 2u_{\alpha-1} + \check{u}_\alpha}{\tau^2} \sim \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (u_0 = \check{u}, u_2 = u), \quad p = 2, \quad (3)$$

$$u_{\check{t}_\alpha \check{t}_\alpha} = \frac{u_\alpha - u_{\alpha-1} - u_{\alpha-2} + \check{u}_\alpha}{\tau^2} \sim \frac{2}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (u_{-1} = \check{u}_2, u_{-2} = \check{u}_1), \quad p = 3. \quad (4)$$

Для аппроксимации $L_\alpha u + f_\alpha$ на ω_h воспользуемся однородной разностной схемой $\Lambda_\alpha u + \varphi_\alpha$ второго порядка аппроксимации, описанной в [2]. Коэффициенты Λ_α и φ_α будем брать в момент $t_\alpha^* = 0.5(t_{j+\alpha/p} + t_{j-1+\alpha/p})$, так что $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(t_\alpha^*)$, $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t_\alpha^*)$.

Локально-одномерные схемы для гиперболических уравнений (1) имеют вид

$$y_{\check{t}_\alpha \check{t}_\alpha} = \sigma \Lambda_\alpha (y_\alpha + \check{y}_\alpha) + 2\sigma \varphi_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad p = 2, 3; \quad (5)$$

$$\sigma = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{при } p = 2, \\ \frac{1}{3} & \text{при } p = 3, \end{cases}$$

где $y_{\check{t}_\alpha \check{t}_\alpha}$ дается одной из формул (3) или (4).

При $p = 2$ схема трехслойная, при $p = 3$ — четырехслойная. В этом отличие от параболических уравнений, для которых вид локально-одномерных схем не зависел от числа измерений.

Уравнения (5) можно записать в виде

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda_\alpha) (y_\alpha + \check{y}_\alpha) = \begin{cases} 2y_{\alpha-1} + 2\sigma \tau^2 \varphi_\alpha & \text{при } p = 2, \\ y_{\alpha-1} + y_{\alpha-2} + 2\sigma \tau^2 \varphi_\alpha & \text{при } p = 3. \end{cases} \quad (6)$$

Для определения $y_\alpha + \check{y}_\alpha$ (\check{y}_α известно) надо обратить трехточечный оператор $E - \sigma \tau^2 \Lambda_\alpha$, что можно сделать по формулам прогонки, пользуясь граничным условием

$$y_\alpha^0 = u_1(x, t_{j+\alpha/p}) \quad \text{при } x \in \gamma_h^\alpha. \quad (7)$$

В случае сетки $\omega_h^{(1)}$ граничное условие имеет вид

$$y_\alpha = \beta_\alpha^\mp y_\alpha^{(\pm 1\alpha)} + (1 - \beta_\alpha^\mp) u_{1\alpha}^\mp \quad \text{при } x \in \gamma_h^{\mp\alpha}$$

(см. [1], [2]). Если оператор $L_\alpha u$ содержит младшие члены $l_\alpha u = r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + q_\alpha u$, то при пользовании формулами прогонки появляется, вообще говоря, требование достаточной малости шагов сетки ω_h . Чтобы избежать от ограничений на шаги сетки ω_h , следует, по аналогии с [2], брать младшие члены на промежуточных строках. Тогда y_α определяется после обращения оператора $E - \sigma\tau^2\Lambda_\alpha^0$, где

$$\Lambda_\alpha^0 y = (a_\alpha y_{x_\alpha})_{x_\alpha} \sim L_\alpha^0 u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right),$$

что возможно при любых h_α .

Из предыдущих работ [1], [2], [6], [7] ясно, что учет младших членов лишь усложняет изложение, не меняя основных свойств изучаемых разностных схем. Поэтому в дальнейшем, без ограничения общности, можно считать $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^0$.

Начальные условия возьмем в следующей форме:

а) если $p = 2$, то

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (E - \sigma\tau^2\Lambda_1) y^{1/2} = F_1, \quad y^{1/2} = y\left(x, \frac{\tau}{2}\right), \quad (8)$$

$$F_1 = u_0 + 0.5\bar{u}_0\tau + \frac{1}{4}\tau^2\Lambda_1 u_0 + \tau^2 \left[\frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{8} (\Lambda u + f) \right]_{t=0};$$

б) если $p = 3$, то

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (E - \sigma\tau^2\Lambda_1) y^{1/3} = F_1, \quad (E - \sigma\tau^2\Lambda_2) (y^{2/3} + u_0) = 2y^{1/3} + F_2, \quad (9)$$

$$F_1 = u_0 + \frac{1}{3}\tau\bar{u}_0 + \frac{1}{3}\tau^2\Lambda_1 u_0 + \tau^2 \left[\frac{2}{3} f_1 - \frac{1}{6} (\Lambda u + f) \right]_{t=0},$$

$$F_2 = \tau^2 \left[\frac{2}{3} f_2 - \frac{1}{9} (\Lambda u + f) \right]_{t=0}.$$

Таким образом, задаче (2) мы ставим в соответствие разностную задачу, определяемую условиями (5), (7), (8) или (9). Будем называть ее задачей II.

