

ОБ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

1. В [1], [2] для задачи

$$L^{(p, q, f)} u = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right) - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u_1, \\ u'(1) = u_2, \\ 0 < c_1' \leq p(x) \leq c_1, \quad 0 \leq q(x) \leq c_2, \quad |f(x)| \leq c_3, \quad (1)$$

была построена однородная трехточечная разностная схема, дающая точное решение задачи (1) на произвольной неравномерной сетке $\omega_N = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N = 1\}$ в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $p(x), q(x), f(x)$ ($p, q, f \in Q^{(0)}$). Там же рассматривались усеченные схемы m -го ранга, которые обеспечивают точность $O(\|h\|_0^{2m+2})$, где $\|h\|_0 = \max_{\omega_N} h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$ при дополнительных условиях

$$0 < M_1 \leq h_{i+1}/h_i \leq M_2, \quad \|h\|_0 \leq h_0, \quad (2)$$

где M_1, M_2, h_0 — положительные постоянные, не зависящие от выбора сетки.

Данная заметка является развитием статьи [1]. Показано, что основные оценки работы [1] сохраняют силу без дополнительных условий (2). В случае схемы нулевого ранга характеристикой точности схемы является средний квадратичный шаг сетки

$$\|h\|_2 = (1, h^2)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^N h_i^2 h_i \right)^{1/2}.$$

Показано, что схема нулевого ранга всегда имеет точность $O(\|h\|_2^2)$ в классе $p, q, f \in Q^{(0)}$. В [3] был исследован вопрос о точности стандартных схем на неравномерных сетках. Выбирая усеченную схему нулевого ранга в качестве эталонной схемы и пользуясь теоремой 3 о сравнении решений разностных краевых задач, удастся усилить результаты работы [3]. При этом мы не пользуемся проведенным в [3] детальным изучением структуры погрешности аппроксимации.

2. Итак, пусть $\omega_N = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N = 1\}$ — произвольное разбиение отрезка $0 \leq x \leq 1$ на N частей, $h_i = x_i - x_{i-1}$ — шаг сетки,

y_i — сеточная функция, заданная на ω_N . Введем обозначения (см. [3])

$$y = y(x) = y_i, \quad y^{(\pm 1)} = y_{i \pm 1}, \quad h = h_i, \quad h_{+1} = h_{i+1}, \quad \bar{h} = 0.5(h + h_{+1}).$$

$$y_{\bar{x}} = (y - y^{(-1)})/h, \quad y_x = (y^{(+1)} - y)/h_{+1}, \quad y_{\hat{x}} = (y^{(+1)} - y)/\bar{h},$$

$$(y, v)^* = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i \bar{h}_i, \quad (y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h_i, \quad \|y\|_0 = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|,$$

$$\|y\|_1 = (1, |y|], \quad \|y\|_1^* = (1, |y|)^*, \quad \|y\|_2 = \sqrt{(1, y^2]}.$$

Отметим, что шаг h_i разностной сетки является произвольной сеточной функцией, удовлетворяющей лишь естественному условию нормировки

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1.$$

3. Точная схема является консервативной схемой вида:

$$L_h^{(p, a, f)} y = (a_T y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - d_T y + \varphi_T = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2. \quad (3)$$

Ее коэффициенты a_T, d_T, φ_T суть функционалы коэффициентов дифференциального уравнения (1). При построении схемы (3) в [1] проводится преобразование сдвига $x = x_i + (s - \Delta_i) \bar{h}_i = \bar{x}_i + s \bar{h}_i, -1 \leq s \leq 1$, где

$$\Delta_i = -(h_{i+1} - h_i)/2\bar{h}_i, \quad \bar{x}_i = x_i - \Delta_i \bar{h}_i,$$

так что $s = -1$ при $x = x_{i-1}$, $s = \Delta$ при $x = x_i$, $s = 1$ при $x = x_{i+1}$.

