ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 3 Март 1963 Апрель № 2

518 : 517. 944/.947

# ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

*А. А. САМАРСКИЙ*

(*Москва*)

В ряде работ (см. [1]—[5]) рассматривались основные вопросы теории однородных разностных схем для линейных, квазилинейных и нелинейных уравнений параболического типа. В этих работах были установлены устойчивость, сходимость, а также оценки для скорости сходимости (порядка точности) некоторых семейств однородных разностных схем в классах непрерывных и разрывных коэффициентов дифференциального уравнения. В [6] было обращено внимание на тот факт, что разностные схемы, имеющие второй порядок аппроксимации на равномерных сетках, на произвольной последовательности неравномерных сеток имеют лишь первый порядок аппроксимации. Поэтому вопрос о порядке точности на неравномерных сетках требует специального изучения. В [6] для уравнения

$$L^{(k, q, f)}u = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + f(x) = 0 \qquad (1.\text{В})$$

дано определение семейства однородных разностных схем на неравномерных сетках, совпадающее в случае равномерных сеток с однородными разностными схемами, изученными в [7]. Показано, что порядок точности этих схем на неравномерных сетках совпадает с порядком их точности на равномерных сетках как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов дифференциального уравнения. Интересно отметить, что указанный результат получается, если воспользоваться априорными оценками того же типа, что и в случае разрывных коэффициентов [7] и равномерной сетки. Эффективной характеристикой сетки является средний квадратичный шаг сетки

$$\|h\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i^2 h_i\right)^{1/2}, \qquad (2.\text{В})$$

так что оценке $\|z\|_0 = O(h^2)$ на равномерной сетке соответствует оценка $\|z\|_0 = O(\|h\|_2^2)$ на неравномерной сетке.

В данной статье изучаются однородные разностные схемы для уравнений параболического типа с одной пространственной переменной. В § 1 для уравнения (1.В) рассматривается новое семейство однородных

разностных схем, которое на специальных последовательностях сеток $\omega_h(k)$, зависящих от выбора коэффициентов $k$, $q$, $f$, имеет в классе разрывных коэффициентов второй порядок точности ($\|y-u\|_0 = O(\|h\|_2^2)$).

В § 2 рассматриваются однородные разностные схемы для линейного и квазилинейного уравнений

$$c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \quad (2.\text{B})$$

$$c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (3.\text{B})$$

и вычисляется погрешность аппроксимации этих схем на неравномерных сетках.

Априорным оценкам посвящен § 3. Среди полученных в § 3 оценок следует отметить теорему 5, которая даже в случае равномерных сеток дает существенное усиление результатов, полученных в [1] и [3]. Опираясь на специальное представление погрешности аппроксимации рассматриваемых схем, найденное в § 2, и пользуясь априорными оценками § 3, мы доказываем в § 4 ряд теорем о порядке точности однородных разностных схем для (2.B) и (3.B) на последовательности неравномерных сеток. Из результатов § 4 следует вывод: порядок точности рассматриваемых схем при переходе к неравномерным сеткам остается неизменным (по аналогии с [6]).

В п. 5 § 4 рассматривается так называемая экономичная по числу операций однородная разностная схема для системы параболических уравнений.

В каждом параграфе применяется своя нумерация формул; при ссылке на формулы из другого параграфа — двойная нумерация, например (2.3) — формула (3) из § 2.

## § 1. Стационарное уравнение

1. Однородные разностные схемы на неравномерной сетке. В [6] изучались однородные разностные схемы на неравномерной сетке для стационарного уравнения теплопроводности

$$L^{(k,q,f)}u = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0<x<1,$$
$$u(0) = u_1, \qquad u(1) = u_2,$$
$$k(x) \geqslant c_1 > 0, \qquad q(x) \geqslant 0 \qquad (c_1 = \text{const}). \quad (1)$$

Пусть $\bar{\omega}_h = \{x_i \in [0,1],\ 0 \leqslant i \leqslant N\}$ — произвольная разностная сетка на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, причем $x_0 = 0$, $x_N = 1$. Шаг сетки $h_i = x_i - x_{i-1} > 0$ $(0 < i \leqslant N)$ удовлетворяет лишь естественному условию нормировки

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = 1, \quad (2)$$

а в остальном является произвольной сеточной функцией. Будем пользоваться безындексными обозначениями (см. [6]):

$$h = h_i, \quad h_+ = h_{i+1}, \quad \hbar = 0.5\,(h + h_+), \quad y = y\,(x) = y_i,$$
$$y^{(+1)} = y\,(x + h_+) = y_{i+1}, \quad y^{(-1)} = y\,(x - h) = y_{i-1}, \quad y_{\bar{x}} = (y - y^{(-1)})/h,$$
$$y_x = (y^{(+1)} - y)/h_+, \quad y_{\hat{x}} = (y^{(+1)} - y)/\hbar = \frac{h_+}{h}\, y_x, \quad y_{\check{x}} = \frac{h}{\hbar}\, y_{\bar{x}}.$$

