Доклады Академии наук СССР
1963. Том 149, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Неоднократно высказывалась гипотеза, что если разностная схема устойчива в классе постоянных коэффициентов, то она устойчива и в классе переменных коэффициентов. В данной заметке приводится пример, показывающий, что эта гипотеза неверна, если в качестве класса переменных коэффициентов брать кусочно-непрерывиые и кусочно-дифференцируемые функции *

1. Рассмотрим неявную разностную схему:

$$\frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} = \frac{1}{h^2}\left[b_i\left(y_{i+1}^j - y_i^j\right) - a_i\left(y_i^j - y_{i-1}^j\right)\right] = L_h y_i^j, \quad 0 < i < N, \ j > 0, \tag{1}$$

и первую краевую задачу, ей соответствующую:

$$y_0^j = y_N^j = 0, \quad j \geqslant 0; \tag{2}$$

$$y_i^0 = \varphi_i, \quad 0 < i < N, \tag{3}$$

где φ_i — заданные начальные значения, причём

$$a_i = k_i - {}^1/_4\,(k_{i+1} - k_{i-1}), \quad b_i = k_i + {}^1/_4\,(k_{i+1} - k_{i-1}), \tag{4}$$

h и τ — шаги разностной сетки ($x_i = ih$, $t_j = j\tau$, $i = 0, 1, \ldots, N$; $j = 0, \ldots, m$, $h = 1/N$, $\tau = T/m$).

Эта схема соответствует уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < 1, \ 0 < t \leqslant T, \ k(x) > 0, \tag{5}$$

в чем легко убедиться, если переписать ее в виде

$$\frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} = k_i\,\frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h}\,\frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h}.$$

Разностная схема (1) с условиями (2) и (3) устойчива в классе непрерывных коэффициентов при достаточно малом h и любых τ, так как в этом случае $a_i > 0$, $b_i > 0$ и справедлив принцип максимального значения, откуда и следует равномерная по h корректность.

2. Будем искать решение разностных уравнений (1) с условиями (2) в виде $y_i^j = s^j v_i$. Для функции v_i получаем задачу на собственные значения

$$L_h v_i = -\hat{\lambda} v_i, \quad 0 < i < N, \quad v_0 = v_N = 0$$

или

$$L_h h v_i = \lambda v_i, \quad v_0 = v_N = 0 \quad (\lambda = -\hat{\lambda}), \tag{6}$$

где $\lambda = (s - 1)/s\tau$, так что $s = 1/(1 - \lambda\tau)$.

Пусть $k(x) > 0$ — кусочно-постоянная функция

$$k(x) = \begin{cases} k_1 \text{ при } & x < \xi = x_n + \theta h, \ 0 < \theta < 1, \\ k_2 \text{ при } & x > \xi, \end{cases} \tag{7}$$

где ξ — точка разрыва $k(x)$ — иррациональна.

* Основной результат этой работы был изложен в докладе на IV Всесоюзном математическом съезде в 1961 г.

Будет показано, что если

$$q_0 = \frac{a_n a_{n+1}}{\sqrt{k_1}} + \frac{b_n b_{n+1}}{\sqrt{k_2}} \tag{8}$$

отрицательно, то при достаточно малом $h < h_0$ задача (6) имеет положительное собственное значение λ_0, причем $\lambda_0 > z_0/h$, где z_0 — произвольная положительная постоянная. Отсюда будет следовать, что при $q_0 < 0$

$$s^m = s^{T/\tau} \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} e^{\lambda_0 T} \geqslant e^{z_0 T/h} \quad (m\tau = T).$$

Для нашей схемы

$$q_0 = \frac{k_1^2}{\sqrt{k_2}} \left\{ \left[1 - \frac{1}{4}(\varkappa - 1)\right]\left[\varkappa - \frac{1}{4}(\varkappa - 1)\right]\sqrt{\varkappa} + \right.$$
$$\left. + \left[1 + \frac{1}{4}(\varkappa - 1)\right]\left[\varkappa + \frac{1}{4}(\varkappa - 1)\right]\right\},$$

где $\varkappa = k_2/k_1$.

Если $k_2 > k_1$ $(\varkappa > 1)$, то все квадратные скобки, кроме первой, положительны; если $\varkappa > 5$, то первая скобка отрицательна и первое слагаемое внутри фигурных скобок также отрицательно. Так как степень по $\varkappa$ первого слагаемого равна $^5/_2$, а второго 2, то ясно, что существует такое $\varkappa_0$, что $q_0 < 0$ при $\varkappa > \varkappa_0$ (приближенное значение $\varkappa_0 \simeq 11{,}88\ldots$).

3. Нетрудно проверить, что функция

$$v_i = \begin{cases} \nu_1 \operatorname{sh} \alpha x_i / \operatorname{sh} \alpha x_n & \text{при } i \leqslant n, \\ \nu_2 \operatorname{sh} \beta (1 - x_i)/\operatorname{sh} \beta (1 - x_{n+1}) & \text{при } i \geqslant n + 1 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям задачи (6) для $i < n$ и $i > n + 1$, если выполнены условия

$$\lambda h^2 = 4k_1 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha h}{2} = 4\, k_2 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta h}{2}. \tag{9}$$

Значения ν_1 и ν_2 определяются из уравнений (6) при $i = n$ и $i = n + 1$, а λ — из условия разрешимости этих уравнений относительно ν_1 и ν_2.