Функции $p(x), q(x), f(x)$ рассматриваются в местной системе координат с началом в точке x_i как функции s :

$$\bar{p}(s) = p(\bar{x} + s\bar{h}), \quad \bar{q}(s) = q(\bar{x} + s\bar{h}), \quad \bar{f}(s) = f(\bar{x} + s\bar{h}), \quad x \in \omega_N.$$

Коэффициенты a_T, d_T, φ_T определяются по формулам (19)–(21) работы [1]:

$$a_T = \frac{\bar{h}}{h} v_1(\Delta, \bar{h}), \quad a_T^{(+1)} = \frac{\bar{h}}{h_{+1}} v_2(\Delta, \bar{h}), \quad (4)$$

$$d_T = \frac{\bar{h}}{h a_T} \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) v_1(s, \bar{h}) ds + \frac{\bar{h}}{h_{+1} a_T^{(+1)}} \int_{\Delta}^1 \bar{q}(s) v_2(s, \bar{h}) ds, \quad (5)$$

$$\varphi_T = \left(\bar{h} d + \frac{1}{h a_T} + \frac{1}{h_{+1} a_T^{(+1)}} \right) \bar{h} v_3(\Delta, \bar{h}). \quad (6)$$

4. Здесь $v_j(s, \bar{h})$ $j = 1, 2, 3$ — так называемые шаблонные функции, для отыскания которых надо решить задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{p(s)} \frac{dv_j}{ds} \right) - \bar{h}^2 \bar{q}(s) v_j &= 0, \quad -1 < s < 1, \quad j = 1, 2, \\ v_1(-1, \bar{h}) &= 0, \quad \frac{1}{p(-1)} \frac{dv_1}{ds}(-1, \bar{h}) = 1; \\ v_2(1, \bar{h}) &= 0, \quad \frac{1}{p(1)} \frac{dv_2}{ds}(1, \bar{h}) = -1; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{p(s)} \frac{dv_3}{ds} \right) - \bar{h}^2 \bar{q}(s) v_3 = -\bar{f}(s), \quad -1 < s < 1, \quad v_3(\pm 1, \bar{h}) = 0. \quad (8)$$

Для функций $v_1(s, \hbar)$ и $v_2(s, \hbar)$ в [1] были установлены тождества $v_1(1, \hbar) = v_2(-1, \hbar)$,

$$v_1(1, \hbar) - v_1(\Delta, \hbar) - v_2(\Delta, \hbar) = \hbar^2 \left\{ v_2(\Delta, \hbar) \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) v_1(s, \hbar) ds + v_1(\Delta, \hbar) \int_{\Delta}^1 \bar{q}(s) v_2(s, \hbar) ds \right\}. \quad (9)$$

Учитывая (4), перепишем формулу (5) в виде

$$d = \frac{1}{v_1(\Delta, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} \bar{q}(s) v_1(s, \hbar) ds + \frac{1}{v_2(\Delta, \hbar)} \int_{\Delta}^1 \bar{q}(s) v_2(s, \hbar) ds. \quad (10)$$

Отсюда видно, что тождество (9) можно записать следующим образом:

$$v_1(1, \hbar) = v_1(\Delta, \hbar) + v_2(\Delta, \hbar) + \hbar^2 d v_1(\Delta, \hbar) v_2(\Delta, \hbar). \quad (11)$$

5. Покажем теперь, что Φ_T вычисляется по формуле

$$\Phi_T = \frac{1}{v_1(\Delta, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} \bar{f}(s) v_1(s; \hbar) ds + \frac{1}{v_2(\Delta, \hbar)} \int_{\Delta}^1 \bar{f}(s) v_2(s; \hbar) ds, \quad (12)$$

или

$$\Phi_T = F[p(\bar{x} + s\hbar), q(\bar{x} + s\hbar); f(\bar{x} + s\hbar)].$$

Отсюда и из (11) будет следовать

$$d_T = F[p(\bar{x} + s\hbar), q(\bar{x} + s\hbar); q(\bar{x} + s\hbar)].$$

Вводя функцию Грина задачи (8)

$$G(s, t) = \begin{cases} v_1(s; \hbar) v_2(t; \hbar) / v_1(1; \hbar), & s \leq t, \\ v_2(s; \hbar) v_1(t; \hbar) / v_1(1; \hbar), & s \geq t, \end{cases} \quad (13)$$

найдем

$$v_3(\Delta, \hbar) = \frac{v_2(\Delta, \hbar)}{v_1(1, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} v_1(s; \hbar) \bar{f}(s) ds + \frac{v_1(\Delta; \hbar)}{v_1(1; \hbar)} \int_{\Delta}^1 v_2(s; \hbar) \bar{f}(s) ds. \quad (14)$$

(Обратимся теперь к формуле (6). Из (14) и (11) видно, что

$$\hbar d_T + \frac{1}{\hbar a_T} + \frac{1}{\hbar_{+1} a_T^{(+1)}} \hbar = \hbar^2 d_T + \frac{1}{v_1(\Delta; \hbar)} + \frac{1}{v_2(\Delta; \hbar)} = \frac{v_1(1; \hbar)}{v_1(\Delta; \hbar) v_2(\Delta; \hbar)}. \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (6), приходим к формуле (12).

