ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 3 Ноябрь 1963 Декабрь № 6

УДК 518:517.944/.947

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

А. А. САМАРСКИЙ, *В. Б. АНДРЕЕВ*

(*Москва*)

1. Пусть в области $D_p = \{0 < x_\alpha < 1,\ \alpha = 1, \ldots, p\}$ ищется решение дифференциального уравнения

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u = -f(x), \qquad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \tag{1}$$

удовлетворяющее на границе Г условию

$$u|_\Gamma = g(x). \tag{2}$$

Пусть $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h, \ldots, i_p h) \in \bar{D}_p\}$ — квадратная сетка с шагом $h = 1/N$; γ — граница сетки $\bar{\omega}_h$. Для нахождения численного решения задачи (1) — (2) обычно используется разностная схема

$$\Lambda y + f(x) = 0, \qquad y|_\gamma = g(x), \tag{3}$$

где

$$\Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha, \qquad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} \tag{4}$$

(обозначения см. в [1]), обеспечивающая второй порядок точности. Существуют многочисленные итерационные способы решения задачи (3), среди которых выделяются методы из [2] — [8], обладающие наибольшей скоростью сходимости. Не вдаваясь в подробности того или иного метода, отметим лишь, что методы [2] — [4] применены только для параллелепипеда и $p=2$ либо $p=3$, а [6]—[8] — для несколько более сложных областей и [6]—для $p=2$, [8]—для произвольного p. Работа [5] посвящена обобщению [2], [3] на несколько более общие задачи.

2. Для нахождения численного решения задачи (1) — (2) воспользуемся схемой

$$\Lambda' y = \Lambda y + \frac{h^2}{6} \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta>\alpha} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y = -\varphi(x), \qquad y|_\gamma = g, \tag{5}$$

где

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{h^2}{12}. \tag{6}$$

Эта схема имеет четвертый порядок аппроксимации в классе достаточно гладких решений (1), так что

$$\psi = \Lambda' u + \varphi = O(h^4). \tag{7}$$

Нетрудно показать, что схема (5) имеет 4-й порядок точности. Введем скалярные произведения (см. [1]):

$$(\eta, y) = \sum_{\omega_h} y_i \eta_i h^p, \quad (y, \eta]_\alpha = \sum_{\omega_h + \alpha} y_i \eta_i h^p, \tag{8}$$

и нормы:

$$\|\eta\| = \sqrt{(\eta, \eta)}, \quad \|\eta_{\bar{x}_\alpha}\| = \sqrt{(\eta_{\bar{x}_\alpha}, \eta_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha}. \tag{9}$$

Пусть u — решение задачи (1) — (2), y — решение задачи (5). Для их разности $z = y - u$ получим

$$\Lambda' z = -\psi, \quad z|_\gamma = 0. \tag{10}$$

Умножая это уравнение скалярно на z, напишем энергетическое тождество (см. [1]):

$$I = \frac{h^2}{6} \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta > \alpha} \|z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta}\|^2 + (\psi, z), \quad I = \sum_{\alpha=1}^{p} \|z_{\bar{x}_\alpha}\|^2. \tag{11}$$

Воспользуемся очевидными неравенствами:

$$\|z\|^2 \leqslant \frac{1}{4p} I, \quad \frac{h^2}{6} \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta > \alpha} \|z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta}\|^2 \leqslant \frac{p-1}{3} I,$$
$$(\psi, z) \leqslant \|z\| \|\psi\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{4p}} I^{1/2} \|\psi\| \leqslant c_0 I + \frac{1}{16 c_0 p} \|\psi\|^2, \tag{12}$$

где c_0 — произвольная положительная постоянная. Подставим эти оценки в (11) и выберем соответствующим образом c_0. Тогда получим

$$\|z\| \leqslant M_p \|\psi\|, \quad \text{где } M_p = \frac{3}{4p(4-p)}, \quad p \leqslant 3. \tag{13}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$\|\psi\| \leqslant M h^4, \tag{14}$$

то разностная схема (5) *при* $p \leqslant 3$ *сходится в среднем со скоростью* $O(h^4)$, *так что*

$$\|y - u\| \leqslant M' h^4, \quad M' = M \cdot M_p, \tag{15}$$

где M *— положительная постоянная, не зависящая от* h.

