

З а м е ч а н и е. Результаты теоремы переносятся на случай, когда $f(P)$ принадлежит некоторому классу H_s^α (см. [1]).

Вопрос о приближенном решении (1) в случае, когда $f(P) \in E_s^\alpha(C)$, $K(P, Q) \in E_{2s}^\alpha(C_1)$ и детерминант Фредгольма отличен от нуля, был рассмотрен в работе [2]. Для получения приближенного решения интегрального уравнения численно решалась алгебраическая система линейных уравнений порядка N . В результате решение вычислялось в N точках с погрешностью $O(\ln^2 N/N^2)$. При этом необходимо было совершить $\sim N^3$ элементарных операций. Таким образом, фактически погрешность приближенного решения интегрального уравнения в заданной точке равнялась $O(\ln^2 N/N^2)$.

Способ приближенного решения интегрального уравнения, предложенный в настоящей работе, позволяет вычислить решение уравнения (1) с погрешностью $O(1/N^{\alpha-\epsilon})$. Легко показать, что на классах H_s^α и E_s^α эта погрешность не допускает существенного улучшения.

В заключение приношу благодарность Н. М. Коробову за ряд ценных замечаний и постоянное внимание.

Поступила в редакцию
15.11 1963

Цитированная литература

1. Н. М. К о р о б о в. О применении теоретико-числовых сеток. В сб. «Вычисл. методы и программирование». М., Изд-во МГУ, 1962, 80—102.
2. Н. М. К о р о б о в. О приближенном решении интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1959, 128, № 2, 235—239.

УДК 518:517.944/947

ЭКОНОМИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

1. Пусть дан p -мерный параллелепипед $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, \dots, p\}$. В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^p r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + f(x, t, u) = Lu + f; \quad (1)$$

$$u|_{x_\alpha=0} = u_{1\alpha}^-(x, t), \quad u|_{x_\alpha=l_\alpha} = u_{1\alpha}^+(x, t), \quad \alpha = 1, \dots, p; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x = (x_1, \dots, x_p). \quad (3)$$

Матрица $(k_{\alpha\beta})$ положительно определенная:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}(x, t) \xi_\alpha \xi_\beta \geq \gamma \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad (4)$$

где $\gamma = \text{const} > 0$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_2, \dots, \xi_p)$ — любой вещественный вектор.

2. В [1] и [2] для решения уравнения (1) с постоянными коэффициентами $k_{\alpha\beta} = \text{const}$, $r_\alpha = 0$, $f = f(x, t)$ в случае $p = 2$ и $p = 3$ были предложены экономичные схемы расщепления. При $p = 2$ вводился один промежуточный (дробный) шаг и 4 дробных шага при $p = 3$.

В [3] при $p = 2$ даны локально-одномерные схемы, а в [4] построена схема повышенного порядка точности $O(|h|^4 + \tau^2)$. В [5] изучалась схема расщепления для уравнения с переменными коэффициентами; матрица $(k_{\alpha\beta})$ при $p > 2$, кроме условия (4), удовлетворяет некоторому дополнительному ограничению даже в случае постоянных коэффициентов.

Ниже будут предложены экономичные разностные схемы, сходящиеся лишь при условии положительной определенности матрицы $(k_{\alpha\beta})$.

3. Введем равномерную (по каждой из координат x_α) прямоугольную сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = (x_1^{(i)}, \dots, x_\alpha^{i_\alpha}, \dots, x_p^{(ip)})\}$, $x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha$, $i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha\}$, обозначая $\omega_h = \{x_i \in G, i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1, \alpha = 1, \dots, p\}$ множество внутренних, а γ_h — множество граничных точек сетки $\bar{\omega}_h$, так что $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$. Пусть $\omega_\tau = \{t_j, j = 0, 1, \dots, k, t_k = T\}$ — произвольная неравномерная сетка на отрезке $[0, T]$ с шагом $\tau = t_{j+1} = t_{j+1} - t_j$.

