УДК 518:517.944/.947

ЭКОНОМИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

1. Для построения экономичных разностных схем для систем параболического и гиперболического типа мы используем принцип аддитивности, согласно которому решение операторного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(t)\, u = f(t)$$

сводится к последовательному решению уравнений

$$\frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial t} + A_\alpha u = f_\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots, m, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha = f.$$

Принцип аддитивности был использован нами при построении локально-одномерных схем [1], [2], [4]. Здесь мы приводим аддитивные схемы для систем параболических уравнений с несколькими пространственными переменными. Относящиеся сюда результаты докладывались на Советско-американском симпозиуме по дифференциальным уравнениям в Новосибирске (август 1963 г.) и частично изложены в [2]—[5].

2. Пусть G есть p-мерная область изменения $x = (x_1, \ldots, x_p)$ с границей Γ. В цилиндре $\overline{Q}_T = (G + \Gamma)\times[0 \leqslant t \leqslant T]$ ищется решение параболической системы уравнений без смешанных производных

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha \mathbf{u} + \mathbf{f}(x, t) \text{ в } Q_T = G\times(0 < t \leqslant T]; \tag{1}$$

$$\mathbf{u}|_\Gamma = \boldsymbol{\mu}(x, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in G + \Gamma,$$

где $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n)$, $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^n)$ и $\boldsymbol{\mu}$ — векторы,

$$L_\alpha \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_\alpha}\right),$$

$k_\alpha = (k_\alpha^{is})$ — квадратная матрица $n \times n$.

Для упрощения редакции младшие члены в L_α, содержащие $\partial\mathbf{u}/\partial x_\alpha$, $\mathbf{u}$, опускаем. Их учет проводится без каких-либо принципиальных трудностей. Будем предполагать, как обычно, что задача (1) имеет единственное решение, обладающее всеми необходимыми по ходу изложения производными.

Представим k_α в виде суммы двух треугольных матриц k_α^- и k_α^+ и соответственно положим $L_\alpha = L_\alpha^- + L_\alpha^+$. Будем предполагать, что матрицы k_α^- и k_α^+ положительны, т. е

$$\sum_{i, s=1}^{n} (k_\alpha^{\mp})^{is}\xi_i\xi_s \geqslant 0$$

для любого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi \neq 0$.

Введем разностные сетки ω_h на G и $\omega_\tau = \{t_j = j\tau \in [0, T]\}$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$; пусть $\gamma_h \in \Gamma$ — граница ω_h, т. е. $\omega_h = \omega_h^{(2)}$ (см. [2]). Остальные обозначения см. [2]. Обозначим через $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^i, \ldots, y^n)$ сеточную вектор-функцию, заданную на $(\omega_h + \gamma_h)\times\omega_\tau$.

Пусть $\Lambda_\alpha^{\mp}\mathbf{y} = (a_\alpha^{\mp}\mathbf{y}_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}$ — однородная разностная схема 2-го порядка аппроксимации для оператора $L_\alpha^{\mp}\mathbf{u}$; здесь a_α^- и a_α^+ — треугольные матрицы, определяемые через k_α^- и k_α^+ при помощи линейного положительного шаблонного функционала и потому удовлетворяющие тому же условию положительности, что и k_α^- и k_α^+:

$$\sum_{i, s=1}^{n} (a_\alpha^{\mp})^{is}\xi_i\xi_s \geqslant 0 \tag{2}$$

на любой сетке ω_h.

3. Введем промежуточные значения $y_{(1)}, \ldots, y_{(\alpha)}, \ldots, y_{(p)}, y_{(p+1)}, \ldots, y_{(2p+1-\alpha)}, \ldots$ $\ldots, y_{(2p-1)}$, полагая $y_{(2p)} = y = y(x_i, t_{j+1})$, $y_{(0)} = \check{y} = y(x_i, t_j)$. Аддитивная схема для задачи (1) имеет вид

$$y_{\bar{t}_\alpha} = \frac{y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha^- y_{(\alpha)} + \varphi_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, p, \quad y_{(\alpha)}|_{\gamma_h^\alpha} = \mu^\alpha = \mu|_{\gamma_{h,t}^\alpha \in \omega_\tau}, \tag{3}$$

$$y_{\bar{t}_{\alpha'}} = \Lambda_\alpha^+ y_{(\alpha')} + \varphi_{\alpha'},$$

$$\alpha' = 2p + 1 - \alpha = p + 1, \ldots, 2p,$$

$$y_{(\alpha')} = \mu \text{ при } x \in \gamma_h^\alpha, \quad y(x, 0) = u_0(x). \tag{4}$$

Здесь $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t^*)$ — разностная аппроксимация f_α, $\sum\limits_{\alpha=1}^{2p} f_\alpha = f$, коэффициенты $a_\alpha^\mp = a_\alpha^\mp(x, t^*)$ берутся в момент $t^* \in [t_j, t_{j+1}]$, например $t^* = t_{j+1}$.