3. Вычислим погрешность разностной схемы. Пусть u — решение задачи (2), y — решение задачи II. Погрешность $z_\alpha = y_\alpha - u^{j+\alpha/p}$ определяется условиями

$$z_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \sigma\Lambda_\alpha (z_\alpha + \check{z}_\alpha) + \Psi_\alpha \quad \text{при } t \geq \tau (j \geq 1),$$

$$z_\alpha = 0, \quad x \in \gamma_h^\alpha; \quad z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_1) z^{1/p} = \tau^2\Psi_1 \quad \text{при } t = \frac{\tau}{p}, \quad p = 2, 3,$$

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_2) z^{2/3} = 2z^{1/3} + \tau^2\Psi_2 \quad \text{при } p = 3,$$

где $\Psi_\alpha = \sigma\Lambda_\alpha (u_\alpha + \check{u}_\alpha) - u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} + 2\sigma\varphi_\alpha$. Погрешность аппроксимации схемы есть сумма

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha.$$

Учитывая, что (см. [2])

$$\frac{1}{2} \Lambda_{\alpha} (u_{\alpha} + \check{u}_{\alpha}) = (L_{\alpha} u)_{t=t_{\alpha}^*} + (\mu_{\alpha})_{\hat{x}_{\alpha}} + O(\check{h}_{\alpha}^2),$$

где $\mu_{\alpha} = O(h_{\alpha}^2)$, можно написать

$$\Psi_{\alpha} = \dot{\Psi}_{\alpha} + \Psi_{\alpha}^*, \quad \dot{\Psi}_{\alpha} = 2\sigma \left[L_{\alpha} u - \frac{1}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f_{\alpha} \right]^{(j-0.5)+a/p}, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{\Psi}_{\alpha} = O(\tau), \quad \Psi_{\alpha}^* = (\mu_{\alpha})_{\hat{x}_{\alpha}} + O(\check{h}_{\alpha}^2 + \tau^2), \quad \mu_{\alpha} = O(h_{\alpha}^2).$$

В случае $p = 2$ имеем $\dot{\Psi}_2 + 2\dot{\Psi}_1 + \check{\Psi}_1 = O(\tau^2)$.

Перейдем к выяснению вопроса об устойчивости и сходимости схемы II.

§ 2. Сходимость разностных схем

1. Рассмотрим отдельно случаи $p = 2, p = 3$.

Будем пользоваться скалярными произведениями и нормами, введенными в [2]:

$$(y, z) = \sum_{\omega_h} yzH, \quad \|y\|^2 = (y, y) \text{ и т. д.}, \quad (10)$$

где

$$H = \prod_{\alpha=1}^p \check{h}_{\alpha}, \quad \check{h}_{\alpha} = 0.5 (h_{\alpha} + h_{\alpha+}).$$

Относительно Λ_{α} используется лишь одно предположение

$$\begin{aligned} (-\Lambda_{\alpha} (z_{\alpha} + \check{z}_{\alpha}), z_{\alpha} - \check{z}_{\alpha}) &\geq I_{\alpha} - (1 + c_* \tau) \check{I}_{\alpha}, \\ I_{\alpha} &\geq c_1 \|z_{\alpha}\|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где c_*, c_1 — положительные постоянные, не зависящие от сетки. Нетрудно убедиться в том, что схема $\Lambda_{\alpha} z = (a_{\alpha} z_{x_{\alpha}})_{\hat{x}_{\alpha}}$ удовлетворяет этим требованиям, если $z|_{\gamma_h^{\alpha}} = 0$ и $a_{\alpha} = a_{\alpha}(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица по t .

В дальнейшем будем предполагать условия (11) выполненными, не конкретизируя при этом вид Λ_{α} .

2. Пусть $p = 2$. Рассмотрим задачу

$$z_{\bar{t}_{\alpha}} \bar{t}_{\alpha} = \sigma \Lambda_{\alpha} (z_{\alpha} + \check{z}_{\alpha}) + \Psi_{\alpha}, \quad (12)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad \frac{1}{\tau} z_{\bar{t}_1} = \sigma \Lambda_1 z_1 + \Psi_1 \text{ при } t = \frac{\tau}{2}, \quad (13)$$

$$z_{\alpha} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_h^{\alpha}, t \in \omega_{\tau}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (14)$$

Умножим (12) скалярно на $\tau (z_{\bar{t}_{\alpha}} + z_{\bar{t}_{\alpha-1}}) = z_{\alpha} - \check{z}_{\alpha} = \tau (z_{\alpha})_{\bar{t}}$ и воспользуемся условием (11):

$$\begin{aligned} \|z_{\bar{t}_{\alpha}}\|^2 + \sigma I_{\alpha} &\leq \|z_{\bar{t}_{\alpha-1}}\|^2 + \sigma (1 + c_* \tau) \check{I}_{\alpha} + \tau (\Psi_{\alpha}, (z_{\alpha})_{\bar{t}}), \\ \|z_{\bar{t}_1}\|^2 + \sigma I_1 &\leq \tau (\Psi_1, z_{\bar{t}_1}). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь Ψ_{α} имеют вид, указанный в § 1. Для дальнейшего удобнее счи-