Будем пользоваться обозначениями [6]. Для аппроксимации операторов

$$L_{\alpha\beta} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) \quad (5)$$

воспользуемся однородными разностными схемами второго порядка аппроксимации

$$\Lambda_{\alpha\beta} y = \frac{1}{2} \left[(a_{\alpha\beta} y_{x_\beta}^-)_{x_\alpha} + (a_{\alpha\beta}^{(+1\beta)} y_{x_\beta}^+)_{x_\alpha} \right], \quad \beta \neq \alpha. \quad (6)$$

Коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ определяются через $k_{\alpha\beta}$ при помощи линейных шаблонных функционалов (ср. [6]). Выбирая, например, в качестве шаблонных функционалов одномерные неубывающие функционалы $A_\beta[\mu(s_\beta)]$, $-1 \leq s_\beta \leq 0$, $A_\beta[1] = 1$, $A_\beta[s_\beta] = -0.5$, определим $a_{\alpha\beta}$ по формуле

$$a_{\alpha\beta}(x, t) = A_\beta[k_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_{\beta-1}, x_\beta + s_\beta h_\beta, x_{\beta+1}, \dots, x_p, t)]. \quad (7)$$

Отсюда и из (4) следует, что матрица $(a_{\alpha\beta})$ является положительно определенной:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^p a_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \geq \gamma_1 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2, \quad \gamma_1 = \text{const} > 0 \quad (\gamma_1 < \gamma), \quad (8)$$

при достаточно малых $h_\alpha \leq h_0$. Наряду с этим будем требовать, чтобы условия $h_\alpha \leq h_0$ обеспечивали выполнение неравенства

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^p a_{\alpha\beta}^{(+1\beta)} \xi_\alpha \xi_\beta \geq \gamma_1 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2. \quad (9)$$

Выбор h_0 , очевидно, зависит от

$$\max_{\bar{Q}_T, \alpha} \left| \frac{\partial k_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \right|, \quad \gamma \text{ и } \gamma_1.$$

Заметим, что в случае $k_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, рассмотренном в [3], [6], условие параболичности (8) выполнено на произвольной сетке $\bar{\omega}_h$. Если $a_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}$ и $\Lambda_{\alpha\beta} y = (a_{\alpha\beta} y_{x_\beta}^-)_{x_\alpha}$, то условие $h_\alpha \leq h_0$ отсутствует, однако $\Lambda_{\alpha\beta}$ — схема первого порядка аппроксимации.

4. Рассмотрим сначала случай, когда $(k_{\alpha\beta})$ — треугольная матрица, так что $k_{\alpha\beta} = 0$ при $\beta > \alpha$. Тогда

$$\sum_{\beta=1}^p L_{\alpha\beta} u = L_\alpha u + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} L_{\alpha\beta} u = \hat{L}_\alpha u, \quad (10)$$

$$L_\alpha u = L_{\alpha\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad (11)$$

а $L_{\alpha\beta}$ определяется формулой (5). Пусть Λ_α и $\Lambda_{\alpha\beta}$ — соответствующие L_α и $L_{\alpha\beta}$ однородные разностные схемы 2-го порядка аппроксимации, $\Lambda_{\alpha\beta}$ имеет вид (6), а

$$\Lambda_\alpha y = (a_{\alpha\alpha}(x, t) y_{x_\alpha}^-)_{x_\alpha} + b_\alpha(x, t) y_{x_\alpha}^0, \quad y_{x_\alpha}^0 = 0.5(y_{x_\alpha}^- + y_{x_\alpha}^+). \quad (12)$$

Локально-одномерная схема переменных направлений имеет вид

$$y_{t_\alpha}^- = \Lambda_\alpha y_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \Lambda_{\alpha\beta} y_\beta + \Phi_\alpha(x, t, y_{\alpha-1}), \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad (13)$$

$$y_\alpha = u_{1\alpha}^-(x, t) \quad \text{при } x_\alpha = 0, \quad y_\alpha = u_{1\alpha}^-(x, t) \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha, \quad (14)$$

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (15)$$

Здесь, как обычно, $y_1, \dots, y_\alpha, \dots, y_{p-1}$ — промежуточные значения (на «дробных» шагах $t_j + \tau_{j+1}\alpha/p$), $y_p = y^{j+1}$, $y_{t_\alpha}^- = (y_\alpha - y_{\alpha-1})/\tau$, $\tau = \tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$.

