

УДК 518:517.944/.947

**ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА
ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА
С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ**

А. А. САМАРСКИЙ, В. Б. АНДРЕЕВ

(Москва)

1. Пусть в области $D_p = \{0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, \dots, p\}$ ищется решение дифференциального уравнения

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u = -f(x), \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \quad (1)$$

удовлетворяющее на границе Γ условию

$$u|_\Gamma = g(x). \quad (2)$$

Пусть $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h, \dots, i_p h) \in \bar{D}_p\}$ — квадратная сетка с шагом $h = 1/N$; γ — граница сетки $\bar{\omega}_h$. Для нахождения численного решения задачи (1) — (2) обычно используется разностная схема

$$\Lambda y + f(x) = 0, \quad y|_\gamma = g(x), \quad (3)$$

где

$$\Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha, \quad \Lambda_\alpha y = \Delta_{x_\alpha}^2 y \quad (4)$$

(обозначения см. в [1]), обеспечивающая второй порядок точности. Существуют многочисленные итерационные способы решения задачи (3), среди которых выделяются методы из [2] — [8], обладающие наибольшей скоростью сходимости. Не вдаваясь в подробности того или иного метода, отметим лишь, что методы [2] — [4] применены только для параллелепипеда и $p=2$ либо $p=3$, а [6]—[8] — для несколько более сложных областей и [6]—для $p=2$, [8]—для произвольного p . Работа [5] посвящена обобщению [2], [3] на несколько более общие задачи.

2. Для нахождения численного решения задачи (1) — (2) воспользуемся схемой

$$\Lambda' y = \Lambda y + \frac{h^2}{6} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta > \alpha} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y = -\varphi(x), \quad y|_\gamma = g, \quad (5)$$

где

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{h^2}{12}. \quad (6)$$

Эта схема имеет четвертый порядок аппроксимации в классе достаточно гладких решений (1), так что

$$\psi = \Lambda'u + \varphi = O(h^4). \quad (7)$$

Нетрудно показать, что схема (5) имеет 4-й порядок точности. Введем скалярные произведения (см. [1]):

$$(\eta, y) = \sum_{\omega_h} y_i \eta_i h^p, \quad (y, \eta)_\alpha = \sum_{\omega_{h+\alpha}} y_i \eta_i h^p, \quad (8)$$

и нормы:

$$\|\eta\| = \sqrt{(\eta, \eta)}, \quad \|\eta_{\bar{x}_\alpha}\| = \sqrt{(\eta_{\bar{x}_\alpha}, \eta_{\bar{x}_\alpha})}. \quad (9)$$

Пусть u — решение задачи (1) — (2), y — решение задачи (5). Для их разности $z = y - u$ получим

$$\Lambda'z = -\psi, \quad z|_\Gamma = 0. \quad (10)$$

Умножая это уравнение скалярно на z , напомним энергетическое тождество (см. [1]):

$$I = \frac{h^2}{6} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta>\alpha} \|z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta}\|^2 + (\psi, z), \quad I = \sum_{\alpha=1}^p \|z_{\bar{x}_\alpha}\|^2. \quad (11)$$

Воспользуемся очевидными неравенствами:

$$\|z\|^2 \leq \frac{1}{4p} I, \quad \frac{h^2}{6} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta>\alpha} \|z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta}\|^2 \leq \frac{p-1}{3} I, \quad (12)$$

$$(\psi, z) \leq \|z\| \|\psi\| \leq \frac{1}{\sqrt{4p}} I^{1/2} \|\psi\| \leq c_0 I + \frac{1}{16 c_0 p} \|\psi\|^2,$$

где c_0 — произвольная положительная постоянная. Подставим эти оценки в (11) и выберем соответствующим образом c_0 . Тогда получим

$$\|z\| \leq M_p \|\psi\|, \quad \text{где } M_p = \frac{3}{4p(4-p)}, \quad p \leq 3. \quad (13)$$

Тем самым доказана

Теорема 1. Если выполнено условие

$$\|\psi\| \leq M h^4, \quad (14)$$

то разностная схема (5) при $p \leq 3$ сходится в среднем со скоростью $O(h^4)$, так что

$$\|y - u\| \leq M' h^4, \quad M' = M \cdot M_p, \quad (15)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h .