татъ

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*, \quad \sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = 0; \\ \psi_\alpha^* &= (\mu_\alpha)_{\dot{x}_\alpha} + O(\hbar_\alpha^2) + O(\tau), \quad \mu_\alpha = O(\hbar_\alpha^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Решение задачи (12) — (14) представим в виде суммы $z = \xi + v$, где ξ — решение задачи (12) — (14) с правой частью $\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha$, а v — решение той же задачи с правой частью $\psi_\alpha = \psi_\alpha^*$. Напишем энергетическое неравенство для ξ :

$$\|\xi_{\bar{t}_\alpha}\|^2 + \sigma I_\alpha[\xi] \leq \|\xi_{\bar{t}_{\alpha-1}}\|^2 + \sigma(1 + c_*\tau) \check{I}_\alpha[\xi] + \tau(\dot{\psi}_\alpha, (\xi_\alpha)_{\bar{t}}).$$

Просуммируем по $\alpha = 1, 2$ и учтем, что

$$\begin{aligned} \tau \sum_{\alpha=1}^2 (\dot{\psi}_\alpha, (\xi_\alpha)_{\bar{t}}) &= \tau^2 (\dot{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2}) = \tau^2 (\dot{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2})_{\bar{t}} - \tau^2 (\dot{\psi}_{2\bar{t}}, \xi_{\bar{t}_2}^{\check{}}) \leq \\ &\leq \tau^2 (\dot{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2})_{\bar{t}} + c_*\tau \|\check{\xi}_{\bar{t}_2}\|^2 + \frac{\tau^3}{4c_*} \|\dot{\psi}_{2\bar{t}}\|^2. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\|\xi\|_*^2 = \|\xi_{\bar{t}_2}\|^2 + \sigma(I_2 + I_1) \leq (1 + c_*\tau) \|\check{\xi}\|_*^2 + \tau^2 (\dot{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2})_{\bar{t}} + \frac{\tau^3}{4c_*} \|\dot{\psi}_{2\bar{t}}\|^2.$$

Пользуясь леммой 4 из [6] и неравенством

$$\tau (\dot{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2}) \leq c_0 \|\xi_{\bar{t}_2}\|^2 + \frac{\tau^2}{4c_0} \|\dot{\psi}_2\|^2 \leq c_0 \|\xi\|_*^2 + \frac{\tau^2}{4c_0} \|\dot{\psi}_2\|^2,$$

будем иметь

$$\|\xi^{j+1}\|_*^2 \leq M_1 \|\xi^1\|_*^2 + M_2 \max_{\omega_\tau} (\|\dot{\psi}_2\|^2 + \|\dot{\psi}_{2\bar{t}}\|^2) \tau^2 \quad (c_0, M_1, M_2 = \text{const} > 0).$$

Присоединяя сюда неравенства

$$\begin{aligned} \|\xi^1\|_*^2 &\leq \tau (\dot{\psi}_2, (\xi_2)_{\bar{t}}) + \tau (\dot{\psi}_1, \xi_{\bar{t}_1}) = \tau (\dot{\psi}_2, \xi_{\bar{t}_2}) \leq \\ &\leq 0.5 \tau^2 \|\dot{\psi}_2^1\|^2 + 0.5 \|\xi_{\bar{t}_2}\|^2 \leq 0.5 \tau^2 \|\dot{\psi}_2^1\|^2 + 0.5 \|\xi^1\|_*^2 \quad \text{при } t = \tau, \end{aligned}$$

$$\|\xi^1\|_*^2 \leq \tau^2 \|\dot{\psi}_2^1\|^2,$$

получим

$$\|\xi^{j+1}\|_*^2 \leq M_1 \tau^2 \max_{\omega_\tau} \|\dot{\Psi}\|^2, \quad \|\dot{\Psi}\|^2 = \|\dot{\psi}_2\|^2 + \|\dot{\psi}_{2\bar{t}}\|^2.$$

Отсюда и из (11) следует

$$\|\xi^{j+1}\| \leq M\tau \max_{\omega_\tau} \|\dot{\Psi}\|. \quad (17)$$

Обратимся теперь к оценке v . Напишем для v неравенство (15) и оценим:

$$\begin{aligned} \tau (\psi_\alpha^*, (v_\alpha)_{\bar{t}}) &\stackrel{\circ}{=} \tau (\psi_\alpha^*, v_\alpha)_{\bar{t}} - \tau (\psi_{\alpha\bar{t}}^*, \check{v}_\alpha) \leq \tau (\psi_\alpha^*, v_\alpha)_{\bar{t}} + \frac{c_0\tau}{2c_1} \check{I}_\alpha[v] + \frac{\tau}{2c_0} \|\psi_{\alpha\bar{t}}^*\|^2, \\ (\psi_\alpha^*, v_\alpha) &\leq \frac{c_0}{2} \|v_\alpha\|^2 + \frac{1}{2c_0} \|\psi_\alpha^*\|^2 \leq \frac{c_0}{2c_1} I_\alpha + \frac{1}{2c_0} \|\psi_\alpha^*\|^2. \end{aligned}$$

