З а м е ч а н и е. Результаты теоремы переносятся на случай, когда $f(P)$ принадлежит некоторому классу H_s^α (см. [1]).

Вопрос о приближенном решении (1) в случае, когда $f(P) \in E_s^\alpha(C)$, $K(P, Q) \in E_{2s}^\alpha(C_1)$ и детерминант Фредгольма отличен от нуля, был рассмотрен в работе [2]. Для получения приближенного решения интегрального уравнения численно решалась алгебраическая система линейных уравнений порядка N. В результате решение вычислялось в N точках с погрешностью $O(\ln^\gamma N/N^\alpha)$. При этом необходимо было совершить $\sim N^3$ элементарных операций. Таким образом, фактически погрешность приближенного решения интегрального уравнения в заданной точке равнялась $O(\ln^{\gamma_1} N/N^{\alpha/2})$.

Способ приближенного решения интегрального уравнения, предложенный в настоящей работе, позволяет вычислить решение уравнения (1) с погрешностью $O(1/N^{\alpha-\varepsilon})$. Легко показать, что на классах H_s^α и E_s^α эта погрешность не допускает существенного улучшения.

В заключение приношу благодарность Н. М. Коробову за ряд ценных замечаний и постоянное внимание.

Поступила в редакцию
15.11 1963

Цитированная литература

1. Н. М. К о р о б о в. О применении теоретико-числовых сеток. В сб. «Вычисл. методы и программирование». М., Изд-во МГУ, 1962, 80—102.
2. Н. М. К о р о б о в. О приближенном решении интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 2, 235—239.

УДК 518:517.944/.947

ЭКОНОМИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

1. Пусть дан p-мерный параллелепипед $\overline{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, p\}$. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + f(x, t, u) = Lu + f; \tag{1}$$

$$u|_{x_\alpha=0} = u_{1\alpha}^-(x, t), \qquad u|_{x_\alpha=l_\alpha} = u_{1\alpha}^+(x, t), \qquad \alpha = 1, \ldots, p; \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x = (x_1, \ldots, x_p). \tag{3}$$

Матрица $(k_{\alpha\beta})$ положительно определенная:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} k_{\alpha\beta}(x, t)\, \xi_\alpha \xi_\beta \geqslant \gamma \sum_{\alpha=1}^{p} \xi_\alpha^2, \qquad (x, t) \in \overline{Q}_T, \tag{4}$$

где $\gamma = \mathrm{const} > 0$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ — любой вещественный вектор.

2. В [1] и [2] для решения уравнения (1) с постоянными коэффициентами $k_{\alpha\beta} = \mathrm{const}$, $r_\alpha = 0$, $f = f_{(x,t)}$ в случае $p = 2$ и $p = 3$ были предложены экономичные схемы расщепления. При $p = 2$ вводился один промежуточный (дробный) шаг и 4 дробных шага при $p = 3$.

В [3] при $p = 2$ даны локально-одномерные схемы, а в [4] построена схема повышенного порядка точности $O(|h|^4 + \tau^2)$. В [5] изучалась схема расщепления для уравнения с переменными коэффициентами; матрица $(k_{\alpha\beta})$ при $p > 2$, кроме условия (4), удовлетворяет некоторому дополнительному ограничению даже в случае постоянных коэффициентов.

Ниже будут предложены экономичные разностные схемы, сходящиеся лишь при условии положительной определенности матрицы $(k_{\alpha\beta})$.

3. Введем равномерную (по каждой из координат x_α) прямоугольную сетку $\overline{\omega}_h = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_\alpha^{i_\alpha}, \ldots, x_p^{(i_p)}),\ x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ \ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha\}$, обозначая $\omega_h = \{x_i \in G,\ i_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha - 1,\ \alpha = 1, \ldots, p\}$ множество внутренних, а γ_h — множество граничных точек сетки $\overline{\omega}_h$, так что $\overline{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$. Пусть $\omega_\tau = \{t_j,\ i = 0, 1, \ldots, k,\ t_k = T\}$ — произвольная неравномерная сетка на отрезке $[0, T]$ с шагом $\tau = \tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$.