Для определения $y_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, p, p+1, \ldots, 2p$, надо обратить треугольно-трехточечные операторы $E - \tau\Lambda_\alpha^-$ при $\alpha \leqslant p$ и $E - \tau\Lambda_{2p+1-\alpha}^+$ при $\alpha > p$. Это достигается при помощи формул обращения трехдиагональных матриц (одномерной прогонки). Поэтому схема (3) экономична. Для определения y на новой строке $t = t_{j+1}$ требуется $O(n^2 N_p)$ действий, где N_p — число узлов сетки ω_h, так же как и для явной схемы.

Схема (3) абсолютно устойчива и сходится в норме $\mathscr{L}_2(\omega_h)$ на произвольной неравномерной сетке $\omega_h \times \omega_\tau$. Для скорости сходимости получена оценка $O(\|h^2\| + \sqrt{\tau})$, где $\|h\|$ — средний квадратичный шаг сетки ω_h. Условия, обеспечивающие максимальный порядок аппроксимации здесь и ниже, не приводим (см. [1], [2]).

4. Рассмотрим теперь задачу (1) для системы параболических уравнений со смешанными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha, \beta=1}^{p} L_{\alpha\beta} u + f(x, t), \qquad L_{\alpha\beta} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right), \tag{5}$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t) \qquad u(x, 0) = u_0(x),$$

где $k_{\alpha\beta} = (k_{\alpha\beta}^{is}(x, t))$ — клеточные матрицы $p \times p$ с клетками $n \times n$, G— область, составленная из параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям. Будем предполагать, что сетка ω_h равномерна по каждому из x_α, $\alpha = 1, \ldots, p$, и выполнены условия

$$k_{\alpha\beta}^{ij} = k_{\beta\alpha}^{ji}; \tag{6}$$

$$\sum_{i, s=1}^{n} \sum_{\alpha, \beta=1}^{p} k_{\alpha\beta}^{is} \xi_\alpha^i \xi_\beta^j \geqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{p} (\xi_\alpha^i)^2, \quad c_1 = \text{const} > 0. \tag{7}$$

Положим $(k_{\alpha\beta}) = (k_{\alpha\beta-}) + (k_{\alpha\beta+})$, где $k_{\alpha\beta\mp}$ — треугольные по α и β матрицы, $k_{\alpha\alpha-} = k_{\alpha\alpha+} = \frac{1}{2} k_{\alpha\alpha}$. Оператору $L_{\alpha\beta\mp}$ ставим в соответствие разностную схему 2-го порядка аппроксимации, например вида (см. [3], [1])

$$\Lambda_{\alpha\beta} y_{(\beta)} = \frac{1}{2}\left[(a_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (a_{\alpha\beta}^{(+1_\beta)} y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}\right], \quad a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(x, t^*), \qquad t^* \in [t_j, t_{j+1}]. \tag{8}$$

Для решения задачи (5) используем схему того же типа, что и (3):

$$y_{\bar{t}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta-} y_{(\beta)} + \varphi_\alpha, \quad y_{\bar{t}_{\alpha_1}} = \sum_{\beta=\alpha}^{p} \Lambda_{\alpha\beta+} y_{(\beta_1)} + \varphi_{\alpha_1}, \tag{9}$$

где $\alpha_1 = 2p + 1 - \alpha$, $\beta_1 = 2p + 1 - \beta$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$;

$$y_{(\alpha)} = y_{(\alpha_1)} = \mu \text{ при } x \in \gamma_h^\alpha, \quad y(x, 0) = u_0(x). \tag{10}$$

Для определения y требуется решить $2p$ одномерных параболических систем методом матричной прогонки. При этом требуется $O(n^3 N_p)$ операций. Показано, что схема (9) устойчива и сходится в норме $\mathscr{L}_2(\omega_h)$ со скоростью $O(|h|^2 + \sqrt{\tau})$ при одном дополнительном условии: шаги h_α сетки ω_h столь малы, $|h| \leqslant h_0$, $|h| =$

$= \left(\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \right)^{1/2}$, что для $a^{is}_{\alpha\beta-}$ и $a^{is}_{\alpha\beta+}$ выполнено неравенство (7), в котором $k^{is}_{\alpha\beta}$ заменено $a^{is}_{\alpha\beta\pm}$, а c_1 — постоянной $c_1' < 0.5c_1$. При $k_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}(t)$ условие $|h| \leqslant h_0$ не нужно.

