УДК 518:517.944/.947

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

1. Рассмотрим в $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, где $\overline{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, \ldots, p\}$ есть p-мерный параллелепипед с границей Γ, следующую задачу (см. [1]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f(x, t), \qquad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \tag{1}$$

$$u_\Gamma = \mu(x, t), \qquad u(x, 0) = u_0(x), \qquad x = (x_1, \ldots, x_p). \tag{2}$$

В [1] для решения задачи (1) — (2) была предложена двухслойная экономичная разностная схема и при помощи метода энергетических неравенств показано, что эта схема абсолютно устойчива и сходится в норме $\mathscr{L}_2(\omega_h)$ со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$ при $p \leqslant 3$. Цель настоящей заметки — показать, что указанная схема сохраняет эти свойства и при $p = 4$, т. е. пригодна для $p \leqslant 4$.

2. Пусть $\overline{\omega}_h$ — пространственная сетка, равномерная по каждому из переменных x_α, с шагами $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, p$, а $\overline{\omega}_\tau$ — произвольная неравномерная сетка на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями из [1]; в частности, нам понадобится норма в $\mathscr{L}_2(\omega_h)$:

$$\| z \| = \left(\sum_{\omega_h} z^2 H \right)^{1/2}, \qquad H = \prod_{\alpha=1}^{p} h_\alpha. \tag{3}$$

Двухслойная производящая схема работы [1] имеет вид

$$A y_{\bar{t}} = \Lambda \check{y} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta > \alpha} (h_\alpha^2 + h_\beta^2) \Lambda_\alpha \Lambda_\beta \check{y} + \varphi, \tag{4}$$

$$y|_\gamma = \mu, \qquad y(x, 0) = u_0(x), \tag{5}$$

где

$$y = y^{j+1}, \qquad \check{y} = y^j = y(x, t_j), \qquad y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau, \qquad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},$$

$$\Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha, \qquad A = \prod_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \qquad A_\alpha = E - \sigma_\alpha \tau \Lambda_\alpha, \qquad \sigma_\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h_\alpha^2}{6\tau}\right),$$

E — единичный оператор, γ — граница сетки $\overline{\omega}_h$.

Производящая схема (4) имеет на решении уравнения (1) максимальную погрешность аппроксимации

$$\Psi = O(|h|^4 + \tau^2), \qquad |h| = \left(\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \right)^{1/2}.$$

Для решения задачи (4) — (5) можно воспользоваться одним из одномерных вычислительных алгоритмов переменных направлений, указанных в [1]. Подчеркнем, что одной и той же производящей схеме соответствует несколько вычислительных алгоритмов.

3. Рассмотрим задачу

$$A z_{\bar{t}} = \Lambda \check{z} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta > \alpha} (h_\alpha^2 + h_\beta^2) \Lambda_\alpha \Lambda_\beta \check{z} + \Psi, \tag{6}$$

$$z|_\gamma = 0, \qquad z(x, 0) = z_0(x). \tag{7}$$

Если $\dot{y}$ — решение задачи (4) — (5), $u = u(x, t)$ — решение исходной задачи (1) — (2), то их разность $z = y - u$ удовлетворяет условиям (6) — (7), причем $z_0(x) = 0$, а $\Psi = \Psi(x, t)$ — погрешность аппроксимации схемы (4) на решении уравнения (1).