Подставим эти оценки в (15):

$$\|v\|_*^2 \leq (1 + M_1\tau) \|\check{v}\|_*^2 + M_2\tau \sum_{\alpha=1}^2 \|\psi_{\alpha t}^*\|^2 + \tau \sum_{\alpha=1}^2 (\psi_{\alpha}^*, v_{\alpha})_{\check{t}}. \quad (18)$$

Учтем уравнения при $t = 0.5\tau$ и $t = \tau$. После обычных рассуждений получим априорную оценку вида

$$\|v_{\check{t}_2}^{j+1}\|^2 + \|v^{j+1}\|^2 \leq M \max_{\omega_{\tau}} \|\Psi^*\|^2, \quad (19)$$

где

$$\|\Psi^*\|^2 = \sum_{\alpha=1}^2 (\|\psi_{\alpha}^*\|^2 + \|\psi_{\alpha t}^*\|^2). \quad (20)$$

Оценка ψ_{α}^* в норме $\|\psi_{\alpha}^*\|^2$ слишком груба из-за слагаемого $(\mu_{\alpha})_{\check{x}_{\alpha}}$, которое появляется на неравномерной сетке. Поэтому необходимо ввести норму $\|\psi_{\alpha}\|_{3_{\alpha}}$ (см. [2]).

Для этого условия (11) заменим условиями

$$(-\Lambda_{\alpha}(z_{\alpha} + \check{z}_{\alpha}), z_{\alpha} - \check{z}_{\alpha}) \geq I_{\alpha} - (1 + c_0\tau) \check{I}_{\alpha}, \quad I_{\alpha} \geq \frac{1}{c_2^2} \|z_{\check{x}_{\alpha}}\|^2, \quad (21)$$

что дает (см. [2])

$$(z_{\alpha}, \psi_{\alpha}^*) \leq c_2 I_{\alpha}^{1/2} \|\psi_{\alpha}^*\|_{3_{\alpha}}. \quad (22)$$

В результате вместо (19) получим оценку

$$\|v_{\check{t}_2}^{j+1}\|^2 + \|v^{j+1}\|^2 \leq M \max_{\omega_{\tau}} \|\Psi^*\|_3^2, \quad (23)$$

где

$$\|\Psi^*\|_3^2 = \sum_{\alpha=1}^2 (\|\psi_{\alpha}^*\|_{3_{\alpha}}^2 + \|(\psi_{\alpha}^*)_t\|_{3_{\alpha}}^2).$$

3. Тем самым доказана

Т е о р е м а 1. Если выполнены условия (11) и (16), то для решения задачи (12) — (14) справедлива оценка

$$\|z^{j+1}\| + \|z_t^{j+1}\| \leq M_1\tau \max_{\omega_{\tau}} \|\hat{\Psi}\| + M_2 \max_{\omega_{\tau}} \|\Psi^{\circ}\|. \quad (24)$$

Если выполнены условия (21) и (16), то справедлива априорная оценка

$$\|z^{j+1}\| + \|z_t^{j+1}\| \leq M_1\tau \max_{\omega_{\tau}} \|\hat{\Psi}\| + M_2 \max_{\omega_{\tau}} \|\Psi^*\|_3, \quad (24')$$

где M_1, M_2 — положительные постоянные, не зависящие от сетки.

Отсюда и из (16) следует

Т е о р е м а 2. Схема II при $p = 2$ сходится со скоростью $O(\|h^2\| + \tau)$ на произвольной последовательности сеток $\omega_h \times \omega_{\tau}$:

$$\|y^{j+\alpha/2} - u^{j+\alpha/2}\| = O(\|h^2\| + \tau), \quad \|h^2\| = \sum_{\alpha=1}^2 \|h_{\alpha}^2\|, \quad \alpha = 1, 2, \quad (25)$$

если выполнены условия (21) и условия, обеспечивающие максимальный порядок аппроксимации: $\|\hat{\Psi}\| = O(1)$, $\|\Psi^*\|_3 = O(\|h^2\| + \tau)$.

З а м е ч а н и е. Если оператор L_α (и, следовательно, Λ_α) содержит младшие члены, то условия (11) и (21) выполняются лишь при достаточно малом $\tau \leq \tau_0$. Поэтому и оценки теоремы 1 будут верны при $\tau \leq \tau_0$.

4. Оценка порядка точности, даваемая теоремой 2, вообще говоря, является заниженной. Если область G — прямоугольник, то наша схема имеет второй порядок точности на произвольной неравномерной сетке ω_h :

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\| = O(\|h^2\| + \tau^2) \quad \text{при } \tau \leq \tau_0. \quad (26)$$

Перепишем уравнение (6) в виде

$$A_\alpha (y_\alpha + \check{y}_\alpha) = 2y_{\alpha-1} + 0.5\tau^2 \varphi_\alpha, \quad A_\alpha = E - \sigma\tau^2\Lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (27)$$

Из уравнений $A_1(y_1 + \check{y}_1) = 2\check{y} + 0.5\tau^2\varphi_1$, $A_2(y + \check{y}) = 2y_1 + 0.5\tau^2\varphi_2$, $\check{A}_2(\check{y} + \check{y}) = 2\check{y}_1 + 0.5\tau^2\check{\varphi}_2$ исключим y_1 и \check{y}_1 :

$$A_1A_2(y + \check{y}) + A_1\check{A}_2(\check{y} + \check{y}) = 4\check{y} + \tau^2\Phi; \quad \Phi = \varphi_1 + 0.5A_1(\varphi_2 + \check{\varphi}_2). \quad (28)$$

Уравнения (27) пишутся вдоль границ и служат для определения граничных условий при $t = t_{j+1/2}$ через граничные условия при $t = t_{j+1}$ и $t = t_j$. В этом состоит отличие от прежней формулировки (7) граничных условий.