6. Преобразуем формулы для a_T , d_T , Φ_T к более удобному для исследования виду. Введем новую переменную s' , полагая

$$\begin{aligned} \bar{x} + s\hbar &= x + s'\hbar && \text{при } s \leq \Delta, \\ \bar{x} + s\hbar &= x + s'\hbar_{+1} && \text{при } s \geq \Delta \end{aligned}$$

и требуя, чтобы $s' = -1$ при $s = -1$, $s' = 1$ при $s = 1$. Тогда получим

$$s = \Delta + \frac{\hbar}{\hbar} s' \text{ при } s \leq \Delta \quad (s' \leq 0); \quad s = \Delta + \frac{\hbar_{+1}}{\hbar} s' \text{ при } s \geq \Delta \quad (s' \geq 0).$$

Введем новые шаблонные функции

$$\alpha(s') = \frac{\hbar}{\hbar} v_1(s; \hbar), \quad \beta(s') = \frac{\hbar_{+1}}{\hbar} v_2(s; \hbar).$$

Они определяются условиями (вместо s' снова пишем s):

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{p^*(s)} \frac{d\alpha}{ds} \right) - h^2 q^*(s) \alpha(s) = 0, \quad -1 < s < 0, \quad \alpha(-1) = 0, \\ \frac{1}{p^*(-1)} \frac{d\alpha}{ds}(-1) = 1, \quad (16)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{p^*(s)} \frac{d\beta}{ds} \right) - h_{+1}^2 q^*(s) \beta(s) = 0, \quad 0 < s < 1, \quad \beta(1) = 0, \\ \frac{1}{p^*(1)} \frac{d\beta}{ds}(1) = -1, \quad (17)$$

где

$$p^*(s) = \begin{cases} p(x+sh), & s < 0; \\ p(x+sh_{+1}), & s > 0; \end{cases} \quad q^*(s) = \begin{cases} q(x+sh), & s < 0; \\ q(x+sh_{+1}), & s > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в формуле (12):

$$\frac{1}{v_1(\Delta, \hbar)} \int_{-1}^{\Delta} v_1(s, \hbar) \bar{f}(s) ds = \frac{1}{\alpha(0)} \int_{-1}^0 \alpha(s) f^*(s) ds \frac{h}{\hbar}, \\ \frac{1}{v_2(\Delta, \hbar)} \int_{\Delta}^1 v_2(s, \hbar) \bar{f}(s) ds = \frac{1}{\beta(0)} \int_0^1 \beta(s) f^*(s) ds \frac{h_{+1}}{\hbar}.$$

В результате мы приходим к следующим формулам для коэффициентов точной схемы:

$$a_T = \alpha(0), \quad a_T^{(+1)} = \beta(0); \quad (18)$$

$$\hbar d_T = \frac{h}{\alpha(0)} \int_{-1}^0 \alpha(s) q^*(s) ds + \frac{h_{+1}}{\beta(0)} \int_0^1 \beta(s) q^*(s) ds, \quad (19)$$

$$\hbar \Phi_T = \frac{h}{\alpha(0)} \int_{-1}^0 \alpha(s) f^*(s) ds + \frac{h_{+1}}{\beta(0)} \int_0^1 \beta(s) f^*(s) ds. \quad (20)$$

7. В [2] были изучены функции типа $\alpha(s)$ и $\beta(s)$. Для них справедливы оценки

$$c_1'(1+s) \leq \alpha(s) \leq \alpha(0), \quad \alpha(s) \leq c_1 \frac{\kappa h(1+s)}{\kappa h}, \quad \kappa = \sqrt{c_1 c_2}, \quad -1 < s < 0. \\ c_1'(1-s) \leq \beta(s) \leq \beta(0), \quad \beta(s) \leq c_1 \frac{\kappa h(1-s)}{\kappa h}, \quad 0 < s < 1. \quad (21)$$

Отсюда и из формул (18)–(20) следует, что

$$0 < c_1' \leq a_T \leq c_4, \quad 0 \leq d_T \leq 2c_2, \quad |\Phi_T| \leq 2c_3, \quad \text{если } |f| \leq c_3, \quad (22)$$

где c_4 — положительная постоянная, зависящая только от c_1 и c_2 .