В [6] рассматривались канонические схемы вида

$$L_h^{(k,\,q,\,f)} y = (a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi = 0, \qquad y_0 = u_1, \quad y_N = u_2. \tag{3}$$

Коэффициенты $a$, $d$, $\varphi$ вычислялись при помощи тех же шаблонных функционалов $A\,[\bar{k}\,(s)]$ $(-1 \leqslant s \leqslant 0)$, $D\,[\bar{q}\,(s)]$ $(-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5)$, $F\,[\bar{f}\,(s)]$ $(-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5)$, что и в случае равномерных сеток (см. [7]), по формулам

$$a = A\,[k\,(x + sh)], \tag{4}$$
$$d = D\,[q\,(x + (s + \Delta)\,\hbar)], \qquad \varphi = F\,[f\,(x + (s + \Delta)\,\hbar)],$$
$$\Delta = (h_+ - h)/4\hbar. \tag{5}$$

Семейство однородных схем (3) определяется заданием класса шаблонных функционалов $A, D, F$ и законом (4) — (5) вычисления коэффициентов схемы $a$, $d$, $\varphi$ на произвольной неравномерной сетке.

В этой статье мы будем рассматривать другое семейство однородных схем (3), которое отличается от семейства [6] другим законом вычисления $d$, $\varphi$ на неравномерной сетке. Будем предполагать, что $A$, $D$, $F$ удовлетворяют условиям (ср. [6]):

1) $A\,[\bar{k}\,(s)]$ — неубывающий однородный функционал первой степени, имеющий второй дифференциал,
2) $D\,[\bar{q}\,(s)]$ и $F\,[\bar{f}\,(s)]$ — линейные неотрицательные $(F\,[f] \geqslant 0$ при $f \geqslant 0)$ функционалы,
3) $A\,[1] = 1, A_1\,[s] = -0.5, D\,[1] = F\,[1] = 1, D\,[s] = F\,[s] = 0$ (6)

(необходимые условия второго порядка аппроксимации на равномерной сетке).

Кроме того, предположим, что $D$ и $F$ удовлетворяют дополнительным требованиям:

4)
$$F\,[\eta_0^-(s)] = \tfrac{1}{2}, \qquad F\,[\pi_0\,(s)] = 0,$$
$$D\,[\eta_0^-(s)] = \tfrac{1}{2}, \qquad D\,[\pi_0\,(s)] = 0. \tag{7}$$

Здесь мы пользуемся обозначениями (ср. [7], § 1, п. 11):

$$\eta_\theta^-(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s < \theta, \\ 0 & \text{при } s \geqslant \theta; \end{cases} \qquad \pi_\theta\,(s) = \begin{cases} 1, & s = \theta, \\ 0, & s \neq \theta, \end{cases}$$

где $\theta$ — произвольное число. Вводя функцию

$$\eta_\theta^+(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \leqslant \theta, \\ 1 & \text{при } s > \theta, \end{cases}$$

будем иметь

$$\eta_\theta^-(s) + \eta_\theta^+(s) + \pi_\theta(s) = 1. \tag{8}$$

Условие $F[\pi_0(s)] = 0$ означает, что $F[\bar{f}(s)]$ не зависит от $\bar{f}(0)$ (регулярность функционала $F$ в точке $s = 0$, ср. [7], § 1, п. 11).

Коэффициент $\varphi$ будем вычислять по формуле

$$\varphi = F[f^*(s)],$$

$$f^*(s) = \frac{h}{\hbar} f(x + sh)\,\eta_0^-(s) + \frac{h_+}{\hbar} f(x + sh_+)\,\eta_0^+(s) + f(x)\,\pi_0(s), \quad -0.5 \leqslant s \leqslant 0.5.$$

В силу линейности $F$ и условия $F[\pi_0(s)] = 0$

$$\varphi = \varphi(x) = \frac{h}{\hbar} F[f(x + sh)\,\eta_0^-(s)] + \frac{h_+}{\hbar} F[(f(x + sh_+)\,\eta_0^+(s)]. \tag{9}$$

Аналогично определяется коэффициент $d$:

$$d = d(x) = \frac{h}{\hbar} D[q(x + sh)\,\eta_0^-(s)] + \frac{h_+}{\hbar} D[q(x + sh_+)\,\eta_0^+(s)]. \tag{10}$$