Будем пользоваться обозначениями [6]. Для аппроксимации операторов

$$L_{\alpha\beta} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) \tag{5}$$

воспользуемся однородными разностными схемами второго порядка аппроксимации

$$\Lambda_{\alpha\beta} y = \frac{1}{2}\left[(a_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + \left(a_{\alpha\beta}^{(+1_\beta)} y_{x_\beta}\right)_{\bar{x}_\alpha}\right],\ \beta \neq \alpha. \tag{6}$$

Коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ определяются через $k_{\alpha\beta}$ при помощи линейных шаблонных функционалов (ср. [6]). Выбирая, например, в качестве шаблонных функционалов одномерные неубывающие функционалы $A_\beta[\mu(s_\beta)]$, $-1 \leqslant s_\beta \leqslant 0$, $A_\beta[1] = 1$, $A_\beta[s_\beta] = -0.5$, определим $a_{\alpha\beta}$ по формуле

$$a_{\alpha\beta}(x, t) = A_\beta[k_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_{\beta-1}, x_\beta + s_\beta h_\beta, x_{\beta+1}, \ldots, x_p, t)]. \tag{7}$$

Отсюда и из (4) следует, что матрица $(a_{\alpha\beta})$ является положительно определенной:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \gamma_1 \sum_{\alpha=1}^{p} \xi_\alpha^2, \qquad \gamma_1 = \mathrm{const} > 0 \qquad (\gamma_1 < \gamma), \tag{8}$$

при достаточно малых $h_\alpha \leqslant h_0$. Наряду с этим будем требовать, чтобы условия $h_\alpha \leqslant h_0$ обеспечивали выполнение неравенства

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta}^{(+1_\beta)}\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \gamma_1 \sum_{\alpha=1}^{p} \xi_\alpha^2. \tag{9}$$

Выбор h_0, очевидно, зависит от

$$\max_{\overline{Q}_T,\ \alpha}\left|\frac{\partial k_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\right|, \qquad \gamma \text{ и } \gamma_1.$$

Отметим, что в случае $k_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, рассмотренном в [3], [6], условие параболичности (8) выполнено на произвольной сетке $\overline{\omega}_h$. Если $a_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}$ и $\Lambda_{\alpha\beta} y = (a_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}$, то условие $h_\alpha \leqslant h_0$ отсутствует, однако $\Lambda_{\alpha\beta}$ — схема первого порядка аппроксимации.

4. Рассмотрим сначала случай, когда $(k_{\alpha\beta})$ — треугольная матрица, так что $k_{\alpha\beta} = 0$ при $\beta > \alpha$. Тогда

$$\sum_{\beta=1}^{p} L_{\alpha\beta} u = L_\alpha u + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} L_{\alpha\beta} u = \hat{L}_\alpha u, \tag{10}$$

$$L_\alpha u = L_{\alpha\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\alpha}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \tag{11}$$

а $L_{\alpha\beta}$ определяется формулой (5). Пусть Λ_α и $\Lambda_{\alpha\beta}$ — соответствующие L_α и $L_{\alpha\beta}$ однородные разностные схемы 2-го порядка аппроксимации, $\Lambda_{\alpha\beta}$ имеет вид (6), а

$$\Lambda_\alpha y = (a_{\alpha\alpha}(x, t)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha (x, t)\, y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, \qquad y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = 0.5\,(y_{\bar{x}_\alpha} + y_{x_\alpha}). \tag{12}$$

Локально-одномерная схема переменных направлений имеет вид

$$y_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha y_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \Lambda_{\alpha\beta} y_\beta + \varphi_\alpha (x, t, y_{\alpha-1}), \qquad \alpha = 1, \ldots, p, \tag{13}$$

$$y_\alpha = u_{1\alpha}^- (x, t) \ \text{ при } x_\alpha = 0, \qquad y_\alpha = u_{1\alpha}^- (x, t) \ \text{ при } x_\alpha = l_\alpha, \tag{14}$$

$$y(x, 0) = u_0 (x). \tag{15}$$

Здесь, как обычно, $y_1, \ldots, y_\alpha, \ldots, y_{p-1}$ — промежуточные значения (на «дробных» шагах $t_j + \tau_{j+1}\alpha/p$), $y_p = y^{j+1}$, $y_{\bar{t}_\alpha} = (y_\alpha - y_{\alpha-1})/\tau$, $\tau = \tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$.

