6. И. А. Шишмарев. О некоторых оценках для эллиптического оператора с гладкими и разрывными коэффициентами. Дисс. канд. физ.-матем. н., М., МГУ, 1962.
7. В. А. Ильин, И. А. Шишмарев. Свойства гладкости обобщенных потенциалов эллиптического оператора. Докл. АН СССР, 1961, **141**, № 3, 547—550.
8. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Изд-во ин. лит., 1957.
9. Ван Тун. Повышающее свойство прямых значений обобщенных потенциалов для функции сравнения и главного фундаментального решения общего эллиптического уравнения второго порядка. Докл. АН СССР, 1963, **152**, № 6, 1288—1291.

УДК 518:517.9/.94

ОБ ОДНОМ ЭКОНОМИЧНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по аналогии с [1], [2], [3] предлагается экономичная (по числу действий) разностная схема второго порядка точности (попеременно-треугольная схема). Эта схема может быть использована в качестве итерационной схемы для решения системы линейных алгебраических уравнений. Все результаты переносятся на случай линейных операторных уравнений.

1. Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + A\mathbf{u} = \mathbf{f}\,(t), \qquad 0 < t \leqslant T, \qquad \mathbf{u}\,(0) = \mathbf{u}_0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}\,(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, $\mathbf{f}\,(t) = (f_1\,(t), \ldots, f_n\,(t))$ — векторы, $A = A\,(t) = (a_{ik}\,(t))$ — квадратная матрица $n \times n$.

Пусть $\omega_\tau = \{t_j = j\tau\}$ — сетка с шагом τ на отрезке $[0, T]$. Для решения задачи (1) можно использовать ряд разностных схем. Будем сравнивать их по числу арифметических операций q, затрачиваемых при переходе со слоя t_j на слой t_{j+1}, т. е. при определении вектора $\mathbf{y}^{j+1}$ по заданному $\mathbf{y}^j$. Для явной схемы $\mathbf{y}^{j+1} = \mathbf{y}^j + \tau\,(\mathbf{f} - A\mathbf{y})^j$ имеем $q = 2n^2 + 2n$; она имеет первый порядок точности. Неявная схема $\mathbf{y}^{j+1} + 0.5\,\tau\,(A\mathbf{y})^{j+1} = \mathbf{y}^j - 0.5\,\tau\,(A\mathbf{y})^j + 0.5\,\tau\,(\mathbf{f}^j + \mathbf{f}^{j+1})$ имеет второй порядок точности, но для нее $q = O\,(n^3)$. Будем называть схему экономичной, если для нее, так же как и для явной схемы, $q = O\,(n^2)$.

2. Будем предполагать, что матрицу A можно представить в виде суммы двух треугольных положительно определенных матриц:

$$A = A_1 + A_2, \qquad A_1 = (a_{ik}^-), \qquad A_2 = (a_{ik}^+), \qquad a_{ik}^- = 0, \quad k > i; \quad a_{ii}^- + a_{ii}^+ = a_{ii}, \tag{2}$$

$$(A_\alpha \xi, \xi) \geqslant c_1 \|\xi\|^2, \qquad c_1 = \mathrm{const} > 0, \qquad \alpha = 1,2, \tag{3}$$

где $(\mathbf{v}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} v_i \xi_i$, $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$ — скалярное произведение и норма, ξ — произвольный вещественный вектор. Если A — симметричная матрица, то естественно положить $a_{ii}^- = a_{ii}^+ = a_{ii}/2$; тогда условие симметрии дает

$$(\xi, A_1\mathbf{v}) = (A_2\xi, \mathbf{v}), \text{ т. е. } A_1^* = A_2, \; A_2^* = A_1. \tag{4}$$

Рассмотрим следующую двухшаговую разностную схему:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathbf{y}-\check{\mathbf{y}}}{\tau}+A_1\mathbf{y}+\check{A}_2\check{\mathbf{y}}=\mathbf{f}(t), \qquad \mathbf{y}(0)=\mathbf{u}_0,\\ &\frac{\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{y}}{\tau}+A_1\mathbf{y}+\hat{A}_2\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{f}(t), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $t=t_{2j+1},\quad \check{t}=t_{2j},\quad \hat{t}=t_{2j+2},\quad \mathbf{y}=\mathbf{y}(t),\quad \check{\mathbf{y}}=\mathbf{y}(\check{t}),$

$$\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{y}(\hat{t}),\quad A_1=A_1(t),\quad \check{A}_2=A_2(\check{t}),\quad \hat{A}_2=A_2(\hat{t}).$$