Ниже приводится более экономичная схема с $O(n^2N_p)$ действий, использующая лишь одномерные прогонки.

5. Элементами матриц $(k_{\alpha\beta-})$ и $(k_{\alpha\beta+})$ являются матрицы $\varkappa_{\mp} = (k^{is}_{\alpha\beta\mp})$. Представим их, в свою очередь, в виде суммы треугольных матриц $\varkappa_{\mp} = \varkappa^{-}_{\mp} + \varkappa^{+}_{\mp}$, причем $\varkappa^{is-}_{\mp} = k^{is-}_{\alpha\beta\mp} = 0$ при $s > i$, $\varkappa^{is+}_{\mp} = k^{is+}_{\alpha\beta\mp} = 0$ при $s < i$, $k^{ii+}_{\alpha\beta\pm} = \frac{1}{2} k^{ii}_{\alpha\beta\pm}$. Оператор $L_{\alpha\beta}$ с матрицей $(k^{is\pm}_{\alpha\beta\pm})$ обозначим через $L^{is\pm}_{\alpha\beta\pm}$. Ему соответствует разностная схема $\Lambda^{is\pm}_{\alpha\beta\pm}$. Пусть

$$(\Lambda^{-}_{\alpha\beta\pm}\mathbf{y})_i = \sum_{s=1}^{i} \Lambda^{is-}_{\alpha\beta\pm} y^s, \qquad (\Lambda^{+}_{\alpha\beta\pm}\mathbf{y})_i = \sum_{s=i}^{n} \Lambda^{is+}_{\alpha\beta\pm} y^s$$

(индекс i слева будем опускать, записывая уравнения для векторов).

Экономичная аддитивная схема имеет вид

$$\begin{gathered} \mathbf{y}_{\bar{t}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda^{-}_{\alpha\beta-} \mathbf{y}_{(\beta)} + \varphi_\alpha, \qquad \mathbf{y}_{\bar{t}_{\alpha_1}} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda^{+}_{\alpha\beta-} \mathbf{y}_{(\beta_1)} + \varphi_{\alpha_1}, \\ \mathbf{y}_{\bar{t}_{\alpha_2}} = \sum_{\beta=\alpha}^{p} \Lambda^{+}_{\alpha\beta+} \mathbf{y}_{(\beta_2)} + \varphi_{\alpha_2}, \qquad \mathbf{y}_{\bar{t}_{\alpha_3}} = \sum_{\beta=\alpha}^{p} \Lambda^{-}_{\alpha\beta+} \mathbf{y}_{(\beta_3)} + \varphi_{\alpha_3}, \qquad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\mathbf{y}_{(\alpha)} = \mathbf{y}_{(\alpha_k)} = \boldsymbol{\mu} \text{ при } x \in \gamma_h^\alpha, \quad t \in \omega_\tau, \quad k = 1, 2, 3; \ \mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x),$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, $\alpha_k = kp + 1, \ldots, (k+1)p$, $k = 1, 2, 3$; $\alpha_k = (k+1)p + 1 - \alpha$, $\beta_k = (k+1)p + 1 - \beta$, φ_{α_k} аппроксимируют функции $\mathbf{f}_{\alpha_k}$, $\alpha_0 = \alpha$, $k = 0, 1, 2, 3$,

$$\sum_{k=0}^{3} \sum_{\alpha=1}^{p} \mathbf{f}_{\alpha_k} = \mathbf{f}; \quad \mathbf{y}_{(0)} = \check{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(x, t_j), \quad \mathbf{y}_{(4p)} = \mathbf{y} = \mathbf{y}(x\ t_{j+1}).$$

Всего вводится $4p - 1$ промежуточное значение $\mathbf{y}_{(\alpha_k)}$. Для определения вектора $\mathbf{y}$ на слое $t = t_{j+1}$ надо последовательно обратить на ω_h четыре треугольно-трехточечных оператора $E - \tau \sum_\beta \Lambda^{\pm}_{\alpha\beta\pm}$, что требует $O(n^2N_p)$ действий.