Замечание 1. Если вместо (1) рассматривается уравнение

$$\bar{L}u = Lu - q(x) u = -f(x), \quad 0 < c_1 \leqslant q(x), \quad u|_\Gamma = g(x), \tag{1'}$$

то, как легко заметить, решение задачи

$$\Lambda' y - dy + \varphi(x) = 0, \qquad y|_\gamma = g(x), \tag{5'}$$

где

$$d(x) = q(x) + \frac{h^2}{12}\Lambda \bar{q}(x),$$

сходится в среднем со скоростью $O(h^4)$ к решению задачи (1′) и при $p = 4$.

3. Для приближенного решения задачи (5) при $p = 2,3$ рассмотрим следующую итерационную схему:

$$v_{\bar{t}} = \Lambda v + \frac{h^2}{6}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta\check{v} + \varphi, \quad v|_\gamma = g(x), \quad v(x, 0) = v^0(x), \tag{16}$$

где $v = v^{n+1}$ — $(n+1)$-я итерация, $\check{v} = v^{(n)}$, $v_{\bar{t}} = (v - \check{v})/\tau_n$; $\tau_n > 0$ — итерационный параметр, который будет выбран позже. Начальное значение $v(x, 0) = v^{(0)}(x)$ определяется выбором нулевой итерации. Для численного решения задачи (16) построим два одномерных алгоритма переменных направлений.

А. Подставим в (16) $\Lambda v = \Lambda\check{v} + \tau\Lambda v_{\bar{t}}$ и, следуя [6], заменим оператор $(E - \tau\Lambda)$, где E — единичный оператор, оператором A. Здесь

$$A = \prod_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \quad A_\alpha = E - \tau\Lambda_\alpha.$$

Тогда вместо (16) получим схему

$$Av = [A + \tau\Lambda']\check{v} + \tau\varphi, \qquad v|_\gamma = g, \qquad v(x, 0) = v^{(0)}(x), \tag{17}$$

которую мы будем называть производящей схемой. Вводя промежуточные значения $v_{(1)}, \ldots, v_{(p)} = v$, сведем решение задачи (5) к решению p одномерных задач:

$$A_1 v_{(1)} = [A + \tau\Lambda']\check{v} + \tau\varphi, \tag{18}$$

$$A_\alpha v_{(\alpha)} = v_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, \ldots, p; \qquad v_{(\alpha)} = A_{\alpha+1}\ldots A_p g \text{ при } x_\alpha = 0, 1.$$

Б. Полагая $w = v_{\bar{t}}$, перепишем производящую схему в виде

$$Aw = \Lambda'\check{v} + \varphi, \qquad w|_\gamma = 0. \tag{19}$$

Отсюда следует алгоритм переменных направлений

$$A_1 w_{(1)} = \Lambda'\check{v} + \varphi, \tag{20}$$

$$A_\alpha w_{(\alpha)} = w_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, \ldots, p; \quad w_{(\alpha)} = 0 \text{ при } x_\alpha = 0, 1,$$

$$v = \check{v} + \tau w_{(p)}.$$

При переходе от $\check{v}$ к v требуется в процессе счета помнить два слоя: $\check{v}$ и $w_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Однако этот алгоритм требует меньшего числа операций по сравнению с (18) (не надо считать $A\check{v}$) и, кроме того, функции $w_{(\alpha)}$ всегда удовлетворяют нулевым граничным условиям. В случае $p = 2$ можно, по аналогии с [2], пользоваться алгоритмом, не содержащим произведения $\Lambda_1\Lambda_2\check{v}$:

$$A_1 w_{(1)} = \Lambda_1 \check{v} + \left(1 + \frac{h^2}{6\tau}\right)\Lambda_2\check{v} + \varphi, \tag{21}$$

$$A_2 w_{(2)} = w_{(1)} - \frac{h^2}{6\tau}\Lambda_2\check{v}, \quad v = \check{v} + \tau w_{(2)}; \qquad w_{(\alpha)} = 0, \quad x_\alpha = 0, 1.$$

Каждое из уравнений $A_\alpha w_{(\alpha)} = \varphi_\alpha$, где φ_α—заданная функция, решается по формулам одномерной прогонки (см. [9], стр. 283—309). Все указанные вычислительные алгоритмы реализуют одну и ту же производящую схему (17), в чем можно убедиться после исключения промежуточных значений $v_{(\alpha)}$ или $w_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, p-1$.