Для определения $\mathbf{y}$ при заданном $\check{\mathbf{y}}$ надо обратить треугольную матрицу $E+\tau A_1$, а для определения $\hat{\mathbf{y}}$ — обратить треугольную матрицу $E+\tau A_2$. Это возможно при любом $\tau>0$, если $a_{ii}^{\pm}\geqslant 0$, и требует $O(n^2)$ операций, т. е. схема (5) экономична. Напишем расчетные формулы в виде

$$\left.\begin{aligned} &y_i=\frac{\check{y}_i+\tau(f_i-\check{v}_i^+-a_{ii}^+\check{y}_i-v_i^-)}{1+\tau a_{ii}^-}, \qquad \check{v}_i^+=\sum_{k=i+1}^{n}\check{a}_{ik}\check{y}_k, \qquad i=1,\ldots,n,\\ &\hat{y}_i=\frac{y_i+\tau(f_i-v_i^--a_{ii}^-y_i-\hat{v}_i^+)}{1+\tau a_{ii}^+}, \qquad v_i^-=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}y_k, \qquad y_i(0)=u_{0i}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если, кроме вектора $\check{y}_i$, запоминать вектор $\check{v}_i^+$, то для определения y_i (на одном шаге) надо затратить $q=n^2+7n$ арифметических действий; запоминая v_i^- и y_i, найдем $\hat{y}_i$ тоже с затратой лишь $q=n^2+7n$ действий. Один шаг по явной схеме требует $q=2n^2+2n$ операций. Таким образом, предлагаемая двухшаговая схема при $n>5$ требует меньшего числа действий даже по сравнению с явной схемой с шагом τ. Кроме того, как будет показано ниже, схема (5) имеет второй порядок точности.

3. Найдем погрешность аппроксимации схемы. Пусть $\mathbf{u}$ — решение задачи (1), $\mathbf{y}$ — решение задачи (5). Для $\mathbf{z}=\mathbf{y}-\mathbf{u}$ имеем

$$\mathbf{z}+\tau A_1\mathbf{z}=\check{\mathbf{z}}-\tau\check{A}_2\check{\mathbf{z}}-\tau\psi_1, \qquad \hat{\mathbf{z}}+\tau\hat{A}_2\hat{\mathbf{z}}=\mathbf{z}-\tau A_1\mathbf{z}-\tau\psi_2,\ \mathbf{z}(0)=0, \tag{7}$$

где ψ_1, ψ_2 — локальные погрешности аппроксимации. Полная погрешность аппроксимации схемы (5) равна

$$\psi=\psi_1+\psi_2=(\hat{A}_2\hat{\mathbf{u}}-2A_2\mathbf{u}+\check{A}_2\check{\mathbf{u}})+2\left(\frac{\hat{\mathbf{u}}-\check{\mathbf{u}}}{2\tau}-\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right).$$

$$\text{Если}\quad A_2(t)\,\mathbf{u},\ \frac{d\mathbf{u}}{dt}\in C^{(1,1)}[0,T],\ \text{то}\ \psi=O(\tau^2). \tag{8}$$

При этом ψ_α, $\alpha=1, 2$, можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} &\psi_\alpha=\mathring{\psi}_\alpha+\psi_\alpha^*, \qquad \mathring{\psi}_\alpha=O(\tau), \qquad \psi_\alpha^*=O(\tau^2), \qquad \alpha=1,2,\\ &\mathring{\psi}_1+\mathring{\psi}_2=0, \qquad \mathring{\psi}_2=\tau\left[\frac{d}{dt}(A_2\mathbf{u})+\frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

В дальнейшем будем предполагать, что условия (8) выполнены.