Решение задачи (6) — (7) будем искать методом разделения переменных, полагая

$$z^{j+1} = \sum_k T_k^{j+1} V_k(x), \qquad k = (k_1, \ldots, k_p), \quad k_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, N_\alpha = l_\alpha / h_\alpha, \tag{8}$$

где

$$V_k(x) = \prod_{\alpha=1}^{p} v_{k_\alpha}(x_\alpha), \qquad v_{k_\alpha}(x_\alpha) = \sin \frac{\pi k_\alpha x_\alpha}{l_\alpha}, \tag{9}$$

а $v_{k_\alpha}(x_\alpha)$ есть собственная функция одномерной задачи

$$\Lambda_\alpha v_{k_\alpha} + \frac{4}{h_\alpha^2} \xi_\alpha v_{k_\alpha} = 0, \qquad v_{k_\alpha}(0) = v_{k_\alpha}(l_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, p, \tag{10}$$

$$\xi_\alpha = \sin^2 \frac{\pi k_\alpha h_\alpha}{2 l_\alpha}. \tag{11}$$

Подставляя (8) в (6) и учитывая (9) — (11), получим

$$(\rho - 1) \prod_{\alpha=1}^{p} (1 + 4\gamma_\alpha \sigma_\alpha \xi_\alpha) = -4 \sum_{\alpha=1}^{p} \gamma_\alpha \xi_\alpha + \frac{4}{3} \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta > \alpha} (\gamma_\alpha + \gamma_\beta) \xi_\alpha \xi_\beta + \tau A / T^j, \tag{12}$$

где $\rho = \rho_k = T_k^{j+1} / T_k^j$, $\gamma_\alpha = \tau / h_\alpha^2$, A — коэффициент Фурье функции Ψ относительно $\{V_k\}$:

$$A = A_k^{j+1} = (\Psi^{j+1}, V_k) = \sum_{\omega_h} \Psi^{j+1} V_k H. \tag{13}$$

4. Из (8) и (12) находим

$$z^{j+1} = \sum_k q_k T_k^j V_k(x) + \tau \sum_k B_k^{j+1} V_k(x), \tag{14}$$

где

$$B_k = A_k / \delta, \qquad \delta = \prod_{\alpha=1}^{p} (1 + 4\gamma_\alpha \sigma_\alpha \xi_\alpha), \tag{15}$$

$$q_k = 1 - \left(4 \sum_{\alpha=1}^{p} \gamma_\alpha \xi_\alpha - \frac{4}{3} \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta \neq \alpha} \gamma_\alpha \xi_\alpha \xi_\beta \right) \Big/ \delta. \tag{16}$$

В дальнейшем будет показано, что

$$-1 < q_k \leqslant 1, \quad \text{т. е. } |q_k| \leqslant 1 \quad \text{при } p \leqslant 4. \tag{17}$$

Предположим, что условие (17) выполнено. Замечая, что

$$1 + 4\gamma_\alpha \sigma_\alpha \xi_\alpha = 1 + \left(2\gamma_\alpha - \tfrac{1}{3}\right) \xi_\alpha \geqslant \tfrac{2}{3} + 2\gamma_\alpha \geqslant \tfrac{2}{3},$$

$$\delta \geqslant \left(\tfrac{2}{3}\right)^p, \tag{18}$$

из (14) — (15), (17) получим

$$\| z^{j+1} \| \leqslant \| z^j \| + \tau_{j+1} \left(\tfrac{3}{2}\right)^p \| \Psi^{j+1} \|.$$

Отсюда следует априорная оценка

$$\| z^{j+1} \| \leqslant \| z_0(x) \| + \left(\tfrac{3}{2}\right)^p \| \Psi^{j+1} \|, \tag{19}$$

$$\| \Psi^{j+1} \| = \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'}.$$

Тем самым доказана абсолютная устойчивость (при любых $\gamma_\alpha = \tau/h_\alpha^2$) схемы (6) — (7) по начальным данным и по правой части.

5. Перейдем теперь к доказательству использованного при выводе априорной оценки (19) неравенства (17). Индекс k опускаем. Покажем сначала, что

$$q \leqslant 1 \quad \text{при } p \leqslant 4. \tag{20}$$

В самом деле, учитывая, что $\xi_\beta < 1$, находим

$$\frac{4}{3}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta\neq\alpha}\gamma_\alpha\xi_\alpha\xi_\beta < \frac{4(p-1)}{3}\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha\xi_\alpha \leqslant 4\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha\xi_\alpha, \qquad p \leqslant 4. \tag{21}$$

Из (21) и (16) следует (20).