Следует иметь в виду, что разностная производная сеточной функции z_α всегда берется по своему направлению x_α, так что $z_{x_\alpha} = (z_\alpha^{(+)} - z_\alpha)/h_\alpha$ и т. д. Поэтому выражение $(a_{\alpha\beta} z_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha}$ означает

$$(a_{\alpha\beta}\, z_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha} = a_{\alpha\beta} \left(\frac{z_\beta - z_\beta^{(-1_\beta)}}{h_\beta} \right)_{\bar{x}_\alpha}.$$

Для определения y_α из (13), (14) нужно обратить оператор $E - \tau\Lambda_\alpha$, что делается по формулам одномерной прогонки. Поэтому предлагаемый алгоритм является экономичным.

5. В случае произвольной матрицы $(k_{\alpha\beta})$ уравнение (1) можно преобразовать к «треугольному» виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t, u), \qquad Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} \hat{L}_\alpha u, \qquad \hat{L}_\alpha u = L_\alpha u + 2 \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \hat{L}_{\alpha\beta} u \tag{16}$$

с треугольной матрицей $(\hat{k}_{\alpha\beta})$. В самом деле,

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=\alpha}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right).$$

Изменяя во втором слагаемом правой части порядок суммирования, заменяя α на β, а β на α и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(k_{\beta\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\beta\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta},$$

получим

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=\alpha}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\beta\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \left(\frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right).$$

Отсюда и из (1) следует (16), где $\hat{L}_{\alpha\beta} u = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\hat{k}_{\alpha\beta} \dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} \right)$, L_α дается формулой (11) с новым выражением $\hat{r}_\alpha$ для коэффициента при $\partial u / \partial x_\alpha$, которое мы не приводим, а

$$\hat{k}_{\alpha\beta} = 0.5\,(k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha}). \tag{17}$$

При этом мы предполагали существование производных $\partial k_{\beta\alpha}/\partial x_\beta$ и $\partial k_{\beta\alpha}/\partial x_\alpha$ при $\alpha \neq \beta$. Отметим, что симметрия матрицы $(k_{\alpha\beta})$ не предполагается.

6. Если матрица $(k_{\alpha\beta})$ симметрична, $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}$, то пригодна и другая схема. Введем промежуточные значения $y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_{2p-1}$ и представим $L_{\alpha\beta}u$ в виде суммы

$$L_{\alpha\beta}u = L^-_{\alpha\beta}u + L^+_{\alpha\beta}u, \qquad L^{\mp}_{\alpha\beta}u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k^{\mp}_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right), \tag{18}$$

где $(k^-_{\alpha\beta})$ и $(k^+_{\alpha\beta})$ — левая и, соответственно, правая треугольные матрицы ($k^-_{\alpha\beta} = 0$ при $\beta > \alpha$, $k^+_{\alpha\beta} = 0$ при $\beta < \alpha$). Пусть $\Lambda^-_{\alpha\beta}$ и $\Lambda^+_{\alpha\beta}$ — соответствующие однородные разностные схемы. Рассмотрим следующую локально-одномерную экономичную схему:

$$y_{\bar t_\alpha} = \frac{1}{2}\Lambda_\alpha y_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1}\Lambda^-_{\alpha\beta}y_\beta + \varphi_\alpha(x, t, y_{\alpha-1}), \qquad \alpha = 1, \ldots, p, \tag{19}$$

$$y_{\bar t_{\alpha'}} = \frac{1}{2}\Lambda_\alpha y_\alpha + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p}\Lambda^+_{\alpha\beta}y_{\beta'} + \varphi_{\alpha'}(x, t, y_{\alpha'-1}), \tag{19'}$$