При $t = \tau$ получим уравнение

$$A_1A_2(y + \check{y}) = 2\check{y} + \tau^2\Phi_1 + \tau\bar{u}_0, \quad \Phi_1 = 2\varphi_1 + A_1\varphi_2. \quad (29)$$

Перепишем уравнения (28) и (29) в виде

$$y_{\bar{t}\bar{t}} = \sigma(\Lambda_1 + \Lambda_2)(y + \check{y}) + \sigma(\Lambda_1 + \check{\Lambda}_2)(\check{y} + \check{y}) - \sigma^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2(y + \check{y}) - \quad (30) \\ - \sigma^2\tau^2\Lambda_1\check{\Lambda}_2(\check{y} + \check{y}) + \Phi \quad \text{при } t > \tau,$$

$$\frac{1}{\tau}(y_{\bar{t}} - 0.5\bar{u}_0) = \sigma(\Lambda_1 + \Lambda_2)(y + \check{y}) - \sigma^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2(y + \check{y}) + \Phi_1, \quad t = \tau, \quad (31)$$

$$y|_{\gamma_h} = u_1, \quad y(x, 0) = u_0(x). \quad (32)$$

Отсюда видно, что схему (27) нужно трактовать как схему расщепления в случае простейшей области. Для $z = y - u$ получим условия

$$z_{\bar{t}\bar{t}} = \sigma(\Lambda_1 + \Lambda_2)(z + \check{z}) + \sigma(\Lambda_1 + \check{\Lambda}_2)(\check{z} + \check{z}) - \sigma^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2(z + \check{z}) - \quad (33) \\ - \sigma^2\tau^2\Lambda_1\check{\Lambda}_2(\check{z} + \check{z}) + \Psi \quad \text{при } t > \tau,$$

$$\frac{1}{\tau}z_{\bar{t}} = \sigma(\Lambda_1 + \Lambda_2)(z + \check{z}) - \sigma^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2(z + \check{z}) + \Psi, \quad t = \tau, \quad (34)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z(x, t)|_{\gamma_h} = 0. \quad (35)$$

Погрешность аппроксимации $\Psi = O(\|h\|^2 + \tau^2)$ при $t > \tau$ и $\Psi = O(\|h\|^2 + \tau)$ при $t = \tau$.

Пользуясь приемами, развитыми в [2], [5], нетрудно получить методом энергетических неравенств априорную оценку вида

$$\|z^{j+1}\| \leq M \max_{\omega_\tau} (\|\Psi\|_3 + \|\Psi_{\bar{t}}\|_3), \quad i = 1, 2, \dots, \quad \|z^1\| \leq M_\tau \|\Psi^1\|_3, \quad (36)$$

которая верна при достаточно малом $\tau \leq \tau_0$. Отсюда и следует (26). Для получения энергетического тождества надо (33) умножить скалярно на $\tau(z + \check{z})_{\bar{t}}$ (при $t > \tau$) и (34) на $\tau z_{\bar{t}}$ (при $t = \tau$) и воспользоваться явным выражением для $\Lambda_\alpha z = (a_\alpha z_{x_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha^+ z_{x_\alpha} + b_\alpha^- z_{x_\alpha} + d_\alpha z$ (см. [2]), предпо-

лагая, что $|(a_\alpha)_{\bar{t}}|$, $|(a_\alpha)_{\bar{x}_\beta}|$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) ограничены. Нет необходимости воспроизводить доказательство оценки (36), а также останавливаться на условиях, при которых схема (30) — (32) имеет максимальную погрешность аппроксимации.

5. Если рассматривать равномерную по каждому из переменных x_1 и x_2 сетку $\omega_h^{(1)}$, введенную в [1], [2], то можно показать, что для решения задачи II при $p = 2$ в произвольной области G справедлива оценка

$$\|y - u\|^{j+1} = O(|h|^2) + O(\tau^2 h_1^{-j/2}), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2. \quad (37)$$

Укажем основные моменты вывода этой оценки. Прежде всего представим ψ_α в виде

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^* + \psi_\alpha^{\check{}}, \quad \text{где } \psi_1 = -0.5(\psi_2^* + \psi_2^{\check{}}), \psi_2^* = O(1), \quad (38)$$

так что

$$\psi_\alpha^* = O(\tau^2) + O(h_\alpha^2) \quad \text{при } t > \tau, \quad \psi_1^* = O(\tau) + O(h_1^2) \quad \text{при } t = \tau/2. \quad (39)$$