Основную трудность представляет доказательство утверждения

$$q > -1. \tag{22}$$

Проведем изложение для $p = 4$. Для $p < 4$ все выводы сохраняют силу, а рассуждения упрощаются. Напишем подробно выражение для δ:

$$\delta = \prod_{\alpha=1}^{p}(1 + 4\gamma_\alpha\sigma_\alpha\xi_\alpha) = 1 + 2\sum_{\alpha=1}^{p}\nu_\alpha\xi_\alpha + 4\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha}\nu_\alpha\nu_\beta\xi_\alpha\xi_\beta \tag{23}$$

$$+ 8\sum_{\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3}^{1-p}\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2}\nu_{\alpha_3}\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\xi_{\alpha_3} + 16\prod_{\alpha=1}^{p}\nu_\alpha\xi_\alpha, \qquad p = 4,$$

где

$$\nu_\alpha = \gamma_\alpha - \frac{1}{6}. \tag{24}$$

Из (22) и (15), (16) видно, что условие $q + 1 > 0$ будет выполнено, если

$$2F = 2\delta - 4\sum_{\alpha=1}^{4}\gamma_\alpha\xi_\alpha + \frac{4}{3}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta>\alpha}(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)\xi_\alpha\xi_\beta > 0. \tag{25}$$

Подставляя в (25) выражение (23) для δ, получим

$$F = 1 - \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{4}\xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta>\alpha}\left(4\gamma_\alpha\gamma_\beta + \frac{1}{9}\right)\xi_\alpha\xi_\beta + 8\sum_{\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3}^{1-4}\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2}\nu_{\alpha_3}\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\xi_{\alpha_3} + \tag{26}$$

$$+ 16\prod_{\alpha=1}^{4}\nu_\alpha\xi_\alpha.$$

6. Наряду с F рассмотрим выражение

$$F_1 = \prod_{\alpha=1}^{4}\left(1 - \frac{1}{3}\xi_\alpha\right) = 1 - \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{4}\xi_\alpha + \frac{1}{9}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta>\alpha}\xi_\alpha\xi_\beta - \frac{1}{27}\sum_{\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3}\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\xi_{\alpha_3} +$$

$$+ \frac{1}{81}\prod_{\alpha=1}^{4}\xi_\alpha.$$

Нетрудно заметить, что $F_1 > (^2/_3)^4$, так как $\xi_\alpha < 1$, $1 - \frac{1}{3}\xi_\alpha > \frac{2}{3}$.

Образуем разность

$$F - F_1 = 4\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta>\alpha}\gamma_\alpha\gamma_\beta\xi_\alpha\xi_\beta + \sum_{\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3}^{1-4}\left(8\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2}\nu_{\alpha_3} + \frac{1}{27}\right)\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\xi_{\alpha_3} +$$

$$+ 16\prod_{\alpha=1}^{4}\nu_\alpha\xi_\alpha - \frac{1}{81}\prod_{\alpha=1}^{4}\xi_\alpha$$

и покажем, что она неотрицательна при

$$\gamma_\alpha \geqslant \frac{1}{6}, \qquad \alpha = 1, \ldots, p.$$

В самом деле, замечая, что $\nu_\alpha \geqslant 0$, $\prod\limits_{\alpha=1}^{4} \xi_\alpha < \frac{1}{4} \sum\limits_{\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3} \xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\xi_{\alpha_3}$, сразу получаем $F - F_1 > 0$, т. е. $F \geqslant F_1 > \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Пусть все $\gamma_\alpha < \frac{1}{6}$, т. е. $-\frac{1}{6} < \nu_\alpha < 0$, $\alpha = 1, \ldots, p$. Тогда справедливо неравенство

$$F > F_1 + 4 \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta>\alpha} \gamma_\alpha\gamma_\beta\xi_\alpha\xi_\beta - \frac{4}{27} - \frac{2}{81} > \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \frac{14}{81} = \frac{2}{81} > 0,$$

т. е. $F > 0$.