4. Мы покажем, что итерации, определяемые на схеме (17), сходятся при любом выборе нулевой итерации $v^{(0)}(x)$ и при любом выборе последовательности $\{\tau_n\}$, удовлетворяющей условию $0 < c_1 \leqslant \tau_n \leqslant c_2$, где c_1 и c_2 — постоянные, не зависящие от номера итераций n. Следуя [3], укажем такой способ выбора $\{\tau_n\}$, при котором скорость сходимости итераций будет «достаточно большой». Для разности $z = v - y$, где y — решение исходной задачи (5), $v = v^{(n)}$ — решение задачи (17), получаем следующие условия:

$$A z_{\bar{t}} = \Lambda'\check{z}, \qquad z|_\gamma = 0, \qquad z(x, 0) = z^{(0)}(x) = v^{(0)} - y(x). \tag{22}$$

Разложим z и $\check{z}$ по собственным функциям

$$\mu_k = \prod_{\alpha=1}^{p} \sin k_\alpha \pi x_\alpha, \quad k_\alpha = 1, \ldots, N-1, \quad k = \{k_1, \ldots, k_p\}, \quad x_\alpha = i_\alpha h, \tag{23}$$

операторов Λ_α:

$$z = z^{(n+1)} = \sum_k a_k^{(n+1)}\mu_k, \qquad \check{z} = z^{(n)} = \sum_k a_k^{(n)}\mu_k. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (22) и учитывая линейную независимость $\{\mu_k\}$, получим

$$a_k^{(n+1)} = \rho_k^{(n+1)} a_k^{(n)}, \tag{25}$$

$$\rho_k^{(n+1)} = 1 - \lambda\Big[\sum_{\alpha=1}^{p} \xi_\alpha - \frac{2}{3}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha} \xi_\alpha\xi_\beta\Big]\prod_{\alpha=1}^{p}(1 + \lambda\xi_\alpha)^{-1},$$
$$\lambda = \lambda_{n+1} = \frac{4\tau_{n+1}}{h^2}, \qquad \xi_\alpha = \xi_{k_\alpha} = \sin^2\frac{k_\alpha\pi h}{2}. \tag{26}$$

Теорема 2. *Итерационный метод* (17) *при* $p = 2, 3$ *сходится в метрике* $L_2(\omega_h)$ *для любого выбора параметров* τ_n, *удовлетворяющих условию* $0 < c_1 \leqslant \tau_n \leqslant c_2$.

Действительно, на основании (25) можно написать

$$a_k^{(n+1)} = \prod_{s=1}^{n+1} \rho_k^{(s)} a_k^{(0)}, \tag{27}$$

а из (24) и (27) следует, что

$$z_i^{(n+1)} = \sum_k a_k^{(0)} \prod_{s=1}^{n+1} \rho_k^s \mu_k(i). \tag{28}$$

Таким образом,

$$\| z^{(n+1)} \| = \Big[\sum_{\omega_h} h^p \Big(\sum_k a_k^{(0)} \prod_{s=1}^{n+1} \rho_k^{(s)} \mu_k(i) \Big)^2 \Big]^{1/2} \leqslant \max_k \prod_{s=1}^{n+1} \rho_k^{(s)} \| z^0 \|, \tag{29}$$

где $z^{(0)} = v^{(0)} - y$ — разность между нулевым приближением и точным решением (5). Нужно показать, что

$$\max_k \prod_{s=1}^{n+1} \rho_k^{(s)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Оценим сначала $\rho_k^{(s)}$. Так как $1 \leqslant k_\alpha \leqslant N-1$, то

$$\sin^2 \frac{\pi h}{2} \leqslant \xi_\alpha < 1 \tag{30}$$

и, следовательно,

$$2\xi_\alpha \xi_\beta \leqslant \xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2 < \xi_\alpha + \xi_\beta. \tag{31}$$

Используя (26) и (31), получим

$$0 < \rho_k^{(s)} \leqslant 1 - \frac{\lambda_s \left(1 - \frac{p-1}{3}\right) \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \xi_\alpha}{\prod\limits_{\alpha=1}^{p} (1 + \lambda_s \xi_\alpha)}. \tag{32}$$

Из оценки (32) следует, что

$$\rho_k^{(s)} \leqslant \rho < 1 \tag{33}$$

при $0 < \overset{*}{c_1} \leqslant \lambda \leqslant \overset{*}{c_2}$, $p = 2, 3$, где $\overset{*}{c_1}$, $\overset{*}{c_2}$ и ρ не зависят от номера итерации.

Учитывая (29) и (33), получим

$$\| z^{(n+1)} \| \leqslant \rho^{n+1} \| z^{(0)} \| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

З а м е ч а н и е 2. Если рассматривается уравнение (1′) и соответствующая ему разностная схема (5′) (см. замечание 1), то производящая схема есть

$$Av = [A + \tau\Lambda' - \tau d]\, \check{v} + \varphi. \tag{17′}$$

Нетрудно понять, что для (17′) теорема 2 остается в силе и при $p = 4$.