З а м е ч а н и е 1. Если вместо (1) рассматривается уравнение

$$\bar{L}u = Lu - q(x)u = -f(x), \quad 0 < c_1 \leq q(x), \quad u|_\Gamma = g(x), \quad (1')$$

то, как легко заметить, решение задачи

$$\Lambda'y - dy \nrightarrow \Phi(x) = 0, \quad y|_{\Gamma} = g(x), \quad (5')$$

где

$$d(x) = q(x) \nrightarrow \frac{h^2}{12} \Lambda \bar{q}(x),$$

сходится в среднем со скоростью $O(h^4)$ к решению задачи (1') и при $p = 4$.

3. Для приближенного решения задачи (5) при $p = 2, 3$ рассмотрим следующую итерационную схему:

$$v_{\bar{r}} = \Lambda v + \frac{h^2}{6} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta>\alpha} \Lambda_{\alpha} \Lambda_{\beta} \check{v} + \Phi, \quad v|_{\Gamma} = g(x), \quad v(x, 0) = v^0(x), \quad (16)$$

где $v = v^{n+1}$ — $(n+1)$ -я итерация, $\check{v} = v^{(n)}$, $v_{\bar{r}} = (v - \check{v})/\tau_n$; $\tau_n > 0$ — итерационный параметр, который будет выбран позже. Начальное значение $v(x, 0) = v^{(0)}(x)$ определяется выбором нулевой итерации. Для численного решения задачи (16) построим два одномерных алгоритма переменных направлений.

А. Подставим в (16) $\Lambda v = \Lambda \check{v} + \tau \Lambda v_{\bar{r}}$ и, следуя [6], заменим оператор $(E - \tau \Lambda)$, где E — единичный оператор, оператором A . Здесь

$$A = \prod_{\alpha=1}^p A_{\alpha}, \quad A_{\alpha} = E - \tau \Lambda_{\alpha}.$$

Тогда вместо (16) получим схему

$$Av = [A + \tau \Lambda'] \check{v} + \tau \Phi, \quad v|_{\Gamma} = g, \quad v(x, 0) = v^{(0)}(x), \quad (17)$$

которую мы будем называть производящей схемой. Вводя промежуточные значения $v_{(1)}, \dots, v_{(p)} = v$, сведем решение задачи (5) к решению p одномерных задач:

$$A_1 v_{(1)} = [A + \tau \Lambda'] \check{v} + \tau \Phi, \quad (18)$$

$$A_{\alpha} v_{(\alpha)} = v_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, \dots, p; \quad v_{(\alpha)} = A_{\alpha+1} \dots A_p g \text{ при } x_{\alpha} = 0, 1.$$

Б. Полагая $w = v_{\bar{r}}$, перепишем производящую схему в виде

$$Aw = \Lambda' \check{v} + \Phi, \quad w|_{\Gamma} = 0. \quad (19)$$

Отсюда следует алгоритм переменных направлений

$$A_1 w_{(1)} = \Lambda' \check{v} + \Phi, \quad (20)$$

$$A_{\alpha} w_{(\alpha)} = w_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, \dots, p; \quad w_{(\alpha)} = 0 \text{ при } x_{\alpha} = 0, 1,$$

$$v = \check{v} + \tau w_{(p)}.$$

При переходе от \check{v} к v требуется в процессе счета помнить два слоя: \check{v} и $w_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Однако этот алгоритм требует меньшего числа операций по сравнению с (18) (не надо считать $A\check{v}$) и, кроме того, функции $w_{(\alpha)}$ всегда удовлетворяют нулевым граничным условиям. В случае $p = 2$ можно, по аналогии с [2], пользоваться алгоритмом, не содержа-

щим произведения $\Lambda_1 \Lambda_2 \check{v}$:

$$A_1 w_{(1)} = \Lambda_1 \check{v} + \left(1 + \frac{h^2}{6\tau}\right) \Lambda_2 \check{v} + \varphi, \quad (21)$$

$$A_2 w_{(2)} = w_{(1)} - \frac{h^2}{6\tau} \Lambda_2 \check{v}, \quad v = \check{v} + \tau w_{(2)}; \quad w_{(\alpha)} = 0, \quad x_\alpha = 0, 1.$$

Каждое из уравнений $A_\alpha w_{(\alpha)} = \varphi_\alpha$, где φ_α — заданная функция, решается по формулам одномерной прогонки (см. [9], стр. 283—309). Все указанные вычислительные алгоритмы реализуют одну и ту же производящую схему (17), в чем можно убедиться после исключения промежуточных значений $v_{(\alpha)}$ или $w_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, p-1$.