$$\alpha' = 2p+1-\alpha, \quad \beta' = 2p+1-\beta, \quad \alpha' = p+1, \ldots, 2p, \quad y_{2p} = y,$$

$$y_\alpha = y_{\alpha'} = u^-_{1\alpha}(x, t) \text{ при } x_\alpha = 0; \quad y_\alpha = y_{\alpha'} = u^+_{1\alpha}(x, t) \text{ при } x_\alpha = l_\alpha,$$

$$\alpha = 1, \ldots, p, \tag{20}$$

$$y(x, 0) = u_0(x) \qquad (y_{2p} = y^{j+1}), \tag{21}$$

Здесь граничные условия взяты в простейшей форме $y_\alpha = y_{\alpha'}$ при $x \in \gamma^\alpha_h$, $t = t_{j+1}$. Проще всего положить $\varphi_2 = 0$ при $\alpha = 2, \ldots, 2p$, $\varphi_1 = \varphi(x, t, y^j)$. Из (19) — (20) видно, что для определения y_α, $\alpha = 1, \ldots, 2p$, по-прежнему достаточно обратить оператор $E - 0.5\tau\Lambda_\alpha$.

Заметим, что, по аналогии с [6], младшие члены, содержащие $\partial u/\partial x_\alpha$, удобно относить к предыдущему слою.

7. Перейдем к вопросу об устойчивости и сходимости схемы (13) — (15). Пусть u — решение исходной задачи (1) — (3), y — решение разностной задачи (13)—(15) Полагая $y_\alpha = u^{j+1} + z_\alpha$ при $\alpha = 1, \ldots, p$, $y_0 = y^j = u^j + z^j$, получим для сеточной функции z_α задачу

$$z_{\bar t_\alpha} = \Lambda^*_\alpha z + \psi_\alpha, \qquad \Lambda^*_\alpha z = \Lambda_\alpha z + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1}\Lambda_{\alpha\beta}z_\beta + d_\alpha z_{\alpha-1}, \qquad \alpha = 1, \ldots, p,$$
$$z_\alpha = 0 \text{ при } x_\alpha = 0, \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad z(x, 0) = 0, \ |d_\alpha| \leqslant c^*, \quad c^* = \mathrm{const} > 0, \tag{22}$$

где ψ_α — локальная погрешность аппроксимации, равная

$$\psi_\alpha = \Lambda^*_\alpha u^{j+1} - \delta_{\alpha,1}u_{\bar t}, \qquad \delta_{\alpha,1} = \begin{cases}1, & \alpha = 1,\\ 0, & \alpha \neq 1;\end{cases} \qquad u_{\bar t} = (u^{j+1} - u^j)/\tau_{j+1}.$$

Нетрудно представить ψ_α в виде суммы

$$\psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi^*_\alpha, \qquad \mathring{\psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1}L_{\alpha\beta}u + f_\alpha(x, t, u) - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1}, \tag{23}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\mathring{\psi}_\alpha = 0, \qquad \psi^*_\alpha = O(|h|^2 + \tau), \qquad |h|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p}h^2_\alpha, \tag{24}$$

так как $\Lambda_{\alpha\beta}$ и Λ_α имеют второй порядок аппроксимации.

Вопрос об устойчивости и сходимости схемы (13) — (15), как обычно, сводится к априорной оценке решения задачи (22) при дополнительных условиях (23) — (24).

8. Лемма 1. *Пусть z_α — сеточная функция, удовлетворяющая граничным условиям* (22). *Если выполнены условия* (8), (9), *то справедлива оценка*

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}(\Lambda^*_\alpha z, z_\alpha) \geqslant \frac{\gamma_1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\|z_{\bar x_\alpha}\|^2 - M\sum_{\alpha=1}^{p}\|z_\alpha\|^2, \tag{25}$$