Следует иметь в виду, что разностная производная сеточной функции z_α всегда берется по своему направлению x_α , так что $z_{x_\alpha} = (z_\alpha^{(+)} - z_\alpha)/h_\alpha$ и т. д. Поэтому выражение $(a_{\alpha\beta} z_{x_\beta}^-)_{x_\alpha}$ означает

$$(a_{\alpha\beta} z_{x_\beta}^-)_{x_\alpha} = a_{\alpha\beta} \left(\frac{z_\beta - z_\beta^{(-1\beta)}}{h_\beta} \right)_{x_\alpha}.$$

Для определения y_α из (13), (14) нужно обратить оператор $E - \tau\Lambda_\alpha$, что делается по формулам одномерной прогонки. Поэтому предлагаемый алгоритм является экономичным.

5. В случае произвольной матрицы $(k_{\alpha\beta})$ уравнение (1) можно преобразовать к «треугольному» виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t, u), \quad Lu = \sum_{\alpha=1}^p \hat{L}_\alpha u, \quad \hat{L}_\alpha u = L_\alpha u + 2 \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \hat{L}_{\alpha\beta} u \quad (16)$$

с треугольной матрицей $(\hat{k}_{\alpha\beta})$. В самом деле,

$$\sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=\alpha}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right).$$

Изменяя во втором слагаемом правой части порядок суммирования, заменяя α на β , а β на α и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(k_{\beta\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\beta\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta},$$

получим

$$\sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=\alpha}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\beta\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \left(\frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right).$$

Отсюда и из (1) следует (16), где $\hat{L}_{\alpha\beta} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\hat{k}_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right)$, L_α дается формулой (11) с новым выражением \hat{r}_α для коэффициента при $\partial u / \partial x_\alpha$, которое мы не приводим, а

$$\hat{k}_{\alpha\beta} = 0.5(k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha}). \quad (17)$$

При этом мы предполагали существование производных $\partial k_{\beta\alpha} / \partial x_\beta$ и $\partial k_{\beta\alpha} / \partial x_\alpha$ при $\alpha \neq \beta$. Отметим, что симметрия матрицы $(k_{\alpha\beta})$ не предполагается.

6. Если матрица $(k_{\alpha\beta})$ симметрична, $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}$, то пригодна и другая схема. Введем промежуточные значения $y_1, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_{2p-1}$ и представим $L_{\alpha\beta}u$ в виде суммы

$$L_{\alpha\beta}u = L_{\alpha\beta}^-u + L_{\alpha\beta}^+u, \quad L_{\alpha\beta}^\mp u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}^\mp \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad (18)$$

где $(k_{\alpha\beta}^-)$ и $(k_{\alpha\beta}^+)$ — левая и, соответственно, правая треугольные матрицы ($k_{\alpha\beta}^- = 0$ при $\beta > \alpha$, $k_{\alpha\beta}^+ = 0$ при $\beta < \alpha$). Пусть $\Lambda_{\alpha\beta}^-$ и $\Lambda_{\alpha\beta}^+$ — соответствующие однородные разностные схемы. Рассмотрим следующую локально-одномерную экономичную схему:

$$y_{\bar{t}_\alpha} = \frac{1}{2} \Lambda_\alpha y_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \Lambda_{\alpha\beta}^- y_\beta + \Phi_\alpha(x, t, y_{\alpha-1}), \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad (19)$$

$$y_{\bar{t}_{\alpha'}} = \frac{1}{2} \Lambda_{\alpha'} y_{\alpha'} + \sum_{\beta=\alpha+1}^p \Lambda_{\alpha\beta}^+ y_{\beta'} + \Phi_{\alpha'}(x, t, y_{\alpha'-1}), \quad (19')$$