Из (6) и (7) следует:

$$F[\eta_0^+(s)] = \tfrac{1}{2}, \qquad F[s\eta_0^+(s)] = -F[s\eta_0^-(s)]. \tag{11}$$

В самом деле, учитывая (8), находим

$$F[\eta_0^+(s)] = F[1 - \eta_0^-(s) - \pi_0(s)] = F[1] - F[\eta_0^-(s)] = \tfrac{1}{2},$$
$$F[s\eta_0^+(s)] = F[s] - F[s\eta_0^-(s)] - F[s\pi_0(s)] = -F[s\eta_0^-(s)],$$

так как $F[s] = 0$, $F[s\pi_0(s)] = F[0] = 0$.

Если сетка $\bar{\omega}_h$ равномерна, т. е. $h = h_+ = \hbar$, то формулы (5) и (9) имеют одинаковый вид:

$$\varphi = F[f(x + sh)].$$

В самом деле, в этом случае из (9) следует

$$\varphi = F[f(x + sh)\,(\eta_0^-(s) + \eta_0^+(s))] = F[f(x + sh)\,(1 - \pi_0(s))] =$$
$$= F[f(x + sh)],$$

так как $F[f(x + sh)\,\pi_0(s)] = F[f(x)\,\pi_0(s)] = f(x)\,F[\pi_0(s)] = 0$. Если же $F[\pi_0(s)] \neq 0$, то формула (8) дает

$$\varphi = F[f(x + sh)] - f(x)\,F[\pi_0(s)].$$

Для частного случая

$$F = F^*[\mu] = \int_{-0.5}^{0.5} \mu(s)\,ds$$

схемы (5) и (9) совпадают на произвольной сетке $\bar{\omega}_h$:

$$\varphi^* = F^*[f(x + (s + \Delta)\hbar)] = \frac{1}{\hbar} \int_{x-0.5h}^{x+0.5h_+} f(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{h}{\hbar} \int_{-0.5}^{0} f(x + sh)\,ds + \frac{h_+}{\hbar} \int_{0}^{0.5} f(x + sh_+)\,ds,$$

т. е.

$$\varphi^* = \frac{h}{\hbar} F^* [f(x + sh)\, \eta_0^-(s)] + \frac{h_+}{\hbar} F^* [f(x + sh_+)\, \eta_0^+(s)].$$

В общем же случае формулы (5) и (9) дают различные результаты. Достаточно привести пример:

$$F[\bar{f}(s)] = \tfrac{1}{2}\left[\bar{f}\left(-\tfrac{1}{2}\right) + \bar{f}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right].$$

Формула (5) сразу дает

$$\varphi = \tfrac{1}{2}[f(x - 0.5h) + f(x + 0.5h_+)]. \tag{12}$$

Пользуясь формулой (9), находим

$$\varphi = \frac{h}{2\hbar} f(x - 0.5h) + \frac{h_+}{2\hbar} f(x + 0.5h_+). \tag{13}$$

Выражения (12) и (13) совпадают только на равномерной сетке ($f$ — произвольная функция).

Таким образом, исходное семейство схем, коэффициенты которых определяются по формулам (4), (9) и (10), отлично от семейства схем, рассмотренного в [6].

2. Погрешность аппроксимации. Найдем выражение для погрешности аппроксимации схемы

$$L_h^{(k, q, f)} y = (a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi = 0, \quad y_0 = u_1, \qquad y_N = u_2, \tag{14}$$

где $a$, $d$, $\varphi$ — коэффициенты, определяемые по формулам (4), (9) и (10).

Пусть $u(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая требованиям $u \in C^{(2)}$, $(ku')' \in C^{(1,1)}$ и $k$, $q$, $f \in C^{(1,1)}$. Тогда, по аналогии с [6], найдем:

$$\begin{gathered}(au_{\bar{x}})_{\hat{x}} = (ku')' + (\mu_a)_{\hat{x}} + \psi_a^*, \\ \mu_a = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \tfrac{1}{8} h^2 \overline{(ku')''}, \qquad \psi_a^* = O(h^2) + O(h_+^2),\end{gathered} \tag{15}$$

где $\bar{k} = k(x - 0.5h)$ и т. д. Найдем разложение $\varphi$ по степеням $h$ и $h_+$:

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{h}{\hbar} F[(f(x) + shf'(x))\, \eta_0^-(s)] + \\ + \frac{h_+}{\hbar} F[(f(x) + sh_+ f'(x))\, \eta_0^+(s)] + O(h^2) + O(h_+^2).\end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда и из (6), (11) следует

$$\varphi = f(x) - (h_+^2 - h^2) f'(x) F[s\eta_0^-(s)]/\hbar + O(h^2) + O(h_+^2),$$