5. Л е м м а 1. *Если* $0 < m < 1 < M$ *и*

$$\rho(a, b) = 1 - \frac{2(a+b)}{3(1+a)(1+b)}, \tag{34}$$

то

$$\rho_2 = \max_{m \leqslant a, b \leqslant M} \rho(a, b) = \max \left[1 - \frac{4M}{3(1+m)^2},\quad 1 - \frac{4M}{3(1+M)^2} \right]. \tag{35}$$

В самом деле, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$\rho^2(a, b) \leqslant \rho(a, a)\, \rho(b, b). \tag{36}$$

Так как область определения $\rho(a, b)$ вместе с точкой (a, b) содержит и точки (a, a), (b, b) и наоборот, то на основании (36) можно утверждать, что $\max\limits_{m \leqslant a, b \leqslant M} \rho(a, b)$ достигается при $a = b$. Изучим поведение функции

$$\bar{\rho}(a) = 1 - \frac{4a}{3(1+a)^2}.$$

$$\frac{d\bar{\rho}}{da} = -\frac{4(1-a)}{3(1+a)^3} = \begin{cases} \geqslant 0 \text{ при } a \geqslant 1, \\ \leqslant 0 \text{ при } a \leqslant 1. \end{cases} \tag{37}$$

Из (37) следует, что $\max \bar{\rho}(a)$ достигается либо при $a = m$, либо при $a = M$, что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Если* $0 < m < \frac{1}{2} < M$ *и*

$$\rho(a, b, c) = 1 - \frac{1}{3}\theta(a, b, c), \tag{38}$$

где

$$\theta(a, b, c) = \frac{a+b+c}{(1+a)(1+b)(1+c)},$$

то

$$\rho_3 = \max_{m \leqslant a, b, c \leqslant M} \rho(a, b, c) = \max\left[1 - \frac{m}{(1+m)^3},\ 1 - \frac{M}{(1+M)^3}\right]. \tag{39}$$

Лемма будет доказана, если мы покажем, что минимум функции $\theta(a, b, c)$ достигается либо при $a = b = c = m$, либо при $a = b = c = M$. Зафиксируем a и изучим поведение $\theta(a, b, c)$ в зависимости от изменения b и c. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\theta^2(a, b, c) \geqslant \theta(a, b, b)\,\theta(a, c, c). \tag{40}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial\theta(a, b, c)}{\partial b} = 2\frac{1-a-b}{(1+a)(1+b)^2} = \begin{cases} \geqslant 0 \text{ при } b \leqslant 1-a, \\ \leqslant 0 \text{ при } b \geqslant 1-a, \end{cases} \tag{41}$$

и учитывая (40), получим

$$\bar{\theta}(a) = \min_{m \leqslant b, c \leqslant M} \theta(a, b, c) = \min_{m \leqslant b \leqslant M} \theta(a, b, b) = \tag{42}$$

$$= \min\left[\frac{a+2m}{(1+a)(1+m)^2},\ \frac{a+2M}{(1+a)(1+M)^2}\right].$$

Далее,

$$\frac{d\bar{\theta}(a)}{da} = \begin{cases} \text{либо } \dfrac{1-2m}{(1+a)^2(1+m)^2} > 0, \\ \text{либо } \dfrac{1-2M}{(1+a)(1+M)^2} < 0. \end{cases} \tag{43}$$

На основании (42) и (43) заключаем:

$$\min_{m \leqslant a \leqslant M} \bar{\theta}(a) = \min_{m \leqslant a, b, c \leqslant M} \theta(a, b, c) = \min\left(\frac{3m}{(1+m)^3},\ \frac{3M}{(1+M)^3}\right). \tag{44}$$

6. Выберем теперь последовательность $\{\lambda_n\}$ так, чтобы она удовлетворяла условиям

$$\lambda_n \xi^{(n)} = m, \qquad \lambda_n \xi^{(n+1)} = M, \qquad \xi^{(1)} = \sin^2\frac{\pi h}{2}, \tag{45}$$

и выберем число итераций $n = n_0$ так, чтобы

$$\xi^{(n_0)} < 1, \qquad \xi^{(n_0+1)} \geqslant 1. \tag{46}$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_n = mq^{n-1} \sin^{-2} \frac{\pi h}{2}, \qquad \xi^{(n)} = q^{-n+1} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \tag{47}$$

$$2 \ln \sin \frac{\pi h}{2} \cdot \ln^{-1} q \leqslant n_0 \leqslant 2 \ln \sin \frac{\pi h}{2} \ln^{-1} q + 1, \tag{48}$$

где $q = m/M$.