По аналогии с [1] будем искать $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ в виде рядов:

$$\alpha(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(s) h^{2k}, \quad \beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(s) h_{+1}^{2k}.$$

Функции $\alpha_k(s)$ и $\beta_k(s)$, не зависящие от h и h_{+1} , определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k(s) = \int_{-1}^s p^*(t) \left[\int_{-1}^t q^*(\lambda) \alpha_{k-1}(\lambda) d\lambda \right] dt, \quad k > 0, \quad \alpha_0(s) = \int_{-1}^s p^*(t) dt. \quad (23)$$

$$\beta_k(s) = \int_s^1 p^*(t) \left[\int_t^1 q^*(\lambda) \beta_{k-1}(\lambda) d\lambda \right] dt, \quad k > 0, \quad \beta_0(s) = \int_s^1 p^*(t) dt. \quad (24)$$

8. Представим $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ в виде:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \Pi_1^{(m)}(s, h) + h^{2m+2} \omega_1^{(m+1)}(s; h); \\ \beta(s) &= \Pi_2^{(m)}(s, h_{+1}) + h_{+1}^{2m+2} \omega_2^{(m+1)}(s; h_{+1}), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\Pi_1^{(m)}(s; h) = \sum_{k=0}^m \alpha_k(s) h^{2k}, \quad \Pi_2^{(m)}(s, h_{+1}) = \sum_{k=0}^m \beta_k(s) h_{+1}^{2k}. \quad (26)$$

Заменяя $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ полиномами $\Pi_1^{(m)}$ и $\Pi_2^{(m)}$, получим усеченную схему m -го ранга:

$$L_h^{(p, a, f)} y = (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}}^m - dy + \varphi = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad (27)$$

коэффициенты которой a, d, φ вычисляются по тем же формулам (18)—(20) с заменой $\alpha(s)$ на $\Pi_1^{(m)}$, а $\beta(s)$ — на $\Pi_2^{(m)}$.

Пусть y^m — решение задачи (27). Для погрешности $z = y - u$ получаем задачу

$$Az = (az_{\bar{x}})_{\bar{x}}^m - dz = -\psi, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad (28)$$

где

$$\psi = ((a - a_T) u_{\bar{x}})_{\bar{x}}^m - (d - d_T) u + \varphi - \varphi_T. \quad (28')$$

Вводя, как обычно, разностную функцию Грина $G(x, \xi)$ и пользуясь формулой Грина, а также ограниченностью $G, G_{\xi}, G_{\bar{x}}, u, u_{\bar{x}}$, получаем

$$\|y - u\|_0 \leq M \{ \|a_T - a\|_1^m + \|d_T - d\|_1^* + \|\varphi_T - \varphi\|_1^* \}, \quad (29)$$

где M — положительная постоянная, зависящая только от c_1, c_2, c_3 .

9. Перейдем теперь к оценке разностей $a_T - a, d_T - d, \varphi_T - \varphi$. Из (25) и (18)—(20) следует:

$$\begin{aligned} a_T - a &= h^{2m+2} \omega_1^{(m+1)}(0), \quad \bar{h}(d_T - d) = \\ &= h^{2m+3} \left\{ \frac{1}{\alpha(0)} \int_{-1}^0 \omega_1^{(m+1)}(s) q^*(s) ds - \frac{\omega_1^{(m+1)}(0)}{\alpha(0)} \int_{-1}^0 \frac{\alpha_m(s)}{\alpha_m(0)} q^*(s) ds \right\} + \\ &+ h_{+1}^{2m+3} \left\{ \frac{1}{\beta(0)} \int_0^1 \omega_2^{(m+1)}(s) q^*(s) ds - \frac{\omega_2^{(m+1)}(0)}{\beta(0)} \int_0^1 \frac{\beta_m(s)}{\beta_m(0)} q^*(s) ds \right\} \end{aligned}$$

и аналогичная формула для $\bar{h}(\varphi_T - \varphi)$.