Возможны различные комбинации знаков для ν_α и ν_β, $\alpha \neq \beta$. Пусть, например, $\nu_1 < 0$, а $\nu_\alpha \geqslant 0$, $\alpha = 2, 3, 4$, т. е. $\gamma_1 < \frac{1}{6}$, $|\nu_1| < \frac{1}{6}$, а $\gamma_\alpha \geqslant \frac{1}{6}$, $\alpha > 1$. Обозначая $\mu_\alpha = \nu_\alpha \xi_\alpha$ и учитывая, что $|\mu_1| < \frac{1}{6}$, получим

$$\sum_{\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3} \left(8\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2}\mu_{\alpha_3} + \frac{1}{27}\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\xi_{\alpha_3}\right) + 16 \prod_{\alpha=1}^{4} \mu_\alpha - \frac{1}{81} \prod_{\alpha=1}^{4} \xi_\alpha >$$

$$> \left(8 - \frac{8}{3}\right)\mu_2\mu_3\mu_4 + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{81}\right)\xi_2\xi_3\xi_4 - \frac{4}{3}\xi_1(\mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4) +$$

$$+ \frac{1}{27}\xi_1(\xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_4 + \xi_3\xi_4)$$

и, следовательно, $F - F_1 \geqslant \frac{8}{3}(\gamma_2\gamma_3\xi_2\xi_3 + \gamma_2\gamma_4\xi_2\xi_4 + \gamma_3\gamma_4\xi_3\xi_4) > 0$.

Нетрудно убедиться в том, что и при любой другой комбинации знаков ν_α, $\alpha = 1, \ldots, 4$, $F > 0$. Тем самым доказано, что при любых значениях γ_α, $\alpha = 1, \ldots, 4$, выполняется неравенство (16) и, следовательно, верна априорная оценка (19) для $p \leqslant 4$.

7. Теорема 1. *Производящая схема* (4) — (5) *абсолютно устойчива в норме* $\mathscr{L}_2(\omega_h)$ *по начальным данным и по правой части, так что при любых* τ *и* h_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, *для решения задачи* (6) — (7) *справедлива априорная оценка*

$$\| z^{j+1} \| \leqslant \| z(x, 0) \| + \left(\frac{3}{2}\right)^p \| \Psi^{j+1} \|, \text{ если } p \leqslant 4. \tag{27}$$

Теорема 2. *Пусть решение задачи* (1) — (2) *удовлетворяет условиям, при которых схема* (4) — (5) *имеет максимальный порядок аппроксимации, точнее,*

$$\| \Psi \| = O(|h|^4) + O(\tau^2). \tag{28}$$

Тогда производящая схема (4) — (5) *при* $p \leqslant 4$ *имеет на произвольной последовательности сеток* $\overline{\Omega}$ *четвертый порядок точности по* $|h|$ *и второй по* τ:

$$\| y^{j+1} - u^{j+1} \| = O(|h|^4) + O(\| \tau^2 \|_{j+1}), \tag{29}$$

где

$$\| \tau^2 \|_{j+1} = \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'}^2 \tau_{j'}.$$

Теорема 1 доказана выше. Теорема 2 следует из теоремы 1 и условия (28) для погрешности аппроксимации Ψ схемы (4) — (5). Нетрудно заметить, что условие (28) будет выполнено, если $u(x, t) \in C^{(6)}$, $f(x, t) \in C^{(4)}$.