4. Перейдем к выводу априорных оценок для решения задачи (7). Пусть $(\mathbf{z},\xi)$ — скалярное произведение и $\|\mathbf{z}\|=\sqrt{(\mathbf{z},\mathbf{z})}$ — связанная с ним норма. Введем норму

$$\|\mathbf{z}\|_\alpha^2=\|\mathbf{z}\|^2+\tau^2\|A_\alpha\mathbf{z}\|^2, \qquad \alpha=1,2. \tag{9}$$

Лемма 1. *Справедливы неравенства*

$$2\tau(A_\alpha\mathbf{z},\mathbf{z})\geqslant\sigma_\alpha\|\mathbf{z}\|_\alpha^2, \qquad \sigma_\alpha=\frac{2c_1\tau}{1+\tau^2\|A_\alpha\|^2}, \tag{10}$$

$$\| z + \tau A_\alpha z \|^2 \geqslant (1+\sigma_\alpha) \| z \|_\alpha^2, \qquad \| z - \tau A_\alpha z \|^2 \leqslant (1-\sigma_\alpha) \| z \|_\alpha^2, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{11}$$

Достаточно доказать (10). Из (3) и (9) следует

$$\| z \|_\alpha^2 \leqslant (1 + \tau^2 \| A_\alpha \|^2) \| z \|^2 \leqslant (1 + \tau^2 \| A_\alpha \|^2) \frac{1}{c_1} (A_\alpha z, z).$$

Переписывая первое из уравнений (7) в виде $z + \tau A_1 z + \tau\psi_1 = \check{z} - \tau \check{A}_2 \check{z}$, вычисляя квадраты норм от обеих частей и пользуясь леммой 1, получим

$$(1+\sigma_1) \| z \|_1^2 \leqslant (1-\sigma_2) \| \check{z} \|_2^2 - \tau^2 \| \psi_1 \|^2 - 2\tau (\psi_1, z + \tau A_1 z), \tag{12}$$

$$(1+\sigma_2) \| \hat{z} \|_2^2 \leqslant (1-\sigma_1) \| z \|_1^2 + \tau^2 \| \psi \|^2 - 2\tau (\psi_2, z - \tau A_1 z). \tag{13}$$

Пусть A_1^* — сопряженный к A_1 оператор; тогда

$$(A_1 z, \psi_\alpha) = (z, A_1^* \psi_\alpha) \leqslant \| z \| \| A_1^* \psi_\alpha \|. \tag{14}$$

Просуммируем (12) и (13) и воспользуемся неравенством

$$-2\tau (z, \psi_1 + \psi_2) \leqslant c_0 \tau \| z \|^2 + \frac{1}{c_0} \tau \| \psi_1 + \psi_2 \|^2, \qquad 2\tau^2 (z, A_1^* (\psi_2 - \psi_1)) \leqslant$$

$$\leqslant c_0 \tau \| z \|^2 + \frac{1}{c_0} \tau^3 \| A_1^* (\psi_2 - \psi_1) \|^2,$$

где $c_0 = 2c_1/(1 + \tau^2 \| A_1 \|^2) = \sigma_1/\tau$. Тогда получим

$$\| \hat{z} \|_2^2 \leqslant \frac{1-\sigma_2}{1+\sigma_2} \| \check{z} \|_2^2 + \frac{\tau}{1+\sigma_2} \| \Psi \|^2 \leqslant \| \check{z} \|_2^2 + \tau \| \Psi \|^2, \tag{15}$$

$$\| \Psi \|^2 = [\tau \| \psi_1 + \psi_2 \|^2 + \tau^3 \| A_1^* (\psi_2 - \psi_1) \|^2] \frac{1 + \tau^2 \| A_1 \|^2}{c_1} + \tau \, | \, \| \psi_2 \|^2 - \| \psi_1 \|^2 \, |. \tag{16}$$

Из (15) и начального условия $z(0) = 0$ следует

$$\| z^{2j} \|_2 \leqslant \| \overline{\Psi^{2j}} \|, \qquad j = 0, 1, \ldots, \quad \| \overline{\Psi^j} \| = \Big(\sum_{j'=1}^{j} \tau \| \Psi^{j'} \|^2 \Big)^{1/2}. \tag{17}$$

Тем самым доказана

Т е о р е м а 1. *Для решения задачи* (7) *при дополнительном условии* (3) *верна оценка* (17).

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия* (3) *и* (8), *то схема* (5) *имеет второй порядок точности:*

$$\| z^j \| \leqslant M\tau^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от τ.

Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что из условий (8′) следует $\| \Psi \| = O(\tau^2)$, и воспользоваться теоремой 1.