где $M = \mathrm{sonst} > 0$ не зависит от сетки

Напишем энергетическое тождество для задачи (22). Для этого умножим уравнение (22) скалярно на $2z_\alpha$, применим формулу Грина и проведем суммирование по $\alpha = 1, \ldots, p$ (см. [6]):

$$(\| z \|^2)_{\bar t} + \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \| z_{\bar t_\alpha} \|^2 + J = 2 \sum_{\alpha=1}^{p} (\psi_\alpha + b_\alpha z_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + d_\alpha z_{\alpha-1}, z_\alpha), \tag{26}$$

где

$$J = 2 \sum_{\alpha=1}^{p} (a_{\alpha\alpha}, z^2_{\bar x_\alpha}]_\alpha - 2 \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} (\Lambda_{\alpha\beta} z_\beta, z_\alpha). \tag{27}$$

Пользуясь разностной формулой Грина и учитывая, что $z_{x_\beta} = 0$ при $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$ для $\alpha \neq \beta$, находим

$$-(2\Lambda_{\alpha\beta} z_\beta, z_\alpha) = 2\left(a_{\alpha\beta} z_{\bar x_\beta}, z_{\bar x_\alpha}\right) + 2\left(a_{\alpha\beta}^{(+1_\beta)} z_{x_\beta}, z_{x_\alpha}\right).$$

Поэтому выражение для J принимает вид

$$J = \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{\alpha} a_{\alpha\beta} z_{\bar x_\beta} z_{\bar x_\alpha}, 1\right) + \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{\alpha} a_{\alpha\beta}^{(+1_\beta)}, z_{x_\beta} z_{x_\alpha}, 1\right) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{p} \{a_{\alpha\alpha} z^2_{\bar x_\alpha} h_\alpha |_{x_\alpha = l_\alpha} + a_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)} z^2_{x_\alpha} h_\alpha |_{x_\alpha = 0}.$$

Отсюда и из (8), (9) следует

$$J \geqslant 2\gamma_1 \sum_{\alpha=1}^{p} \| z_{\bar x_\alpha} \|^2, \tag{28}$$

Поэтому вместо (26) можно написать

$$(\| z \|^2)_{\bar t} + \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \| z_{\bar t_\alpha} \|^2 + 2\gamma_1 \sum_{\alpha=1}^{p} \| z_{\bar x_\alpha} \|^2 \leqslant 2 \sum_{\alpha=1}^{p} (\psi_\alpha + b_\alpha z_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + d_\alpha z_{\alpha-1}, z_\alpha). \tag{29}$$

Справедлива оценка

$$2 \sum_{\alpha=1}^{p} (b_\alpha z_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + d_\alpha z_{\alpha-1}, z_\alpha) \leqslant \gamma_1 \sum_{\alpha=1}^{p} \| z_{\bar x_\alpha} \|^2 + M_1 \sum_{\alpha=1}^{p} \| z_\alpha \|^2, \tag{30}$$

где M_1 — положительная постоянная, зависящая от $\max\limits_{\alpha, \bar Q_T} | d_\alpha |$ и $\max\limits_{\alpha, \bar Q_T} | b_\alpha |$. Отсюда и из (28) следует (25).

9. Лемма 2. *Пусть* $\overset{\circ}{\psi}_\alpha$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0. \tag{31}$$

Тогда справедлива оценка

$$2 \sum_{\alpha=1}^{p} (\overset{\circ}{\psi}_\alpha, z_\alpha) = 2 \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\overset{\circ}{\psi}_\alpha, \tau \sum_{\sigma=1}^{\alpha} z_{\bar t_\sigma}\right) \leqslant \frac{1}{2} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \| z_{\bar t_\alpha} \|^2 + \tau p^2 \sum_{\alpha=1}^{p} \| \overset{\circ}{\psi}_\alpha \|^2. \tag{32}$$

Лемма доказана в [6].