$$\alpha' = 2p + 1 - \alpha, \quad \beta' = 2p + 1 - \beta, \quad \alpha' = p + 1, \dots, 2p, \quad y_{2p} = y,$$

$$y_\alpha = y_{\alpha'} = u_{1\alpha}^-(x, t) \text{ при } x_\alpha = 0; \quad y_\alpha = y_{\alpha'} = u_{1\alpha}^+(x, t) \text{ при } x_\alpha = l_\alpha, \\ \alpha = 1, \dots, p, \quad (20)$$

$$y(x, 0) = u_0(x) \quad (y_{2p} = y^{j+1}), \quad (21)$$

Здесь граничные условия взяты в простейшей форме $y_\alpha = y_{\alpha'}$ при $x \in \gamma_h^\alpha$, $t = t_{j+1}$. Проще всего положить $\Phi_2 = 0$ при $\alpha = 2, \dots, 2p$, $\Phi_1 = \Phi(x, t, y^j)$. Из (19) — (20) видно, что для определения y_α , $\alpha = 1, \dots, 2p$, по-прежнему достаточно обратить оператор $E - 0.5\tau\Lambda_\alpha$.

Заметим, что, по аналогии с [6], младшие члены, содержащие $\partial u / \partial x_\alpha$, удобно отнести к предыдущему слою.

7. Перейдем к вопросу об устойчивости и сходимости схемы (13) — (15). Пусть u — решение исходной задачи (1) — (3), y — решение разностной задачи (13) — (15). Полагая $y_\alpha = u^{j+1} + z_\alpha$ при $\alpha = 1, \dots, p$, $y_0 = y^j = u^j + z^j$, получим для сеточной функции z_α задачу

$$z_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha^* z + \psi_\alpha, \quad \Lambda_\alpha^* z = \Lambda_\alpha z + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \Lambda_{\alpha\beta} z_\beta + d_\alpha z_{\alpha-1}, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad (22)$$

$$z_\alpha = 0 \text{ при } x_\alpha = 0, \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad z(x, 0) = 0, \quad |d_\alpha| \leq c^*, \quad c^* = \text{const} > 0,$$

где ψ_α — локальная погрешность аппроксимации, равная

$$\psi_\alpha = \Lambda_\alpha^* u^{j+1} - \delta_{\alpha,1} u_{\bar{t}_\alpha}^j, \quad \delta_{\alpha,1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha \neq 1; \end{cases} \quad u_{\bar{t}_\alpha}^j = (u^{j+1} - u^j) / \tau_{j+1}.$$

Нетрудно представить ψ_α в виде суммы

$$\psi_\alpha = \hat{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*, \quad \hat{\psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} L_{\alpha\beta} u + f_\alpha(x, t, u) - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1}, \quad (23)$$

$$\sum_{\alpha=1}^p \hat{\psi}_\alpha = 0, \quad \psi_\alpha^* = O(|h|^2 + \tau), \quad |h|^2 = \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2, \quad (24)$$

так как $\Lambda_{\alpha\beta}$ и Λ_α имеют второй порядок аппроксимации.

Вопрос об устойчивости и сходимости схемы (13) — (15), как обычно, сводится к априорной оценке решения задачи (22) при дополнительных условиях (23) — (24).

8. Л е м м а 1. Пусть z_α — сеточная функция, удовлетворяющая граничным условиям (22). Если выполнены условия (8), (9), то справедлива оценка

$$- \sum_{\alpha=1}^p (\Lambda_\alpha^* z, z_\alpha) \geq \frac{\gamma_1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \|z_{x_\alpha}\|^2 - M \sum_{\alpha=1}^p \|z_\alpha\|^2, \quad (25)$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит от сетки

Напишем энергетическое тождество для задачи (22). Для этого умножим уравнение (22) скалярно на $2z_\alpha$, применим формулу Грина и проведем суммирование по $\alpha = 1, \dots, p$ (см. [6]):

$$(\|z\|_t^2)_t + \tau \sum_{\alpha=1}^p \|z_{t_\alpha}^-\|^2 + J = 2 \sum_{\alpha=1}^p (\psi_\alpha + b_\alpha z_{x_\alpha}^0 + d_\alpha z_{\alpha-1}, z_\alpha), \quad (26)$$