Решение задачи (12) — (14) по аналогии с [1] ищется в виде суммы

$$z = \eta + v, \quad (40)$$

где η определяется из условий

$$\eta_{\bar{t}_\alpha} \bar{t}_\alpha = \psi_\alpha^{\check{}}, \quad \eta(x, 0) = 0, \quad \eta(x, \tau) = 0, \quad (41)$$

так что $\eta_2 - 2\eta_1 + \check{\eta}_2 = \tau^2 \psi_2^{\check{}}$, $\eta_1 - 2\check{\eta}_1 + \check{\eta}_1 = -0.5 \tau^2 (\psi_2^* + \psi_2^{\check{}})$, $\check{\eta} - 2\check{\eta}_1 + \check{\eta}_2 = \tau^2 \psi_2^{\check{}}$. Исключим отсюда η_1 и $\check{\eta}_1$: $\eta - 2\check{\eta} + \check{\eta} = 0$ и, в силу (41), $\eta^j = 0$ для всех $j = 0, 1, \dots$. Уравнение (41) при $\alpha = 2$ сразу дает

$$\eta^{j+1/2} = -0.5 \tau^2 \psi_2^{j+1} = O(\tau^2).$$

Доопределим η в точках γ_h^1 по аналогии с [1], так, чтобы $\Lambda_1 \eta = O(\eta)$ вблизи границы. Для сеточной функции v получим условия

$$\left. \begin{aligned} v_{\bar{t}_\alpha} \bar{t}_\alpha &= \sigma \Lambda_\alpha (v_\alpha + \check{v}_\alpha) + \Psi_\alpha, \quad \Psi_\alpha = \psi_\alpha^* + \sigma \Lambda_\alpha (\eta_\alpha + \check{\eta}_\alpha) \delta_{\alpha,1}, \quad \alpha = 1, 2, \\ v &= \beta_\alpha^\pm v^{(\mp 1, \alpha)} + v_\alpha^\pm, \quad v_\alpha^\pm = O(h_\alpha^2) + O(\eta) \delta_{\alpha,1} \quad \text{при } x \in \gamma_h^{\pm \alpha} \quad (\text{см. [2]}), \\ v(x, 0) &= 0, \quad (E - \sigma \tau^2 \Lambda_1) v(x, \frac{\tau}{2}) = \tau^2 \Psi_1, \quad \Psi_1 = \psi_1^* + \sigma \Lambda_1 \eta^1, \end{aligned} \right\} (42)$$

или $\frac{1}{\tau} v_{\bar{t}_1} = \sigma \Lambda_1 v_1 + \Psi_1, \quad \psi_1^* = O(\tau + h_1^2).$

Так как v удовлетворяет неоднородным граничным условиям, то пользоваться (11) и (21) нельзя. Нужно конкретное выражение для Λ_1 . Рассуждения достаточно провести для отрезка (для одной цепочки π_1), опуская суммирование по x_2 . Множитель $h_1^{-1/2}$ появляется из-за неоднородности граничных условий и необходимости пользоваться неравенствами типа

$$v_{\bar{t}} v_{x_1} \leq \frac{1}{2c_0} \left(\frac{v_{\bar{t}}}{\sqrt{h_1}} \right)^2 + \frac{c_0}{2} v_{x_1}^2 h_1, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

В [1] мы оценивали v при помощи принципа максимума. Если же вос-

пользоваться и там энергетическим методом, то вместо оценки $\|v\|_0 = O(\tau)$ получим оценку $\|v\| = O(\tau\sqrt{h_1})$.

Поэтому можно надеяться, что появление множителя $h_1^{-1/2}$ в (37) связано с методом доказательства.

6. Перейдем теперь к трехмерной задаче ($p = 3$):

$$z_{\bar{t}\alpha\bar{t}\alpha} = \frac{1}{\tau} (w_\alpha - w_{\alpha-2}) = \sigma\Lambda_\alpha (z_\alpha + \check{z}_\alpha) + \psi_\alpha, \quad t \geq \tau, \quad (43)$$

$$\frac{1}{\tau} w_1 = \sigma\Lambda_1 z_1 + \psi_1 \quad \text{при } t = \tau/3, \quad (44)$$

$$\frac{1}{\tau} (w_2 - w_1) = \sigma\Lambda_2 z_2 + \psi_2 \quad \text{при } t = \frac{2\tau}{3}; \quad (45)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad \text{при } x \in \omega_h, \quad z_\alpha = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_h^\alpha, \quad (46)$$

где

$$w_\alpha = z_{\bar{t}\alpha} = (z_\alpha - z_{\alpha-1})/\tau. \quad (47)$$

Для получения энергетического неравенства умножим уравнение (43) на $z_\alpha - \check{z}_\alpha$ и учтем (11). Справедлива формула

$$(z_{\bar{t}\alpha\bar{t}\alpha}, z_\alpha - \check{z}_\alpha) = \|z_{\bar{t}\alpha}\|_*^2 - \|z_{\bar{t}\alpha-1}\|_*^2, \quad (48)$$