Таким образом, двухслойная схема (4) — (5) применима для того же числа измерений ($p \leqslant 4$), что и трехслойная схема (см. [2]). Очевидно, что схема (4) — (5) является более экономичной (требует для нахождения $y = y^{j+1}$ меньшего числа арифметических действий) по сравнению со схемой из [2], схема (4) — (5) сходится при любых γ_α, $\alpha = 1, \ldots, p$, а схема из [2] требует ограничения на $\gamma_\alpha = \gamma$ вида $\gamma \geqslant \text{const} > 0$. В [2] рассматривался случай квадратной сетки $h_\alpha = h_\beta = h$. На неквадратной сетке ($h_\alpha \neq h_\beta$) схема из работы [2] существенно усложняется. Схема (4)—(5) в [1] была обобщена на случай уравнения с переменными коэффициентами.

8. По аналогии с [1] нетрудно написать разностные схемы повышенного порядка точности $O(|h|^4 + \tau^2)$ для уравнения гиперболического типа. Рассмотрим в $\overline{Q}_T$ следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f(x, t), \qquad (x, t) \in Q_T, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \tag{30}$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t), \qquad u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \overline{u}_0(x). \tag{31}$$

Исходная схема $O(|h|^4 + \tau^2)$ имеет вид

$$y_{\bar{t}t} = 0.5\,\Lambda(y + \check{\check{y}}) - \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \Lambda_\alpha y_{\bar{t}t} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha}(h_\alpha^2 + h_\beta^2)\Lambda_\alpha\Lambda_\beta \check{y} + \varphi, \tag{32}$$

где $y = y^{j+1}$, $\check{y} = y^j$, $\check{\check{y}} = y^{j-1}$, $y_{\bar{t}t} = (y - 2\check{y} + \check{\check{y}})/\tau^2$, $\overline{\omega}_\tau$ — равномерная сетка ($\tau_{j+1} = \tau = \mathrm{const}$).

Ей можно поставить в соответствие несколько производящих схем того же порядка точности. Приведем в качестве примера производящую схему

$$Ay_{\bar{t}} = \check{y}_{\bar{t}} + \sum_{\alpha=1}^{p}(0.5 - \sigma_\alpha)\tau\Lambda_\alpha \check{y}_{\bar{t}} + 0.5\tau\Lambda(\check{y} + \check{\check{y}}) + \tag{33}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha}(1 - \sigma_\alpha - \sigma_\beta)\tau^3\Lambda_\alpha\Lambda_\beta\check{y} + \tau\varphi = \Phi[\check{y}],$$

$$y|_\gamma = \mu, \qquad y(x, 0) = u_0(x), \qquad y_{\bar{t}}(x, \tau) = \overline{u}_0(x) - 0.5\tau\left[\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u_0 + f(x, 0)\right], \tag{34}$$

где

$$A = \prod_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \qquad A_\alpha = E - \tau^2\sigma_\alpha\Lambda_\alpha, \qquad \sigma_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h_\alpha^2}{12\tau^2}.$$

Для определения отсюда $y = y^{j+1}$ удобен следующий алгоритм переменных направлений:

$$A_1 w_{(1)} = \Phi, \qquad A_\alpha w_{(\alpha)} = w_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, \ldots, p, \qquad y = \check{y} + \tau w_{(p)} \tag{35}$$

На границе (при $x \in \gamma$) $w_{(\alpha)}$ определяются из условий

$$w_{(\alpha)} = A_{\alpha+1} \ldots A_p \mu_{\bar{t}}^{j+1} \quad \text{при} \quad x_\alpha = 0, \qquad x_\alpha = l_\alpha \tag{36}$$

(ср. с [1]).

При $\sigma_\alpha = 0.5$, $\alpha = 1, \ldots, p$, схема (33) переходит в известную схему $O(|h|^2 + \tau^2)$. Для схемы (33) — (34) справедливы теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2.

Поступила в редакцию
15.08.1963

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 5, 812—840.
2. J. Douglas, J. Gunn. Two high-order correct difference analogues for the equation of multidimensional heat flow. Math. Comput., 1963, 17, № 81, 71—80.