Введем обозначения

$$\mu_1 = (\operatorname{sh} \alpha x_n - \operatorname{sh} \alpha x_{n-1})/\operatorname{sh} \alpha x_n;$$
$$\mu_2 = [\operatorname{sh} \beta (1 - x_{n+1}) - \operatorname{sh} \beta (1 - x_{n+2})]/ \operatorname{sh} \beta(1 - x_{n+1})$$

и запишем уравнения (6) для $i = n,\ n + 1$ в виде

$$(\lambda h^2 + b_n + a_n\mu_1)\, \nu_1 - b_n\nu_2 = 0,$$
$$- a_{n+1}\nu_1 + (\lambda h^2 + a_{n+1} + b_{n+1}\, \mu_2)\, \nu_2 = 0.$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, получим уравнение для λ:

$$F(\lambda, h) = \lambda^2 h^4 + p\lambda h^2 + q = 0,$$

где

$$p = b_n + a_{n+1} + a_n\, \mu_1 + b_{n+1}\mu_2,$$
$$= a_n a_{n+1}\mu_1 + b_n b_{n+1}\mu_2 + a_n b_{n+1}\mu_1\mu_2. \tag{10}$$

Требуется доказать, что при выполнении условия $q_0 < 0$ для любого z_0 найдется λ_0 — корень уравнения $F(\lambda, h) = 0$, причем $\lambda_0 > z_0/h$.

4. Нетрудно видеть, что $0 < \mu_1 < 1$, $0 < \mu_2 < 1$. Отсюда следует ограниченность p и q при заданных k_1 и k_2. Рассмотрим произвольные числа z_1 и z_0 такие, что $z_1 < z_0$. Заменим λ на z, полагая $z = \lambda h$; при этом функция $F(\lambda, h)$ преобразуется в функцию

$$\overline{F}(z, h) = F(\lambda, h) = z^2 h^2 + pzh + q.$$

В п. 5 будет доказано, что

$$q = q_0 \sqrt{zh}\,(1 + O(h)) + O(h), \tag{11}$$

где q_0 определяется формулой (8). Если $q_0 < 0$ ($\varkappa > \varkappa_0$), то при достаточно малом $h < h_0$

$$\overline{F}(z, h) < 0 \text{ при } z_1 \leqslant z \leqslant z_0.$$

С другой стороны, при любом h, в силу ограниченности p, q,

$$\overline{F}(z, h) > 0 \quad \text{при } z > Z(h) > z_0,$$

откуда следует, что при $q_0 < 0$ найдется корень уравнения $\overline{F}(z, h) = 0$, удовлетворяющий условию $z > z_0$, или корень уравнения $F(\lambda, h) = 0$, для которого $\lambda > z/h$, что и доказывает неустойчивость схемы (1) при $\varkappa > \varkappa_0$.

5. Докажем асимптотическое равенство (11). Очевидно, что для значений α и β, определяемых равенствами

$$zh = 4k_1 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha h}{2} = 4k_2 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta h}{2} \tag{9'}$$

в интервале $z_1 \leqslant z \leqslant z_0$ имеют место асимптотические равенства по h

$$\alpha h = \sqrt{\frac{zh}{k_1}}(1 + O(h)), \quad \beta h = \sqrt{\frac{zh}{k_2}}(1 + O(h)). \tag{12}$$

Кроме того, при $z_1 \leqslant z \leqslant z_0$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha h}{2} \operatorname{ch} \alpha (x_n - 0{,}5\, h) \,/\, \operatorname{sh} \alpha x_n = \\ &= \alpha h\, [1 + O(\alpha^2 h^2)] = \alpha h\, [1 + O(h)] \end{aligned} \tag{13}$$

и аналогично

$$\mu_2 = \beta h\, (1 + O(h)). \tag{13'}$$

Подставляя равенства (13), (13') в выражение (10) для q, получаем

$$q = \left(\frac{a_n a_{n+1}}{\sqrt{k_1}} + \frac{b_n b_{n+1}}{\sqrt{k_2}}\right)\sqrt{zh}\,(1 + O(h)) + O(h) = q_0 \sqrt{zh}\,(1 + O(h)) + O(h),$$

где q_0 определяется формулой (8).

Таким образом доказана неустойчивость схемы (1) при $\varkappa = k_2/k_1 > \varkappa_0$ и достаточно малом $h < h_0$.

Нетрудно убедиться (ср. ([1])), что в тех случаях, когда схема (7) для кусочно-постоянных коэффициентов $k(x)$ сходится, предельная функция для y_i^j будет отлична от решения соответствующей краевой задачи для дифференциального уравнения (5). Для сходимости в классе разрывных коэффициентов схемы

$$\frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} = L_h y_i^j$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор $L_h y_i$ был консервативным (самосопряженным), т. е. чтобы $b_i = a_{i+1}$ (см. ([1])).

Поступило
29 XII 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1, № 1, 5 (1961).