где

$$\|z_{\bar{t}\alpha}\|_*^2 = \|w_\alpha\|^2 + (w_\alpha, w_{\alpha-1}) + \|w_{\alpha-1}\|^2. \quad (49)$$

В самом деле, $z_\alpha - \check{z}_\alpha = \tau(w_\alpha + w_{\alpha-1} + w_{\alpha-2})$ и $(z_{\bar{t}\alpha\bar{t}\alpha}, z_\alpha - \check{z}_\alpha) = (w_\alpha - w_{\alpha-2}, w_\alpha + w_{\alpha-1} + w_{\alpha-2}) = [\|w_\alpha\|^2 + (w_\alpha, w_{\alpha-1})] - [\|w_{\alpha-2}\|^2 + (w_{\alpha-1}, w_{\alpha-2})] = \|z_{\bar{t}\alpha}\|_*^2 - \|z_{\bar{t}\alpha-1}\|_*^2$, если прибавить и вычесть $\|w_{\alpha-1}\|^2$. Справедлива оценка

$$(\psi_\alpha, z_\alpha - \check{z}_\alpha) = \tau(\psi_\alpha, z_\alpha)_{\bar{t}} - \tau(\psi_{\alpha\bar{t}}, \check{z}_\alpha) \leq \tau(\psi_\alpha, z_\alpha)_{\bar{t}} + 0.5c_2\tau\check{I}_\alpha + 0.5(\tau/c_2)\|\psi_\alpha\|_{3_\alpha}, \quad (50)$$

если выполнено условие (21).

Напишем энергетическое неравенство $\|z_{\bar{t}\alpha}\|_*^2 + \sigma I_\alpha \leq \|z_{\bar{t}\alpha-1}\|_*^2 + (1 + c_*\tau)\sigma\check{I}_\alpha + \tau(\psi_\alpha, (z_\alpha)_{\bar{t}})$. Суммирование по $\alpha = 1, 2, 3$ дает

$$\|z_{\bar{t}3}\|_*^2 + \sigma I \leq \|z_{\bar{t}3}\|_*^2 + (1 + c_*\tau)\sigma\check{I} + \tau \sum_{\alpha=1}^3 (\psi_\alpha, (z_\alpha)_{\bar{t}}), \quad (51)$$

где

$$I = \sum_{\alpha=1}^3 I_\alpha.$$

Заметим, что $\|z_{\bar{t}\alpha}\|_*^2 \geq \frac{1}{2}(\|z_{\bar{t}\alpha}\|^2 + \|z_{\bar{t}\alpha-1}\|^2)$.

По аналогии со случаем $p = 2$ представим z в виде суммы

$$z = \xi + v,$$

где ξ — решение задачи с правой частью $\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha$, причем

$$\sum_{\alpha=1}^3 \dot{\psi}_\alpha = 0.$$

Для оценки ξ воспользуемся неравенством (51), заменив в нем z на ξ , а ψ_α на $\dot{\psi}_\alpha$. Условие $\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3 = 0$ дает

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^3 \tau (\dot{\psi}_\alpha, (z_\alpha)_{\bar{t}}) &= \tau^2 [(\dot{\psi}_3, z_{\bar{t}\bar{t}}) - (\dot{\psi}_1, z_{\bar{t}\bar{t}})] = \tau^2 [(\dot{\psi}_3, z_{\bar{t}}) - \\ &- (\dot{\psi}_1, z_{\bar{t}})]_{\bar{t}} - \tau^2 [(\dot{\psi}_{3\bar{t}}, \check{z}_{\bar{t}}) - (\dot{\psi}_{1\bar{t}}, \check{z}_{\bar{t}})] \leq \tau^2 [(\dot{\psi}_3, z_{\bar{t}}) - \\ &- (\dot{\psi}_1, z_{\bar{t}})]_{\bar{t}} + \tau c_* \|z_{\bar{t}\alpha}^*\|^2 + 0.5 \frac{\tau^3}{c_*} [\|\dot{\psi}_{1\bar{t}}\|^2 + \|\dot{\psi}_{3\bar{t}}\|^2]. \end{aligned}$$

Энергетическое неравенство примет вид

$$\|z_{\bar{t}\alpha}^*\|^2 + \sigma I \leq (1 + c_* \tau) (\|\check{z}_{\bar{t}}\|^2 + \sigma \check{I}) + \tau^2 [(\dot{\psi}_3, z_{\bar{t}}) - (\dot{\psi}_1, z_{\bar{t}})]_{\bar{t}} + \quad (52)$$

$$+ 0.5 \frac{\tau^3}{c_*} [\|\dot{\psi}_{1\bar{t}}\|^2 + \|\dot{\psi}_{3\bar{t}}\|^2].$$

Проводя стандартные рассуждения, учитывая неравенства при $t = \tau/3$, $t = 2\tau/3$ и оценку

$$\tau [(\dot{\psi}_3, z_{\bar{t}}) - (\dot{\psi}_1, z_{\bar{t}})] \leq 0.5 \|z_{\bar{t}\alpha}^*\|^2 + 0.5\tau^2 (\|\dot{\psi}_1\|^2 + \|\dot{\psi}_3\|^2),$$

убеждаемся в том, что справедлива оценка

$$\|\xi^{j+1}\| \leq M \tau \max_{\omega_\tau} \|\dot{\Psi}\|, \quad \|\dot{\Psi}\|^2 = \|\dot{\psi}_1\|^2 + \|\dot{\psi}_3\|^2 + \|\dot{\psi}_{1\bar{t}}\|^2 + \|\dot{\psi}_{3\bar{t}}\|^2, \quad (53)$$

где M — положительная постоянная, зависящая от c_1, c_*, c_2 . При выводе априорной оценки для v используется неравенство (51).