где

$$J = 2 \sum_{\alpha=1}^p (a_{\alpha\alpha}, z_{x_\alpha}^2) J_\alpha - 2 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} (\Lambda_{\alpha\beta} z_\beta, z_\alpha). \quad (27)$$

Пользуясь разностной формулой Грина и учитывая, что $z_{x_\beta} = 0$ при $x_\alpha = 0, x_\alpha = l_\alpha$ для $\alpha \neq \beta$, находим

$$- (2\Lambda_{\alpha\beta} z_\beta, z_\alpha) = 2 (a_{\alpha\beta} z_{x_\beta}^-, z_{x_\alpha}^-) + 2 (a_{\alpha\beta}^{(+1\beta)} z_{x_\beta}, z_{x_\alpha}).$$

Поэтому выражение для J принимает вид

$$J = \left(\sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^{\alpha} a_{\alpha\beta} z_{x_\beta}^- z_{x_\alpha}^-, 1 \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^{\alpha} a_{\alpha\beta}^{(+1\beta)} z_{x_\beta} z_{x_\alpha}, 1 \right) + \sum_{\alpha=1}^p \{ a_{\alpha\alpha} z_{x_\alpha}^2 h_\alpha |_{x_\alpha=l_\alpha} + a_{\alpha\alpha}^{(+1\alpha)} z_{x_\alpha}^2 h_\alpha |_{x_\alpha=0} \}.$$

Отсюда и из (8), (9) следует

$$J \geq 2\gamma_1 \sum_{\alpha=1}^p \|z_{x_\alpha}^-\|^2, \quad (28)$$

Поэтому вместо (26) можно написать

$$(\|z\|_t^2)_t + \tau \sum_{\alpha=1}^p \|z_{t_\alpha}^-\|^2 + 2\gamma_1 \sum_{\alpha=1}^p \|z_{x_\alpha}^-\|^2 \leq 2 \sum_{\alpha=1}^p (\psi_\alpha + b_\alpha z_{x_\alpha}^0 + d_\alpha z_{\alpha-1}, z_\alpha). \quad (29)$$

Справедлива оценка

$$2 \sum_{\alpha=1}^p (b_\alpha z_{x_\alpha}^0 + d_\alpha z_{\alpha-1}, z_\alpha) \leq \gamma_1 \sum_{\alpha=1}^p \|z_{x_\alpha}^-\|^2 + M_1 \sum_{\alpha=1}^p \|z_\alpha\|^2, \quad (30)$$

где M_1 — положительная постоянная, зависящая от $\max_{\alpha, Q_T} |d_\alpha|$ и $\max_{\alpha, Q_T} |b_\alpha|$. Отсюда и из (28) следует (25).

9. Л е м м а 2. Пусть $\hat{\psi}_\alpha$ удовлетворяет условию

$$\sum_{\alpha=1}^p \hat{\psi}_\alpha = 0. \quad (31)$$

Тогда справедлива оценка

$$2 \sum_{\alpha=1}^p (\hat{\psi}_\alpha, z_\alpha) = 2 \sum_{\alpha=1}^p \left(\hat{\psi}_\alpha, \tau \sum_{\sigma=1}^{\alpha} z_{t_\sigma}^- \right) \leq \frac{1}{2} \tau \sum_{\alpha=1}^p \|z_{t_\alpha}^-\|^2 + \tau p^2 \sum_{\alpha=1}^p \|\hat{\psi}_\alpha\|^2. \quad (32)$$

Лемма доказана в [6].