Для $\omega_j^{(m+1)}(s)$ имеют место рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \omega_1^{(m+1)}(s) &= \int_{-1}^s p^*(t) \left[\int_{-1}^t q^*(\lambda) \omega_1^{(m)}(\lambda) d\lambda \right] dt, \\ \omega_2^{(m+1)}(s) &= \int_s^1 p^*(t) \left[\int_t^1 q^*(\lambda) \omega_2^{(m)}(\lambda) d\lambda \right] dt. \end{aligned}$$

По аналогии с [1] получаем оценки

$$0 \leq \omega_1^{(m)}(s) \leq M \frac{[\kappa(1+s)]^{2m+1}}{(2m+1)!} \leq M', \quad 0 \leq \omega_2^{(m)}(s) \leq M \frac{[\kappa(1-s)]^{2m+1}}{(2m+1)!} \leq M',$$

$$\omega_1^{(m)}(s)/\alpha(0) \leq M'', \quad \omega_2^{(m)}(s)/\beta(0) \leq M'',$$

$$\alpha_m(s)/\alpha_m(0) \leq 1 \quad (-1 < s \leq 0), \quad \beta_m(s)/\beta_m(0) \leq 1 \quad (s \geq 0),$$

где $\kappa = \sqrt{c_1 c_2}$, M , M' , M'' — положительные постоянные, зависящие только от c_1 и c_2 . Учитывая эти неравенства, найдем

$$\|a_T - a\|_1^m = O(\|h^{2m+2}\|_1), \quad \|d_T - d\|_1^m = O(\|h^{2m+2}\|_1),$$

$$\|\varphi_T - \varphi\|_1^m = O(\|h^{2m+2}\|_1).$$

Обращаясь теперь к (29), убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 1. Усеченная разностная схема m -го ранга ($m \geq 0$) имеет $(2m+2)$ -й порядок точности в классе кусочно-непрерывных функций $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in Q^{(0)}$ на любой последовательности неравномерных сеток, так что всегда выполняется неравенство:

$$\|y - u\|_0^m \leq M \|h^{2m+2}\|_1 \leq M \|h\|_0^{2m+2}, \quad (30)$$

где $M = M(c_1, c_2, c_3)$ — положительная постоянная, зависящая только от c_1, c_2, c_3 .

Сравнение этой теоремы с соответствующей теоремой, доказанной в п. 4 § 2 работы [1] показывает, что требование

$$0 < M_1 \leq \frac{h_{i+1}}{h_i} \leq M_2,$$

фигурирующее в [1], является лишним и что оценка (30) справедлива при любых $\|h\|_0$.

10. Простейшей усеченной схемой является схема нулевого ранга $L_h^{(p, a, f)}$ ($m = 0$). Ее коэффициенты имеют вид:

$$\dot{a} = \alpha_0(0), \quad \dot{d} = \frac{h}{h\dot{a}} \int_{-1}^0 \alpha_0(s) q^*(s) ds + \frac{h_{+1}}{h\dot{a}^{(+1)}} \int_0^1 \beta_0(s) q^*(s) ds, \quad (31)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{h}{h\dot{a}} \int_{-1}^0 \alpha_0(s) f^*(s) ds + \frac{h_{+1}}{h\dot{a}^{(+1)}} \int_0^1 \beta_0(s) f^*(s) ds.$$

Для усеченной схемы нулевого ранга теорема 1 может быть усилена.

Теорема 2. Усеченная схема нулевого ранга в классе кусочно-непрерывных функций $p, q, f \in Q^{(0)}$ и на любой последовательности сеток ω_N имеет второй порядок точности относительно среднего квадратичного шага сетки $\|h\|_2$, так что при любых значениях $\|h\|_0$ справедлива оценка

$$\|\dot{y} - u\|_0 \leq M \|h\|_2^2, \quad (32)$$

где \dot{y} — решение задачи

$$L_h^{(p, a, f)} y = (\dot{a} y_{\bar{x}})_{\bar{x}} - \dot{d} y + \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{y}(0) = u_1, \quad \dot{y}(1) = u_2, \quad (33)$$

а M — положительная постоянная, зависящая только от c_1, c_2, c_3 .