или

$$\varphi - f = -(h^2 \bar{f}')_{\hat{x}} F[s\eta_0^-(s)] + O(h^2) + O(h_+^2). \tag{17}$$

Для схемы (5) в [6] было получено выражение

$$\varphi - f = \tfrac{1}{8}(h^2 \bar{f}')_{\hat{x}} + O(h^2) + O(h_+^2).$$

Заметим, что $F[s\eta_0^-(s)] = -\frac{1}{8}$, например в случае

$$F = F^*[\mu] = \int_{-0.5}^{0.5} \mu(s)\, ds \quad \text{или} \quad F[\mu] = \tfrac{1}{2}\left[\mu\left(-\tfrac{1}{4}\right) + \mu\left(\tfrac{1}{4}\right)\right].$$

По аналогии с (17) находим

$$(d - q)\, u = -(h^2\overline{q'u})_{\hat{x}}\, D\,[s\eta_0^-(s)] + O(h^2) + O(h_+^2). \tag{18}$$

Пользуясь (15), (17), (18), получим для погрешности аппроксимации схемы (14)

$$\psi = L_h^{(k,\,q,\,f)}u - L^{(k,\,q,\,f)}u \tag{19}$$

следующее выражение:

$$\psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \qquad \psi^* = O(h^2) + O(h_+^2),$$
$$\mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \tfrac{1}{8}h^2\,\overline{(ku')''} + h^2\overline{q'u}D\,[s\eta_0^-(s)] - \overline{h^2f'}F\,[s\eta_0^-(s)]. \tag{20}$$

Если $A$ имеет второй дифференциал, то, в силу условий (6),

$$a = \bar{k} + O(h^2) \quad \text{и} \quad \mu = O(h^2).$$

Если $u = u(x)$ — решение дифференциального уравнения (1), то $(ku')'' = (qu)' - f'$ и

$$\mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + h^2\left\{\left(-\tfrac{1}{8} + D\,[s\eta_0^-(s)]\right)\overline{q'u} - \left(\tfrac{1}{8} + F\,[s\eta_0^-(s)]\right)\overline{f'} + \tfrac{1}{8}\overline{qu'}\right\} \tag{21}$$

3. Случай разрывных коэффициентов. Предположим теперь, что $k$, $q$ и $f$ имеют разрыв I рода в узле $x \in \omega_h$. Для простоты будем пока считать, что имеется только одна точка разрыва. Обозначим $f_л = f(x - 0)$, $f_п = f(x + 0)$. Пусть $u(x)$ в точке $x \in \omega_h$ удовлетворяет условиям сопряжения $[u] = u_п - u_л = 0$, $[ku'] = 0$, а слева и справа от этой точки выполнены условия п. 2.

Покажем, что и в точке разрыва $x \in \omega_h$ справедливо представление (20), если погрешность аппроксимации $\psi$ определить так:

$$\psi = L_h^{(k,\,q,\,f)}u - \widetilde{L^{(k,\,q,\,f)}u}, \tag{22}$$

где

$$\widetilde{L^{(k,\,q,\,f)}u} = \frac{h}{2\hbar}(L^{(k,\,q,\,f)}u)_л + \frac{h_+}{2\hbar}(L^{(k,\,q,\,f)}u)_п.$$

Если $u = u(x)$ — решение уравнения (1), то $\widetilde{L^{(k,\,q,\,f)}u} = 0$. Выражение (19) для $\psi$ следует из (22) в случае $(L^{(k,\,q,\,f)}u)_л = (L^{(k,\,q,\,f)}u)_п$.

В целесообразности определения (22) нетрудно убедиться, если найти разложение $(au_{\bar{x}})_{\hat{x}}$, $d$, $\varphi$ по степеням $h$ и $h_+$ в окрестности точки $x \in \omega_h$ разрыва коэффициентов уравнения. В самом деле,

$$\overline{(ku')} = (ku')_л - 0.5h\,(ku')'_л + \tfrac{1}{8}h^2\,(ku')''_л + O(h^3),$$
$$\overline{(ku')}^{(+1)} = (ku')_п + 0.5h_+\,(ku')'_п + \tfrac{1}{8}h_+^2\,(ku')''_п + O(h_+^3).$$