Замечая, что

$$2 \sum_{\alpha=1}^p (\psi_\alpha^*, z_\alpha) \leq \frac{\gamma_1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \|z_{x_\alpha}^-\|^2 + M_2 \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_\alpha^*\|_{3\alpha}^2,$$

и пользуясь леммами 1 и 2, преобразуем неравенство (29) при достаточно малом $\tau \leq \tau_0$ к виду

$$\|z^{j+1}\|^2 + 0.5\gamma_1\tau \sum_{\alpha=1}^p \|z_{x_\alpha}^-\|^2 \leq (1 + M\tau) \|z^j\|^2 + M\tau \|\psi^{j+1}\|^2, \quad (33)$$

$$\|\Psi\|^2 = \tau p^2 \sum_{\alpha=1}^p \|\dot{\Psi}_\alpha\|^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \sum_{\alpha=1}^p \|\Psi_\alpha^*\|_{3\alpha}^2, \quad (34)$$

где M — положительные постоянные, не зависящие от сетки. Применим теперь лемму 4а из [7]:

$$\|z^{j+1}\| \leq M \|z(x, 0)\| + M' \|\overline{\Psi^{j+1}}\|, \quad (35)$$

где

$$\|\overline{\Psi^{j+1}}\| = \left(\sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} \|\Psi^{j'}\|^2 \right)^{1/2}. \quad (36)$$

Тем самым доказана

Т е о р е м а 1. Разностная схема (13) — (15) при достаточно малых $|h| < h_0$ и $\tau < \tau_0$ устойчива в среднем по правой части и начальным данным. Если выполнены условия, обеспечивающие максимальный порядок аппроксимации (23), (24), то схема (13) — (15) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \sqrt{\tau^*})$, так что

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\| \leq M(|h|^2 + \sqrt{\tau^*}) \text{ при } \tau^* \leq \tau_0, |h| \leq h_0, \quad (37)$$

где $\tau^* = \max_{\omega_\tau} \tau_j$.

10. Теорема 1 справедлива и для схемы (19) — (21). Условие $|h| < h_0$ отсутствует, если коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ постоянны или для аппроксимации $L_{\alpha\beta}$ используется схема $\Lambda_{\alpha\beta} y = (a_{\alpha\beta} y_{x_\beta}^-)_{x_\alpha}$, $a_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}$, имеющая первый порядок аппроксимации. Заметим, что в [1], [5] использовалась для $L_{\alpha\beta}$ другая аппроксимация.

Условие $\tau \leq \tau_0$ отсутствует, если $r_\alpha \equiv 0$ или разбиение L на сумму проведено так, что L_α содержит производную $\partial u / \partial x_{\alpha-1}$; тогда Λ_α содержит слагаемое $y_{x_{\alpha-1}}^0$, которое берется на предыдущем «дробном» шаге, т. е. вычисляется по значениям $y_{\alpha-1}$ (см. [6]).

Оценка $O(|h|^2 + \sqrt{\tau^*})$ для $z = y - u$, вероятно, является слишком грубой и связана с применяемым методом доказательства; даже в случае диагональной матрицы $(k_{\alpha\beta})$, когда $k_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, избавиться от $O(\sqrt{\tau^*})$ не удастся. Между тем принцип максимума в этом случае дает $\|z\|_{\omega_\tau} = O(|h|^2 + \|z\|_0)$, $\|z\|_0 = \max_{\omega_\tau} \tau_j = \tau^*$.

Поскольку в общем случае для схемы (13) принцип максимума не имеет места, то метод [3] позволяет получить лишь оценку $O(|h|^2 + \tau^*/\sqrt{h_*})$, где $h_* = \min_{1 \leq \alpha \leq p} h_\alpha$ (ср. [8]). Схема (13) — (15) была экспериментально проверена для $p = 2$ на различных сетках $\omega_h \times \omega_\tau$; было показано, что она может иметь первый порядок точности на произвольных последовательностях неравномерных сеток.

В случае $p = 2$ можно написать ряд других схем [3] (трехпараметрическое семейство схем). Рамки этой заметки не позволяют рассмотреть подробно указанные схемы. Результаты сохраняют силу, если в (1) $\partial u / \partial t$ заменить $c(x, t) \partial u / \partial t$, где $c(x, t) \geq c_1 > 0$.