4. Мы покажем, что итерации, определяемые на схеме (17), сходятся при любом выборе нулевой итерации $v^{(0)}(x)$ и при любом выборе последовательности $\{\tau_n\}$, удовлетворяющей условию $0 < c_1 \leq \tau_n \leq c_2$, где c_1 и c_2 — постоянные, не зависящие от номера итераций n . Следуя [3], укажем такой способ выбора $\{\tau_n\}$, при котором скорость сходимости итераций будет «достаточно большой». Для разности $z = v - y$, где y — решение исходной задачи (5), $v = v^{(n)}$ — решение задачи (17), получаем следующие условия:

$$Az_{\bar{t}} = \Lambda' z, \quad z|_{\Gamma} = 0, \quad z(x, 0) = z^{(0)}(x) = v^{(0)} - y(x). \quad (22)$$

Разложим z и \check{z} по собственным функциям

$$\mu_k = \prod_{\alpha=1}^p \sin k_\alpha \pi x_\alpha, \quad k_\alpha = 1, \dots, N-1, \quad k = \{k_1, \dots, k_p\}, \quad x_\alpha = i_\alpha h, \quad (23)$$

операторов Λ_α :

$$z = z^{(n+1)} = \sum_k a_k^{(n+1)} \mu_k, \quad \check{z} = z^{(n)} = \sum_k a_k^{(n)} \mu_k. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22) и учитывая линейную независимость $\{\mu_k\}$, получим

$$a_k^{(n+1)} = \rho_k^{(n+1)} a_k^{(n)}, \quad (25)$$

$$\rho_k^{(n+1)} = 1 - \lambda \left[\sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha - \frac{2}{3} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta>\alpha} \xi_\alpha \xi_\beta \right] \prod_{\alpha=1}^p (1 + \lambda \xi_\alpha)^{-1}, \quad (26)$$

$$\lambda = \lambda_{n+1} = \frac{4\tau_{n+1}}{h^2}, \quad \xi_\alpha = \xi_{k_\alpha} = \sin^2 \frac{k_\alpha \pi h}{2}.$$

Теорема 2. Итерационный метод (17) при $p = 2, 3$ сходится в метрике $L_2(\omega_h)$ для любого выбора параметров τ_n , удовлетворяющих условию $0 < c_1 \leq \tau_n \leq c_2$.

Действительно, на основании (25) можно написать

$$a_k^{(n+1)} = \prod_{s=1}^{n+1} \rho_k^{(s)} a_k^{(0)}, \quad (27)$$

а из (24) и (27) следует, что

$$z_i^{(n+1)} = \sum_k a_k^{(0)} \prod_{s=1}^{n+1} \rho_k^s \mu_k(i). \quad (28)$$

Таким образом,

$$\|z^{(n+1)}\| = \left[\sum_{\omega_h} h^p \left(\sum_k a_k^{(0)} \prod_{s=1}^{n+1} \rho_k^{(s)} \mu_k(i) \right)^2 \right]^{1/2} \leq \max_k \prod_{s=1}^{n+1} \rho_k^{(s)} \|z^0\|, \quad (29)$$

где $z^{(0)} = v^{(0)} - y$ — разность между нулевым приближением и точным решением (5). Нужно показать, что

$$\max_k \prod_{s=1}^{n+1} \rho_k^{(s)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Оценим сначала $\rho_k^{(s)}$. Так как $1 \leq k_\alpha \leq N - 1$, то

$$\sin^2 \frac{\pi h}{2} \leq \xi_\alpha < 1 \quad (30)$$

и, следовательно,

$$2\xi_\alpha \xi_\beta \leq \xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2 < \xi_\alpha + \xi_\beta. \quad (31)$$

Используя (26) и (31), получим

$$0 < \rho_k^{(s)} \leq 1 - \frac{\lambda_s \left(1 - \frac{p-1}{3}\right) \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha}{\prod_{\alpha=1}^p (1 + \lambda_s \xi_\alpha)}. \quad (32)$$

Из оценки (32) следует, что

$$\rho_k^{(s)} \leq \rho < 1 \quad (33)$$

при $0 < c_1^* \leq \lambda \leq c_2^*$, $p = 2, 3$, где c_1^* , c_2^* и ρ не зависят от номера итерации.