Лемма 3. *Если проводится цикл n_0 итераций по методу* (17) *с набором параметров $\{\lambda_n\}$, определяемых* (47), *то*

$$\| z^{(n_0)} \| \leqslant \rho_p \| z^{(0)} \|, \tag{49}$$

где ρ_p задается формулами (35) *и* (39).

В самом деле, так как при

$$\xi^{(n)} \leqslant \xi_\alpha \leqslant \xi^{(n+1)}, \tag{50}$$

$$m \leqslant \lambda_n \xi_\alpha \leqslant M, \tag{51}$$

а интервалы $[\xi^n, \xi^{n+1}]$ покрывают всю область значений ξ_α, то для каждого значения ξ_α существует по крайней мере одно значение n, при котором

$$\rho_{k^{(n)}} < \rho_p. \tag{52}$$

Неравенство (43) и теорема 2 доказывают лемму.

Замечание 3. Принимая во внимание (37) и (41), нетрудно понять, что $\max (M/m)$ (или, что то же самое, $\min n_0$) при фиксированном ρ_p достигается при равенстве первого и второго членов в правых частях (35) и (39):

$$1 - \frac{4m}{3(1+m)^2} = 1 - \frac{4M}{3(1+M)^2}; \qquad 1 - \frac{m}{(1+m)^3} = 1 - \frac{M}{(1+M)^3}. \tag{53}$$

Тогда при $p = 2$

$$M = \frac{1}{m}, \tag{54}$$

при $p = 3$

$$M = \frac{\sqrt{(3+m)^2 + 4/m} - (3+m)}{2}. \tag{55}$$

Теорема 3. *Для того чтобы при помощи метода* (17) *уменьшить L_2 — норму погрешности $\| z^0 \|$ — в $1/\varepsilon$ раз, достаточно провести цикл n_0 итераций с набором параметров $\{\lambda_n\}$, задаваемых* (47) *k_0 раз, где n_0 определяется из* (48), *а k_0 — из* (56):

$$k_0 \geqslant \frac{\ln (1/\varepsilon)}{\ln (1/\rho_p)}. \tag{56}$$

Доказательство теоремы следует из леммы 3.

Замечание 4. Из теоремы 3 следует, что общее число итераций, требуемое для уменьшения погрешности $\| z^0 \|$ в $1/\varepsilon$ раз, есть

$$\nu \asymp \frac{2 \ln \sin \frac{\pi h}{2} \ln \varepsilon}{\ln q \ln \rho_p}. \tag{57}$$

Если учесть замечание 3 и произвести оптимизацию ν по m, то получим:

для $p = 2$

$$\nu_{\text{опт}} = 3.00 \ln \frac{1}{\sin (\pi h/2)} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \tag{58}$$

$$m_{\text{опт}} = 0.24, \qquad \bar{\rho}_{2\,\text{опт}} = 0.79, \qquad q = \frac{m}{M} = 0.058; \tag{59}$$

для $p = 3$

$$\nu_{\text{опт}} = 8.40 \ln \frac{1}{\sin(\pi h/2)} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \tag{60}$$

$$m_{\text{опт}} = 0.13, \qquad \bar{\rho}_{3\,\text{опт}} = 0.91, \qquad q = \frac{m}{M} = 0.080. \tag{61}$$

Поступила в редакцию
21.06. 1963

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем и матем. физ., 1963, **3**, № 3, 431—466.
2. D. W. Peaceman, H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation. J. Soc. Industr. and Appl. Mah., 1955, **3**, № 1, 28—41.
3. J. Douglas, H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **82**, № 2, 421—439.
4. J. Douglas. Alternating direction methods for three space variables. Numer. Math., 1962, **4**, № 1, 41—63.
5. G. Birkhoff, R. S. Varga. Implicit alternating direction methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 1, 13—24.
6. Е. Г. Дьяконов. Об одном способе решения уравнения Пуассона. Докл. АН СССР, 1962, **143**, № 1, 21—24.
7. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 4, 549—568.
8. Е. Г. Дьяконов. Решение некоторых многомерных задач математической физики при помощи метода сеток. Дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1962.
9. С. К. Годунов, В. С. Рябенький. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.