11. Изложение проводилось нами для случая, когда область изменения пространственных переменных (x_1, \dots, x_p) есть параллелепипед. Без всяких изменений все результаты переносятся на случай областей G , составленных из параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям. Представляет интерес построение и изучение локально-одномерных алгоритмов, пригодных для произвольных областей G .

Мы предполагали также, что пространственная сетка ω_h равномерна по каждому из переменных. Представляет интерес изучение аналогичных схем на неравномерных сетках ω_h . Отметим, что в этом случае, вероятно, появятся некоторые ограничения на $h_\alpha/h_{\alpha+}$, связанные с условием положительной определенности матрицы $(a_{\alpha\beta})$.

Мы ограничились изучением первой краевой задачи. Аналогично строится алгоритм для третьей краевой задачи.

12. Термин «локально-одномерная схема» применительно к данному случаю означает, что для определения y_α мы получаем одномерные алгебраические задачи. Фактически же схемы (13), (19), так же как и другие наши экономичные схемы [3], [6], [8], являются конкретными реализациями общего принципа построения экономичных схем

для уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f,$$

использующего лишь свойство аддитивности оператора L :

$$Lu = \sum_{\alpha} L_{\alpha} u,$$

где L_{α} — линейные неограниченные операторы.

Схемы, построенные на основе этого принципа, мы называем аддитивными схемами. В [3], [6], [8] операторы L_{α} суть одномерные эллиптические операторы в данной работе L_{α} имеет более сложный вид. Для применимости аддитивных схем достаточно, чтобы разностные аппроксимации L_{α} оператора L_{α} были положительно-определенными операторами на сетке ω_h . Изложение можно проводить для операторных уравнений. На этом пути, в частности, нетрудно получить экономичные схемы для систем параболических уравнений общего вида, считая, что в (1) u есть вектор $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(i)}, \dots, u^{(n)})$, а $(k_{\alpha\beta}) = (k_{\alpha\beta}^{ij})$ — клеточная матрица, элементами которой являются матрицы $k_{\alpha\beta}^{ij}$ по i, j . В этом случае вводится $2p - 1$ (или $4p - 1$) промежуточное значение y_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, 2p - 1$, $y_{(2p)} = y^{j+1}$. Основное требование, которое предъявляется при этом к алгоритму для определения вектора y_{α} , — трехточечность оператора L_{α} по пространству и треугольность матрицы коэффициентов. Для всех локально-аддитивных схем справедлива оценка (37). При этом область G произвольна, если оператор L не содержит смешанных производных, и область G имеет специальный вид, указанный в п. 11, если L содержит смешанные производные.

13. Для уравнений гиперболического типа, содержащих смешанные производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \quad (38)$$

где Lu есть (1), в случае $p = 2$ и $p = 3$ нетрудно написать аналогичные схемы, являющиеся обобщением схем [8] для уравнения с диагональной матрицей коэффициентов.

В этом случае локально-одномерные схемы сходятся со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$ или $O(|h|^2 + \tau^2/\sqrt{h_*})$. Метод расщепления позволяет построить трехслойные схемы $O(|h|^4 + \tau^2)$ (см. [4]) при более высоких требованиях гладкости коэффициентов дифференциального уравнения (38) в предположении, что G — параллелепипед.

Поступила в редакцию

2.04 1964

Цитированная литература

1. Н. Н. Яценко, В. А. Сучков, Ю. Я. Погодин. О разностном решении уравнения теплопроводности в криволинейных координатах. Докл. АН СССР, 1959, 128, № 5, 903—905.
2. Н. Н. Яценко. О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности. Изв. высш. учебных заведений. Сер. матем., 1961, 4(23), 148—157.
3. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 787—811.
4. А. А. Самарский. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 5, 812—840.
5. Е. Г. Дьяконов. Решение некоторых многомерных задач математической физики при помощи метода сеток. Дисс. канд. физ.-матем. н., МИАН СССР, М., 1962.
6. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431—466.
7. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 2, 266—295.
8. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, настоящий выпуск.
9. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для общих параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 2, 278—291.