Учитывая (29) и (33), получим

$$\|z^{(n+1)}\| \leq \rho^{n+1} \|z^{(0)}\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 2. Если рассматривается уравнение (1') и соответствующая ему разностная схема (5') (см. замечание 1), то производящая схема есть

$$Av = [A \mp \tau \Lambda' - \tau d] \check{v} \mp \varphi. \quad (17')$$

Нетрудно понять, что для (17') теорема 2 остается в силе и при $p = 4$.

5. Л е м м а 1. Если $0 < m < 1 < M$ и

$$\rho(a, b) = 1 - \frac{2(a+b)}{3(1+a)(1+b)}, \quad (34)$$

то

$$\rho_2 = \max_{m \leq a, b \leq M} \rho(a, b) = \max \left[1 - \frac{4M}{3(1+m)^2}, 1 - \frac{4M}{3(1+M)^2} \right]. \quad (35)$$

В самом деле, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$\rho^2(a, b) \leq \rho(a, a) \rho(b, b). \quad (36)$$

Так как область определения $\rho(a, b)$ вместе с точкой (a, b) содержит и точки (a, a) , (b, b) и наоборот, то на основании (36) можно утверждать, что $\max_{m \leq a, b \leq M} \rho(a, b)$ достигается при $a = b$. Изучим поведение функции

$$\bar{\rho}(a) = 1 - \frac{4a}{3(1+a)^2}.$$

$$\frac{d\bar{\rho}}{da} = -\frac{4(1-a)}{3(1+a)^3} = \begin{cases} \geq 0 & \text{при } a \geq 1, \\ \leq 0 & \text{при } a \leq 1. \end{cases} \quad (37)$$

Из (37) следует, что $\max \bar{\rho}(a)$ достигается либо при $a = m$, либо при $a = M$, что и доказывает лемму.

Л е м м а 2. Если $0 < m < \frac{1}{2} < M$ и

$$\rho(a, b, c) = 1 - \frac{1}{3}\theta(a, b, c), \quad (38)$$

где

$$\theta(a, b, c) = \frac{a+b+c}{(1+a)(1+b)(1+c)},$$

то

$$\rho_3 = \max_{m \leq a, b, c \leq M} \rho(a, b, c) = \max \left[1 - \frac{m}{(1+m)^3}, 1 - \frac{M}{(1+M)^3} \right]. \quad (39)$$

Лемма будет доказана, если мы покажем, что минимум функции $\theta(a, b, c)$ достигается либо при $a = b = c = m$, либо при $a = b = c = M$. Зафиксируем a и изучим поведение $\theta(a, b, c)$ в зависимости от изменения b и c . Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\theta^2(a, b, c) \geq \theta(a, b, b)\theta(a, c, c). \quad (40)$$

Замечая, что

$$\frac{\partial \theta(a, b, c)}{\partial b} = 2 \frac{1-a-b}{(1+a)(1+b)^2} = \begin{cases} \geq 0 & \text{при } b \leq 1-a, \\ \leq 0 & \text{при } b \geq 1-a, \end{cases} \quad (41)$$

и учитывая (40), получим

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(a) &= \min_{m \leq b, c \leq M} \theta(a, b, c) = \min_{m \leq b \leq M} \theta(a, b, b) = \\ &= \min \left[\frac{a+2m}{(1+a)(1+m)^2}, \frac{a+2M}{(1+a)(1+M)^2} \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Далее,

$$\frac{d\bar{\theta}(a)}{da} = \begin{cases} \text{либо } \frac{1-2m}{(1+a)^2(1+m)^2} > 0, \\ \text{либо } \frac{1-2M}{(1+a)(1+M)^2} < 0. \end{cases} \quad (43)$$

На основании (42) и (43) заключаем:

$$\min_{m \leq a \leq M} \bar{\theta}(a) = \min_{m \leq a, b, c \leq M} \theta(a, b, c) = \min \left(\frac{3m}{(1+m)^3}, \frac{3M}{(1+M)^3} \right). \quad (44)$$

6. Выберем теперь последовательность $\{\lambda_n\}$ так, чтобы она удовлетворяла условиям

$$\lambda_n \xi^{(n)} = m, \quad \lambda_n \xi^{(n+1)} = M, \quad \xi^{(1)} = \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad (45)$$

и выберем число итераций $n = n_0$ так, чтобы

$$\xi^{(n_0)} < 1, \quad \xi^{(n_0+1)} \geq 1. \quad (46)$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_n = mq^{n-1} \sin^{-2} \frac{\pi h}{2}, \quad \xi^{(n)} = q^{-n+1} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad (47)$$

$$2 \ln \sin \frac{\pi h}{2} \cdot \ln^{-1} q \leq n_0 \leq 2 \ln \sin \frac{\pi h}{2} \ln^{-1} q + 1, \quad (48)$$

где $q = m/M$.