5. Все предыдущие результаты (кроме формул (6)) сохраняют силу, если A_1 и A_2 — произвольные линейные операторы в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющие (3). Если A_α — самосопряженные операторы, то схема (5) является обобщением известного алгоритма переменных направлений для двухмерного уравнения теплопроводности. Несколько изменяя рассуждения, можно изложенным выше методом показать, что алгоритм [4] сходится и для произвольной области со скоростью $O(h^2 + \tau^2 h^{-1/2})$, где h— шаг пространственной сетки.

Пользуясь теоремой 1, можно, в частности, показать, что перемежающийся метод [5] для одномерного уравнения теплопроводности сходится со скоростью $O(\tau^2/h^2 + h^2)$.

В [1] был предложен экономичный метод для решения системы уравнений параболического типа

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right), \qquad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n), \qquad k = (k_{is}),$$

$$\frac{\mathbf{y} - \check{\mathbf{y}}}{\tau} + A_1\mathbf{y} + A_2\check{\mathbf{y}} = 0, \qquad A_1\mathbf{y} = -(a^-\mathbf{y}_{\bar{x}})_x,\ A_2\mathbf{y} = -(a^+\mathbf{y}_{\bar{x}})_x. \tag{18}$$

Алгоритм (5) в этом случае дает более высокий порядок точности $O(\tau^2 h^{-1/2} + h^2)$.

Для решения задачи (1) можно также пользоваться схемой

$$\frac{\mathbf{y} - \check{\mathbf{y}}}{\tau} + 2A_1\mathbf{y} = \mathbf{f}, \qquad \frac{\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}}{\tau} + 2A_2\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}, \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{u}_0, \tag{19}$$

являющейся аналогом локально-одномерной схемы [6]. Эта схема имеет первый порядок точности и является экономичной.

Следует отметить, что условие (3) не является ограничением общности, если иметь в виду преобразование $u = ve^{\mu t}$, где $\mu = \mathrm{const} > 0$ произвольно. Достаточно лишь потребовать, чтобы $(A_\alpha \xi, \xi) \geqslant -\mathrm{const}\,\|\xi\|^2$, $\alpha = 1, 2$, $\mathrm{const} > 0$.

Для пп. 6 и 7 условие (3) необходимо.

6. Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений

$$A\mathbf{u} = A_1\mathbf{u} + A_2\mathbf{u} = f, \qquad A = (a_{ik}), \tag{20}$$

где A_1 и A_2 — треугольные положительно определенные матрицы.

Схему (5) можно использовать как итерационную процедуру для решения уравнений (20), считая y^j итерацией номера j.

Рассмотрим следующую итерационную схему:

$$(D + A_1)\,\mathbf{y} = (D - A_2)\,\check{\mathbf{y}} + \mathbf{f}, \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \tag{21}$$

$$(D + A_2)\,\mathbf{y} = (D - A_1)\,\mathbf{y} + \mathbf{f} \qquad D = \left(\frac{1}{\tau_{ik}}\right), \qquad \tau_{ii} > 0, \tag{22}$$

где $\mathbf{y}_0$ — произвольное начальное приближение, D — диагональная матрица, $\check{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{2j}$ — итерация номера $2j$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{2j+1}$, $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{2j+2}$. Если итерации находить по схеме (21), считая $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{j+1}$, $\check{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^j$, $j = 0, 1, \ldots$, то при $1/\tau_{ii} = a_{ii}/2$ мы получим метод Некрасова — Зейделя [7] (алгоритм «вниз»). Наряду с (21) можно рассматривать алгоритм «вверх» (22) (считая $\hat{y} = y^{j+1}$, $y = y^j$, $j = 0, 1, \ldots$). Из аналога формулы (6) следует, что попеременно-треугольный алгоритм (21) — (22) является более экономичным, чем каждый из алгоритмов (21) и (22) в отдельности.

Если A_1 и A_2 — линейные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, то метод (21) — (22) есть обобщение итерационного метода [4] решения разностной задачи Дирихле.