Для доказательства теоремы используется представление разности $z = \dot{y} - u$ в виде

$$\dot{y} - u = (G, \dot{\psi}), \quad (34)$$

где $\dot{\psi}$ определяется по формуле (28') при $m = 0$, а $G = G(x, \xi)$ функция Грина задачи (33). Пользуясь первой формулой Грина и ограниченностью $G, G_{\xi}, G_{\bar{x}}, u, u_{\bar{x}}$, а также оценкой (29) при $m = 0$, получаем оценку (32).

11. Схему нулевого ранга можно использовать в качестве эталона при изучении порядка точности любых других схем $L_h^{(p, q, f)}$, например консервативных стандартных схем, рассматриваемых в [3]. Пусть y — решение задачи

$$L_h^{(p, q, f)} y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi = 0, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad (35)$$

$$0 < c_1 \leq a \leq c_1, \quad 0 \leq d \leq c_2, \quad |\varphi| \leq c_3.$$

Из неравенства $\|y - u\|_0 \leq \|y - \dot{y}\|_0 + \|\dot{y} - u\|_0$ и теоремы 2 следует, что для оценки $\|y - u\|_0$ достаточно найти оценку для $\|y - \dot{y}\|_0$.

Для этой цели нам в дальнейшем понадобится

Лемма 1. Коэффициенты усеченной схемы всегда можно представить в виде

$$\dot{a} = a^* = \int_{-1}^0 p(x + sh) ds. \quad (36)$$

$$\dot{d} = d^* + (hd_*)_{\hat{x}}, \quad d^* = \frac{1}{h} \int_{x-0.5h}^{x+0.5h+1} q(x') dx' = \int_{-0.5}^{0.5} q(x + (s + \delta)\bar{h}) ds, \quad (37)$$

$$\delta = (h_{+1} - h)/4\bar{h}, \quad d_* = \int_{-1}^0 p(x + sh) \left[\int_{-0.5}^s q(x + th) dt \right] ds,$$

$$\dot{\varphi} = \varphi^* + (h\varphi_*)_{\hat{x}}, \quad \varphi^* = \int_{-0.5}^{0.5} f(x + (s + \delta)\bar{h}) ds, \quad (38)$$

$$\varphi_* = \int_{-1}^0 p(x + sh) \left[\int_{-0.5}^s f(x + th) dt \right] ds.$$

В самом деле, меняя порядок интегрирования, находим

$$\int_{-1}^0 q^*(s) \alpha_0(s) ds = \int_{-1}^0 p^*(s) \left[\int_s^0 q^*(t) dt \right] ds = a^* \int_{-0.5}^0 q^*(t) dt -$$

$$- \int_{-1}^0 p^*(s) \left[\int_{-0.5}^s q^*(t) dt \right] ds,$$

$$\int_0^1 q^*(s) \beta_0(s) ds = \int_0^1 p^*(s) \left[\int_0^s q^*(t) dt \right] ds = a^{*(+1)} \int_0^{0.5} q^*(t) dt +$$

$$+ \int_0^1 p^*(s) \left[\int_{0.5}^s q^*(t) dt \right] ds.$$

Подставим эти выражения в (31) и учтем, что $p^*(s) = p(x + sh)$, $q^*(s) = q(x + sh)$ при $-1 < s < 0$ и $p^*(s) = p(x + sh_{+1})$, $q^*(s) = q(x + sh_{+1})$ при $0 < s < 1$. В результате получим формулу $\dot{d} = d^* + (hd)_x^*$. Аналогично устанавливается формула $\dot{\varphi} = \varphi^* + (h\varphi)_x^*$.