Лемма 3. Если проводится цикл n_0 итераций по методу (17) с набором параметров $\{\lambda_n\}$, определяемых (47), то

$$\|z^{(n_0)}\| \leq \rho_p \|z^{(0)}\|, \quad (49)$$

где ρ_p задается формулами (35) и (39).

В самом деле, так как при

$$\xi^{(n)} \leq \xi_\alpha \leq \xi^{(n+1)}, \quad (50)$$

$$m \leq \lambda_n \xi_\alpha \leq M, \quad (51)$$

а интервалы $[\xi^n, \xi^{n+1}]$ покрывают всю область значений ξ_α , то для каждого значения ξ_α существует по крайней мере одно значение n , при котором

$$\rho_k^{(n)} < \rho_p. \quad (52)$$

Неравенство (43) и теорема 2 доказывают лемму.

З а м е ч а н и е 3. Принимая во внимание (37) и (41), нетрудно понять, что $\max(M/m)$ (или, что то же самое, $\min n_0$) при фиксированном ρ_p достигается при равенстве первого и второго членов в правых частях (35) и (39):

$$1 - \frac{4m}{3(1+m)^2} = 1 - \frac{4M}{3(1+M)^2}; \quad 1 - \frac{m}{(1+m)^3} = 1 - \frac{M}{(1+M)^3}. \quad (53)$$

Тогда при $p = 2$

$$M = \frac{1}{m}, \quad (54)$$

при $p = 3$

$$M = \frac{\sqrt{(3+m)^2 + 4/m} - (3+m)}{2}. \quad (55)$$

Т е о р е м а 3. Для того чтобы при помощи метода (17) уменьшить L_2 — норму погрешности $\|z^0\|$ — в $1/\varepsilon$ раз, достаточно провести цикл n_0 итераций с набором параметров $\{\lambda_n\}$, задаваемых (47) k_0 раз, где n_0 определяется из (48), а k_0 — из (56):

$$k_0 \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_p)}. \quad (56)$$

Доказательство теоремы следует из леммы 3.

З а м е ч а н и е 4. Из теоремы 3 следует, что общее число итераций, требуемое для уменьшения погрешности $\|z^0\|$ в $1/\varepsilon$ раз, есть

$$v \sim \frac{2 \ln \sin \frac{\pi h}{2} \ln \varepsilon}{\ln q \ln \rho_p}. \quad (57)$$

Если учесть замечание 3 и произвести оптимизацию v по m , то получим:

для $p = 2$

$$v_{\text{опт}} = 3.00 \ln \frac{1}{\sin(\pi h/2)} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (58)$$

$$m_{\text{опт}} = 0.24, \quad \bar{p}_{2 \text{ опт}} = 0.79, \quad q = \frac{m}{M} = 0.058; \quad (59)$$

для $p = 3$

$$v_{\text{опт}} = 8.40 \ln \frac{1}{\sin(\pi h/2)} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (60)$$

$$m_{\text{опт}} = 0.13, \quad \bar{p}_{3 \text{ опт}} = 0.91, \quad q = \frac{m}{M} = 0.080. \quad (61)$$

Поступила в редакцию
21.06. 1963

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431—466.
2. D. W. Peaceman, H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, 3, № 1, 28—41.
3. J. Douglas, H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 421—439.
4. J. Douglas. Alternating direction methods for three space variables. Numer. Math., 1962, 4, № 1, 41—63.
5. G. Birkhoff, R. S. Varga. Implicit alternating direction methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 92, № 1, 13—24.
6. Е. Г. Дьяконов. Об одном способе решения уравнения Пуассона. Докл. АН СССР, 1962, 143, № 1, 21—24.
7. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 4, 549—568.
8. Е. Г. Дьяконов. Решение некоторых многомерных задач математической физики при помощи метода сеток. Дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1962.
9. С. К. Годунов, В. С. Рябенский. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.