В результате мы убеждаемся, что и для $p = 3$ теорема 1 и теорема 2 сохраняют силу.

7. Если область G — параллелепипед, то можно построить большое число экономичных схем, имеющих точность $O(|h|^2 + \tau^2)$. В [5] даже построена схема $O(|h|^4 + \tau^2)$. Мы не имеем возможности подробно останавливаться на схемах расщепления здесь. Отметим лишь различные варианты производящих схем. Пишется сначала исходная схема

$$y_{\bar{t}\bar{t}} = 0.5\Lambda (y + \check{y}) + \varphi, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha.$$

Заменяя оператор $E - 0.5\tau^2\Lambda$ произведением $\prod_{\alpha=1}^p (E - 0.5\tau^2\Lambda_\alpha)$, можно получить следующие производящие схемы:

$$\begin{aligned} Ay_{\bar{t}} &= \check{y}_{\bar{t}} + 0.5\tau\Lambda (\check{y} + \check{\check{y}}) + \tau\varphi, \quad A = \prod_{\alpha=1}^p A_\alpha, \quad A_\alpha = E - 0.5\tau^2\Lambda_\alpha, \\ Ay_{\check{t}} &= \check{y}_{\check{t}} + 0.5\tau\Lambda \check{y} + 0.5\tau\varphi, \quad y_{\check{t}} = 0.5 (y_{\bar{t}} + \check{y}_{\bar{t}}), \quad Ay = 2\check{y} - \check{\check{y}} + \tau^2\varphi. \end{aligned}$$

Для каждой из них можно предложить ряд вычислительных алгоритмов переменных направлений. Столь большое число алгоритмов расщепления вызывает необходимость в сравнении различных алгоритмов по экономичности, простоте и т. д.

В отличие от локально-одномерных схем схемы расщепления, вообще говоря, устойчивы лишь при достаточно малом τ , что на практике может

приводить к занижению шага τ , не вызываемому требованиями точности, и к завышению объема вычислений.

8. Для системы уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} \mathbf{u}, \quad L_{\alpha} \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_{\alpha}} \right),$$

где $k_{\alpha} = (k_{\alpha}^{is})$ — симметричная положительно определенная матрица $n \times n$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, могут быть написаны экономичные локально-одномерные схемы по аналогии с [1]. Рассмотрим, например, случай $p = 2$. Матрицу k_{α} представим в виде суммы треугольных матриц $k_{\alpha} = k_{\alpha}^{-} + k_{\alpha}^{+}$, причем $(k_{\alpha}^{-})^{ii} = (k_{\alpha}^{+})^{ii} = 0.5k_{\alpha}^{ii}$, так что k_{α}^{-} и k_{α}^{+} — сопряженные матрицы. Тогда

$$L_{\alpha} \mathbf{u} = L_{\alpha}^{-} \mathbf{u} + L_{\alpha}^{+} \mathbf{u}$$

и, соответственно, $\Lambda_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{-} + \Lambda_{\alpha}^{+}$.

Простейшая локально-одномерная схема имеет вид

$$y_{i_{\alpha} \bar{i}_{\alpha}} = 2\sigma (\Lambda_{\alpha}^{-} y_{\alpha} + \Lambda_{\alpha}^{+} \bar{y}_{\alpha}).$$

Определение вектора y_{α} сводится, в силу треугольности оператора Λ_{α}^{-} , к n -кратному применению прогонки. Для этой схемы верна оценка (26).

Рассмотренные выше локально-одномерные схемы сходятся в классе разрывных коэффициентов, имеющих разрывы того же типа, что и в [2].

Все результаты переносятся на случай уравнения

$$c(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u + f, \quad c(x, t) \geq c_3 > 0,$$

где $L_{\alpha} u$ дано формулой (1), $f = f(x, t, u)$, $b = b(x, t, u)$, $r_{\alpha} = r_{\alpha}(x, t, u)$.

Поступила в редакцию
9.01.1964

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 549—565.
2. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431—466.
3. Н. Н. Анучина, Н. Н. Яненко. Неявные схемы расщепления для гиперболических уравнений и систем. Докл. АН СССР, 1959, 128, № 6, 1103—1105.
4. Е. Г. Дьяконов. О применении разностных схем с расщепляющимся оператором для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1963, 151, № 4, 762—765.
5. А. А. Самарский. Об одной экономичной схеме повышенного порядка точности для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 1, 161—165.
6. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 2, 266—298.
7. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 6, 979—1000.