Пусть выполнено условие

$$\sum_{i,\, s=1}^{n} \sum_{\alpha,\, \beta=1}^{p} k^{is\pm}_{\alpha\beta-} \xi^i_\alpha \xi^j_\beta \geqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{p} (\xi^i_\alpha)^2, \qquad c_1 = \text{const} > 0. \tag{12}$$

Тогда, в силу (6), оно будет выполнено и для матриц $(k^{is\mp}_{\alpha\beta+})$. Из определения $(a^{is\pm}_{\alpha\beta\pm})$ и из (12) следует (см. [3])

$$\sum_{i,\, s=1}^{n} \sum_{\alpha,\, \beta=1}^{p} a^{is\pm}_{\alpha\beta-} \xi^i_\alpha \xi^i_\beta \geqslant c_1' \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{p} (\xi^i_\alpha)^2, \qquad c_1' = \text{const}, \qquad c_1' < c_1 \tag{13}$$

при достаточно малом $|h| \leqslant h_0(c_1')$.

Методами [2] можно показать, что *схема* (11) *при условии* (13) *безусловно устойчива* в норме $\mathscr{L}_2(\omega_h)$ *и сходится* со скоростью $O(|h|^2 + \sqrt{\tau})$. Если коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ не зависят от x, то условие $|h| \leqslant h_0$ становится излишним.

З а м е ч а н и е 1. Методы расщепления позволяют свести многомерную задачу (см., например, [6]) (1) или (5) к p одномерным системам, для решения которых нужно пользоваться, например, матричной прогонкой. Для схемы расщепления требования на коэффициенты уравнения значительно более жесткие, чем для аддитивных схем (9).

З а м е ч а н и е 2. Принцип аддитивности позволяет написать экономичные схемы и для гиперболических систем второго порядка (см. [4]).

Поступила в редакцию
8.06.1964

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 549—565.
2. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431—466.
3. А. А. Самарский. Экономичные разностные схемы для уравнений параболического типа со смешанными производными. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, 753—759.
4. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, 638—648.
5. A. A. Samarsky. On numerical methods of solving multi-dimensional problems. Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on Partial Differential Equations, August 1963. Novosibirsk, 236, 240.
6. J. Douglas, Jr, J. E. Gunn. Alternating direction methods for parabolic systems in m space variables. J. Assoc. Comput. Machinery, 1962, 9, № 4, 450—456.

УДК 518:517.944/.94

МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КОШИ — РИМАНА

Г. П. ПРОКОПОВ

(*Москва*)

В последние годы довольно широкую известность приобрели методы переменных направлений для численного интегрирования параболических и эллиптических дифференциальных уравнений с несколькими пространственными переменными (см., например, [1] — [4]). В настоящей заметке делается попытка перенести эти методы на систему эллиптических уравнений на простейшем примере задачи Гильберта, которая заключается в определении двух функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, удовлетворяющих системе Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

и граничному условию

$$\alpha(s)\, u + \beta(s)\, v = f(s) \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0). \tag{2}$$

1. Разностная аппроксимация уравнений Коши — Римана. Рассмотрим на плоскости (x, y) квадратную сетку с узлами в точках $x = nh$, $y = mh$. Будем пользоваться обычными обозначениями:

$$f(nh, mh) = f_{n,m},$$

$$\frac{f_{n+1,m} - f_{n,m}}{h} = \Delta_x f_{n,m}, \qquad \frac{f_{n,m+1} - f_{n,m}}{h} = \Delta_y f_{n,m},$$

$$\frac{f_{n,m} - f_{n-1,m}}{h} = \Delta_{\bar{x}} f_{n,m}, \qquad \frac{f_{n,m} - f_{n,m-1}}{h} = \Delta_{\bar{y}} f_{n,m}.$$

В этих обозначениях избранная нами разностная аппроксимация уравнений (1) для узла сетки (n, m) выглядит так:

$$\Delta_x u_{n,m} - \Delta_{\bar{y}} v_{n,m} = 0, \qquad \Delta_{\bar{x}} v_{n,m} + \Delta_y u_{n,m} = 0. \tag{3}$$

Такая аппроксимация системы Коши—Римана была изучена на семинаре И. М. Гельфанда в 1954 г. (Доложена О. В. Локуциевским на Всесоюзном совещании по функциональному анализу в Москве в 1956 г.).