12. Пусть y — решение задачи (35), а \tilde{y} — решение той же задачи с коэффициентами \tilde{a} , \tilde{d} , $\tilde{\varphi}$. В [1] было показано, что

$$\|\tilde{y} - y\|_0 \leq M \{ \|\tilde{a} - a\|_1 + \|\tilde{d} - d\|_1^* + \|\tilde{\varphi} - \varphi\|_1^* \}. \quad (39)$$

Рассмотрим разность $z = y - \tilde{y}$. Для нее получим задачу (28) с правой частью $\dot{\psi} = ((a - \tilde{a})\dot{y}_x)_x^* - (d - \tilde{d})\dot{y} + \varphi - \tilde{\varphi}$. Представляя z в виде $z = (G, \psi)$, пользуясь леммой 1 и учитывая, что

$$(G, (hd)_x^*)_x^* = -(G_{\bar{x}}, h(\xi)d_x(\xi)), \quad (G, (h\varphi)_x^*)_x^* = -(G_{\bar{x}}, h\varphi_x),$$

видим, что справедлива

Теорема 3. Пусть y — решение задачи (35) при $p, q, f \in Q^{(0)}$; тогда выполняется неравенство

$$\|y - \tilde{y}\|_0 \leq M (\|a - a^*\|_1 + \|d - d^*\|_1^* + \|\varphi - \varphi^*\|_1 + \|hd_x\|_1 + \|h\varphi_x\|_1) \quad (40)$$

на любой сетке ω_N .

Следствие. Если y^* — решение задачи (35) с коэффициентами

$$a^* = \int_{-1}^0 p(x + sh) ds, \quad d^* = \int_{-0.5}^{0.5} q(x + (s + \delta)\bar{h}) ds, \\ \varphi^* = \int_{-0.5}^{0.5} f(x + (s + \delta)\bar{h}) ds, \quad \delta = (h_{+1} - h)/4\bar{h} \quad (41)$$

то справедлива оценка

$$\|y^* - \tilde{y}\|_0 \leq M (\|hd_x\|_1 + \|h\varphi_x\|_1). \quad (42)$$

Пусть \tilde{y} обозначает решение задачи (33) с коэффициентами \tilde{a} , \tilde{d} , $\tilde{\varphi}$, соответствующими коэффициентам \tilde{p} , \tilde{q} , $\tilde{f} \in Q^{(0)}$ дифференциального уравнения (1). Тогда имеет место неравенство

$$\|\tilde{y} - \tilde{y}\|_0 \leq M (\|\tilde{a}^* - a^*\|_1 + \|\tilde{d}^* - d^*\|_1^* + \|\tilde{\varphi}^* - \varphi^*\|_1^* + \\ + \|h(\tilde{d}_x - d_x)\|_1 + \|h(\tilde{\varphi}_x - \varphi_x)\|_1). \quad (43)$$

Это утверждение доказывается так же, как и теорема 3.

13. Полученные выше оценки для разности $y - \tilde{y}$ можно использовать для уточнения теорем 1 и 2 работы [3]. Пусть $\Lambda y = (ay_x)_x^* - dy + \varphi$ однородная трехточечная каноническая консервативная схема стандартного типа, принадлежащая исходному семейству схем, определенному в [3], а $y = y(x)$ — решение соответствующей задачи (35) для этой схемы.

Предположим, что коэффициенты $p, q, f \in C^{(1,1)}$ и удовлетворяют условиям

$$0 < c_1' \leq p(x) \leq c_1, \quad 0 \leq q(x) \leq c_2, \quad |f(x)| \leq c_3,$$

где c_1', c_1, c_2, c_3 — постоянные.

Оценим слагаемые, входящие в правую часть неравенства (43). Так

как схема Λy удовлетворяет необходимым условиям второго порядка аппроксимации ($A[1] = D[1] = F[1] = 1$, $A_1[s] = -0.5$, $D[s] = F[s] = 0$), то $a = p(x) - 0.5hp'(x) + O(h^2)$, $a - a^* = O(h^2)$, $d - d^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2)$, $\varphi - \varphi^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2)$. Отсюда следует, что

$$\|a - a^*\|_1 = O(\|h\|_2^2), \quad \|d - d^*\|_1 = O(\|h\|_2^2), \quad \|\varphi - \varphi^*\|_1 = O(\|h\|_2^2)$$

Учитывая неравенство $\|y - u\|_0 \leq \|y - \hat{y}\|_0 + \|\hat{y} - u\|_0$ и теорему 3, а также оценки $d_* = O(h)$, $\varphi_* = O(h)$, убеждаемся в справедливости теоремы 1 работы [3]:

$$\|y - u\|_0 \leq M \|h\|_2^2, \quad (44)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

Для схемы $\Lambda^* y = (a^* y_x)_x - d^* y + \varphi^*$ эта теорема может быть усилена.