Замечая, что

$$2 \sum_{\alpha=1}^{p} (\psi_\alpha^*, z_\alpha) \leqslant \frac{\gamma_1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \| z_{\bar x_\alpha} \|^2 + M_2 \sum_{\alpha=1}^{p} \| \psi_\alpha^* \|^2_{3\alpha},$$

и пользуясь леммами 1 и 2, преобразуем неравенство (29) при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$ к виду

$$\| z^{j+1} \|^2 + 0.5\gamma_1 \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \| z_{\bar x_\alpha} \|^2 \leqslant (1 + M\tau) \| z^j \|^2 + M\tau \| \psi^{j+1} \|^2, \tag{33}$$

$$\|\psi\|^2=\tau p^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|\overset{\circ}{\psi}_\alpha\|^2+\frac{1}{2\gamma_1}\sum_{\alpha=1}^{p}\|\psi_\alpha^*\|_{3\alpha}^2, \tag{34}$$

где M — положительные постоянные, не зависящие от сетки. Применим теперь лемму 4а из [7]:

$$\|z^{j+1}\|\leqslant M\|z(x,0)\|+M'\,\overline{\|\psi^{j+1}\|}, \tag{35}$$

где

$$\overline{\|\psi^{j+1}\|}=\left(\sum_{j'=1}^{j+1}\tau_{j'}\|\psi^{j'}\|^2\right)^{1/2}. \tag{36}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Разностная схема* (13) — (15) *при достаточно малых* $|h|<h_0$ *и* $\tau<\tau_0$ *устойчива в среднем по правой части и начальным данным. Если выполнены условия, обеспечивающие максимальный порядок аппроксимации* (23), (24), *то схема* (13) — (15) *сходится со скоростью* $O(|h|^2+\sqrt{\tau^*})$, *так что*

$$\|y^{j+1}-u^{j+1}\|\leqslant M(|h|^2+\sqrt{\tau^*})\quad при\quad \tau^*\leqslant\tau_0,\quad |h|\leqslant h_0, \tag{37}$$

где $\tau^*=\max\limits_{\omega_\tau}\tau_j$.

10. Теорема 1 справедлива и для схемы (19) — (21). Условие $|h|<h_0$ отсутствует, если коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ постоянны или для аппроксимации $L_{\alpha\beta}$ используется схема $\Lambda_{\alpha\beta}y=(a_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}$, $a_{\alpha\beta}=k_{\alpha\beta}$, имеющая первый порядок аппроксимации. Заметим, что в [1], [5] использовалась для $L_{\alpha\beta}$ другая аппроксимация.

Условие $\tau\leqslant\tau_0$ отсутствует, если $r_\alpha\equiv 0$ или разбиение L на сумму проведено так, что L_α содержит производную $\partial u/\partial x_{\alpha-1}$; тогда Λ_α содержит слагаемое $y_{\overset{\circ}{x}_{\alpha-1}}$, которое берется на предыдущем «дробном» шаге, т. е. вычисляется по значениям $y_{\alpha-1}$ (см. [6]).

Оценка $O(|h|^2+\sqrt{\tau^*})$ для $z=y-u$, вероятно, является слишком грубой и связана с применяемым методом доказательства; даже в случае диагональной матрицы $(k_{\alpha\beta})$, когда $k_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$, избавиться от $O(\sqrt{\tau^*})$ не удается. Между тем принцип максимума в этом случае дает $\|z\|_0=O(|h|^2+\|\tau\|_0)$, $\|\tau\|_0=\max\limits_{\omega_\tau}\tau_j=\tau^*$.

Поскольку в общем случае для схемы (13) принцип максимума не имеет места, то метод [3] позволяет получить лишь оценку $O(|h|^2+\tau^*/\sqrt{h_*})$, где $h_*=\min\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant p}h_\alpha$ (ср. [8]). Схема (13) — (15) была экспериментально проверена для $p=2$ на различных сетках $\omega_h\times\omega_\tau$; было показано, что она может иметь первый порядок точности на произвольных последовательностях неравномерных сеток.

В случае $p=2$ можно написать ряд других схем [3] (трехпараметрическое семейство схем). Рамки этой заметки не позволяют рассмотреть подробно указанные схемы. Результаты сохраняют силу, если в (1) $\partial u/\partial t$ заменить $c(x,t)\ \partial u/\partial t$, где $c(x,t)\geqslant c_1>0$.