7. Для доказательства сходимости итераций надо оценить решение задачи Коши

$$(D + A_1)\,\mathbf{z} = (D - A_2)\,\check{\mathbf{z}}, \qquad (D + A_2)\,\hat{\mathbf{z}} = (D - A_1)\,\mathbf{z}, \qquad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \tag{23}$$

для погрешности $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — точное решение (20), $\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \check{\mathbf{y}}$ — итерации номеров $2j + 2$, $2j + 1$ и $2j$ ($j = 0, 1, \ldots$) соответственно. Если $\tau_{ii} = \mathrm{const} = \tau$, то мы будем пользоваться для оценки $\mathbf{z}$ нормой (9); в общем случае, когда $D = (1/\tau_{ik})$ — диагональная матрица, под $\|\mathbf{z}\|_\alpha^2$ понимается выражение

$$\|\mathbf{z}\|_\alpha^2 = \|D^{1/2}\mathbf{z}\|^2 + \|D^{-1/2}A_\alpha\,\mathbf{z}\|^2, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{24}$$

Теорема 3. *Если A_1 и A_2 удовлетворяют условию* (3), *то попеременно-треугольная схема* (21) — (22) *сходится со скоростью геометрической прогрессии*

$$\|\mathbf{y}^{2j} - \mathbf{u}\|_2 \leqslant \bar{\rho}\,\|\mathbf{y}^{2(j-1)} - \mathbf{u}\|_2, \qquad 0 < \bar{\rho} < 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

при любой положительно определенной диагональной матрице D.

Доказательство достаточно провести для $\tau_{ii} = \text{const} = \tau$. В силу леммы 1 из (23) получим

$$(1 + \sigma_1) \| z \|_1^2 \leqslant (1 - \sigma_2) \| \check{z} \|_2^2, \qquad (1 + \sigma_2) \| \hat{z} \|_2^2 \leqslant (1 - \sigma_1) \| z \|_1^2, \tag{26}$$

где σ_k дается формулой (10). Исключаем отсюда $\| z \|_1^2$:

$$\| \hat{z} \|_2^2 \leqslant \rho^2 \| \check{z} \|_2^2, \qquad \rho^2 = \frac{(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)}. \tag{27}$$

Так как $0 < \sigma_k \leqslant 1$ при $\tau > 0$, то $\rho^2 < 1$ всегда. Вводя $c_2 = \max(\| A_1 \|, \| A_2 \|)$, получим

$$\rho \leqslant \bar{\rho} = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}, \quad \text{где } \sigma = \frac{2c_1\tau}{1 + c_2^2 \tau^2}. \tag{28}$$

Минимум $\bar{\rho}$ достигается при

$$\tau = \tau_0 = 1/c_2 \tag{29}$$

и равен $\bar{\rho}_{\min} = (1 - \eta)/(1 + \eta)$, где $\eta = c_1/c_2$. Условие (29) удобно для практического использования. В общем случае $\sigma = 2c_1\tau_*/(1 + \tau^*)^2 c_2^2$, где $\tau_* = \min\limits_i \tau_{ii}$, $\tau^* = \max\limits_i \tau_{ii}$; для доказательства уравнения (23) записываются в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_{ii}}} z_i + \sqrt{\tau_{ii}} (A_1 z)_i = \frac{1}{\sqrt{\tau_{ii}}} \check{z}_i - \sqrt{\tau_{ii}} (A_2 \check{z})_i,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_{ii}}} \hat{z}_i + \sqrt{\tau_{ii}} (A_2 \hat{z})_i = \frac{1}{\sqrt{\tau_{ii}}} z_i - \sqrt{\tau_{ii}} (A_1 z)_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

вычисляется квадрат обычной нормы от обеих частей и используется аналог леммы 1:

$$2(z, A_\alpha z) \geqslant \sigma_\alpha \| z \|_\alpha^2, \qquad \sigma_\alpha = 2c_1\tau_*/(1 + \| A_\alpha \|^2 (\tau^*)^2), \qquad \alpha = 1, 2.$$

8. Замечание 1. Для каждого из алгоритмов (21) и (22) в отдельности получается оценка вида $\| z \|_\alpha^2 \leqslant \rho_\alpha \| \check{z} \|_\alpha^2$, где $\rho_\alpha = (1 - \sigma_\alpha)/(1 + \sigma_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$. Отсюда, в частности, следует сходимость метода Некрасова — Зейделя для любой матрицы A, представимой в виде суммы двух положительно определенных треугольных матриц, у которых $a_{ii}^- = a_{ii}^+ = a_{ii}/2$. Метод Некрасова сходится, вообще говоря, с той же скоростью, что и соответствующий попеременно-треугольный алгоритм (21)—(22) (ср. [7], гл. II, § 34), однако метод (21) — (22) экономичнее, так как для вычисления одной итерации в этом случае требуется $n^2 + 7n$ операций вместо $2n^2 + 5n$.