Теорема 4. Разностная схема $\Lambda^* y$, определяемая шаблонными функционалами (41), для любых $p, q, f \in C^{(0,1)}$ на произвольной последовательности неравномерных сеток имеет второй порядок точности:

$$\|y^* - u\|_0 \leq M \|h\|_2^2. \quad (45)$$

В самом деле, если $p, q, f \in C^{(0,1)}$, то $d_* = O(h)$, $\varphi_* = O(h)$ и $\|hd_*\|_1 = O(\|h\|_2^2)$, $\|h\varphi_*\|_1 = O(\|h\|_2^2)$. Отсюда и из оценки $\|y^* - \hat{y}\|_0 \leq M(\|hd_*\|_1 + \|h\varphi_*\|_1)$ следует неравенство (45).

З а м е ч а н и е. Оценка (45) является равномерной в классе $C^{(0,1)}$ функций p, q, f , имеющих одну и ту же постоянную Липшица c_4 , причем M в (45) зависит только от c'_1, c_1, c_2, c_3 и c_4 .

14. Пусть $p, q, f \in Q^{(0,1)}$, $\xi = x_n + \theta h_{n+1}$ ($0 \leq \theta \leq 1$) — точка разрыва p, q, f . Нетрудно заметить, что $d_*(x) = O(h)$ при $x \neq x_n$, $d_*(x_n) = O(1)$ при $\theta < 0.5$, $d_*(x) = O(h)$ при $x \neq x_{n+1}$, $d_*(x_{n+1}) = O(1)$ при $\theta > 0.5$. Поэтому справедливо неравенство

$$\|hd_*\|_1 \leq M(\|h\|_2^2 + h_n^2 + h_{n+1}^2).$$

Аналогично оценивается $\|h\varphi_*\|_1$.

Теорема 5. Разностная схема $\Lambda^* y$ в классе $Q^{(0,1)}$ коэффициентов p, q, f уравнения (1) имеет второй порядок точности, так что

$$\|y^* - u\|_0 \leq M \left[\|h\|_2^2 + \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j}^2 + h_{n_{j+1}}^2) \right], \quad (46)$$

если $\xi_{n_j} = x_{n_j} + \theta_j h_{n_{j+1}}$ ($0 \leq \theta_j \leq 1$), $j = 1, 2, \dots, j_0$ — точки разрыва функций p, q, f .

Рассмотрим теперь произвольную стандартную схему, принадлежащую исходному семейству схем. Если $p, q, f \in Q^{(0,1)}$, то

$$\|a - a^*\|_1 = O(\|h\|_2) + O(h_{n+1}), \quad \|d - d^*\|_1 = O(\|h\|_2) + O(\bar{h}_n) + O(\bar{h}_{n+1}),$$

$$\|\varphi - \varphi^*\|_1 = O(\|h\|_2) + O(\bar{h}_n) + O(\bar{h}_{n+1}),$$

$$\|hd_*\|_1 = O(\|h\|_2) + O(h_{n+1}), \quad \|h\varphi_*\|_1 = O(\|h\|_2) + O(h_{n+1}).$$

Отсюда и из теоремы 3 следует

Теорема 6. Для произвольной исходной схемы $\Lambda y = L^{(p, q, f)} y$ стан-

дартного типа справедливы оценки:

$$\|y - u\|_0 \leq M \left[\|h\|_2 + \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j} + h_{n_{j+1}} + h_{n_{j+2}}) \right] \text{ при } p, q, f \in Q^{(0,1)}, \quad (47)$$

$$\|y - u\|_0 \leq M \left[\|h\|_2^2 + \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j} + h_{n_{j+1}} + h_{n_{j+2}}) \right] \text{ при } p, q, f \in Q^{(1,1)}, \quad (48)$$

если $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h_{n_{j+1}}$ ($j = 1, 2, \dots, j_0$) — точки разрыва p, q, f .

Подчеркнем еще раз, что полученные выше оценки справедливы на любой последовательности разностных сеток для любых N . При этом M — положительные постоянные, не зависящие от выбора сеток ω_N .

Поступила в редакцию
29.09. 1962

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 425—440.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 5—64.
3. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 812—832.