11. Изложение проводилось нами для случая, когда область изменения пространственных переменных $(x_1,\ldots,x_p)$ есть параллелепипед. Без всяких изменений все результаты переносятся на случай областей G, составленных из параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям. Представляет интерес построение и изучение локально-одномерных алгоритмов, пригодных для произвольных областей G.

Мы предполагали также, что пространственная сетка ω_h равномерна по каждому из переменных. Представляет интерес изучение аналогичных схем на неравномерных сетках ω_h. Отметим, что в этом случае, вероятно, появятся некоторые ограничения на $h_\alpha/h_{\alpha+}$, связанные с условием положительной определенности матрицы $(a_{\alpha\beta})$.

Мы ограничились изучением первой краевой задачи. Аналогично строится алгоритм для третьей краевой задачи.

12. Термин «локально-одномерная схема» применительно к данному случаю означает, что для определения y_α мы получаем одномерные алгебраические задачи. Фактически же схемы (13), (19), так же как и другие наши экономичные схемы [3], [6], [8], являются конкретными реализациями общего принципа построения экономичных схем

для уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f,$$

использующего лишь свойство аддитивности оператора L:

$$Lu = \sum_{\alpha} L_{\alpha} u,$$

где L_{α} — линейные неограниченные операторы.

Схемы, построенные на основе этого принципа, мы называем аддитивными схемами. В [3], [6], [8] операторы L_{α} суть одномерные эллиптические операторы в данной работе L_{α} имеет более сложный вид. Для применимости аддитивных схем достаточно, чтобы разностные аппроксимации Λ_{α} оператора L_{α} были положительно-определенными операторами на сетке ω_h. Изложение можно проводить для операторных уравнений. На этом пути, в частности, нетрудно получить экономичные схемы для систем параболических уравнений общего вида, считая, что в (1) u есть вектор $u = (u^{(1)}, \ldots, u^{(i)}, \ldots, u^{(n)})$, а $(k_{\alpha\beta}) = (k_{\alpha\beta}^{ij})$ — клеточная матрица, элементами которой являются матрицы $k_{\alpha\beta}^{ij}$ по i, j. В этом случае вводится $2p - 1$ (или $4p-1$) промежуточное значение y_{α}, $\alpha = 1, 2, \ldots, 2p - 1$, $y_{(2p)} = y^{j+1}$. Основное требование, которое предъявляется при этом к алгоритму для определения вектора y_{α},— трехточечность оператора Λ_{α} по пространству и треугольность матрицы коэффициентов. Для всех локально-аддитивных схем справедлива оценка (37). При этом область G произвольна, если оператор L не содержит смешанных производных, и область G имеет специальный вид, указанный в п. 11, если L содержит смешанные производные.

13. Для уравнений гиперболического типа, содержащих смешанные производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \tag{38}$$

где Lu есть (1), в случае $p = 2$ и $p = 3$ нетрудно написать аналогичные схемы, являющиеся обобщением схем [8] для уравнения с диагональной матрицей коэффициентов.

В этом случае локально-одномерные схемы сходятся со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$ или $O(\|h\|^2 + \tau^2/\sqrt{h_*})$. Метод расщепления позволяет построить трехслойные схемы $O(|h|^4 + \tau^2)$ (см. [4]) при более высоких требованиях гладкости коэффициентов дифференциального уравнения (38) в предположении, что G — параллелепипед.

Поступила в редакцию
2.04 1964

Цитированная литература

1. Н. Н. Яненко, В. А. Сучков, Ю. Я. Погодин. О разностном решении уравнения теплопроводности в криволинейных координатах. Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 5, 903—905.
2. Н. Н. Яненко. О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности. Изв. высш. учебных заведений. Сер. матем., 1961, **4(23)**, 148—157.
3. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 5, 787—811.
4. А. А. Самарский. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 5, 812—840.
5. Е. Г. Дьяконов. Решение некоторых многомерных задач математической физики при помощи метода сеток. Дисс. канд. физ.-матем. н., МИАН СССР, М., 1962.
6. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 3, 431—466.
7. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 2, 266—295.
8. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **4**, настоящий выпуск.
9. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для общих параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **4**, № 2, 278—291.