Замечание 2. Теорема 3 верна, если A_1 и A_2 — произвольные положительно определенные линейные операторы в гильбертовом пространстве H.

Замечание 3. Пусть A_α ($\alpha = 1, 2$) — самосопряженный конечномерный линейный оператор в H, $\lambda_1^{(\alpha)}$ и $\lambda_n^{(\alpha)}$ — его наименьшее и наибольшее собственные значения, $\lambda_1 = \min(\lambda_2^{(1)}, \lambda_1^{(2)}), \lambda_n = \max(\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)})$. Тогда $\lambda_1 \| \xi \|^2 \leqslant (\xi, A_\alpha \xi) \leqslant \lambda_n \| \xi \|^2$, и мы получим $\sigma = 2\lambda_1\tau/(1 + \tau^2\lambda_1\lambda_n)$, $\max \sigma = \sqrt{\eta}$, $\eta = \lambda_1/\lambda_n$, $\min \bar{\rho} = (1 - \sqrt{\eta})/(1 + \sqrt{\eta})$.

В частности, для разностной задачи Дирихле в квадрате $(0 \leqslant x_\alpha \leqslant 1, \alpha = 1,2)$

$$\lambda_1 = 4 \sin^2 \frac{\pi h}{2} \Big/ h^2, \quad \lambda_n = 4 \cos^2 \frac{\pi h}{2} \Big/ h^2$$

и итерации [4] сходятся со скоростью $\bar{\rho} = \left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi h}{2}\right) \Big/ \left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi h}{2}\right)$, так что число итераций $\sim 1/h$. Это совпадает с оценкой [8], полученной другим методом. Можно показать, что итерационная схема [4] обобщается на произвольную область.

9. Для системы уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A(t) u = f(t), \qquad u(0) = u_0, \qquad \frac{du}{dt}(0) = \bar{u}_0 \tag{30}$$

попеременно-трехугольная схема имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_{\bar{t}t} + \check{A}_1 y + \check{A}_2 \check{y} = \check{f}, \qquad \hat{y}_{\bar{t}t} + A_1 \check{y} + A_2 \hat{y} = f, \\ y(0) = u_0, \qquad y(\tau) = \tilde{u}_0, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где

$$y_{\bar{t}\bar{t}} = y^{2j+1}_{\bar{t}t}, \qquad \hat{y}_{\bar{t}\bar{t}} = y^{2j+2}_{\bar{t}t}, \qquad y^{j+1}_{\bar{t}t} = (y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1})/\tau^2,$$

$$\check{y} = y^{2j-1}, \qquad \tilde{u}_0 = u_0 + \tau\bar{u}_0 + 0.5\,\tau^2 (A(0)\,u_0 - f(0)).$$

Если A — симметричная матрица, $A_1^* = A_2$, то схема имеет второй порядок точности.

Поступила в редакцию
9.01.1964

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 2, 266—298.
2. A. N. Tikhonov, A. A. Samarsky. On the theory of homogeneous difference schemes. Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on Partial Differential Equations, 1963, August, Novosibirsk, 266—274.
3. A. A. Samarsky. On numerical methods of solving multi-dimensional problems. Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on Partial Differential Equations, 1963, August, Novosibirsk, 236—240.
4. D. W. Peaceman, H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J. Industr. Math. Soc., 1955, 3, № 1, 28—41.
5. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
6. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 787—811.
7. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М.— Л., Гостехиздат, 1963.
8. M. Lees. A note on the convergence of alternating direction methods. Math. Comput., 1962, 16, № 7, 70—75.

УДК 518:517.944/.947

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА I

Е. О. ОМАРОВ

(*Караганда*)

В данной статье рассматривается решение краевой задачи

$$\Delta^2 u + a\Delta u + bu = f(x, y), \tag{1}$$

$$u|_s = g_1(s), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right| = g_2(s) \tag{2}$$

в некоторой плоской прямоугольной области G методом прямых (функции $g_1(s)$, $g_2(s)$ и их производные на контуре считаются непрерывными); предполагается, что данная задача имеет единственное решение. Многие задачи математической физики сводятся