Отсюда и из условия $[ku'] = (ku')_п - (ku')_л = 0$ следует:

$$\widetilde{(ku')'} = \overline{(ku')}_{\hat{x}} - \left(\tfrac{1}{8}h^2\,\overline{(ku')''}\right)_{\hat{x}} + O(h^2) + O(h_+^2),$$
$$(au_{\bar{x}})_{\hat{x}} = \widetilde{(ku')'} + \left(au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \tfrac{1}{8}h^2\,\overline{(ku')''}\right)_{\hat{x}} + O(h^2) + O(h_+^2).$$

Разлагая затем $f$ по степеням $h$ и $h_+$ в окрестности точки $x \in \omega_h$: $f(x+sh) = f_л + shf'_л + O(h^2)$, $s < 0$; $f(x + sh_+) = f_п + sh_+f'_п + O(h_+^2)$, $s > 0$ находим

$$\varphi = \frac{h}{\hbar}\{f_л F[\eta_0^-] + hf'_л F[s\eta_0^-(s)]\} + \\ + \frac{h_+}{\hbar}\{f_п F[\eta_0^+] + h_+f'_п F[s\eta_0^+(s)]\} + O(h^2) + O(h_+^2).$$

После подстановки сюда (7) и (11) получим

$$\varphi = \widetilde{f} - (h^2\overline{f'})_{\hat{x}} F[s\eta_0^-(s)] + O(h^2) + O(h_+^2), \tag{23}$$

где

$$\widetilde{f} = \frac{h}{2\hbar} f_л + \frac{h_+}{2\hbar} f_п.$$

Аналогичные рассуждения дают

$$(d - \widetilde{q})u = -(h^2\overline{q'u})_{\hat{x}} D[s\eta_0^-(s)] + O(h^2) + O(h_+^2). \tag{24}$$

В результате убеждаемся в справедливости формулы

$$\psi = L_n^{(k, q, f)}u - \widetilde{L^{(k, q, f)}u} = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \tag{25}$$

где $\mu$ определяется по формуле (20), а $\psi^* = O(h^2) + O(h_+^2)$.

При изучении разностных схем для уравнений параболического типа, мы будем пользоваться другим представлением:

$$\psi = \mu^*_{\hat{x}} + \psi^*, \quad \psi^* = O(h^2) + O(h_+^2), \quad \mu^* = h^2\overline{\mu}^*_0, \quad \overline{\mu}^*_0 = \mu_0(x - 0.5h),$$

$$\mu^*_0 = \beta u' + \tfrac{1}{8}(ku')'' + q'uD[s\eta_0^-(s)] - f'F[s\eta_0^-(s)], \tag{26}$$

где

$$\beta = \frac{k''}{2}\left(A_1[s^2] - \tfrac{1}{4}\right) + \frac{(k')^2}{k}A_2[s].$$

Эти формулы получены в предположении, что $k \in Q^{(2,1)}$, а функционал $A[\overline{k}(s)]$ имеет третий дифференциал. На выводе этих формул, ввиду его элементарности, не будем останавливаться.

В случае схем [6] представление (25), вообще говоря, не имеет места, если $x \in \omega_h$ — точка разрыва коэффициентов $k$, $q$, $f$ дифференциального уравнения. В связи с этим замечание 2 на стр. 829 статьи [6] нуждается в уточнении.

4. О порядке точности на неравномерных сетках. Поскольку все априорные оценки, полученные в [1], сохраняют силу, а выражения для $\psi$ в [6] и здесь одного типа, то теоремы статьи [6] о порядке точности на неравномерных сетках справедливы и для рассматриваемого нами семейства схем (14), определяемых формулами (4), (9), (10) и условиями (7). Пусть заданы коэффициенты $k$, $q$, $f$, имеющие конечное число разрывов в точках $x = \xi_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$. Всегда можно построить такую неравномерную сетку $\overline{\omega}_h$, что точки $\xi_\nu \in (0, 1)$ будут ее узлами, т. е. $\xi_\nu = x_{n_\nu}$ ($\theta_\nu = 0$), $0 < n_\nu < N$. Построенную таким

образом последовательность сеток $\bar{\omega}_h$, зависящую от выбора коэффициентов $k$, $q$, $f$, обозначим $\bar{\omega}_h(k)$. Пользуясь методами работы [6] и учитывая представление (25) на последовательности сеток $\bar{\omega}_h(k)$, нетрудно убедиться в том, что справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Если* $k, q, f \in Q^{(1,1)}$, *то любая схема* (14) *из исходного семейства п.* 1 *имеет второй порядок точности на последовательности сеток* $\bar{\omega}_h(k)$, *так что*

$$\| y - u \|_0 \leqslant M \| h \|_2^2,$$

*где* $y$ — *решение задачи* (14), $u$ — *решение задачи* (1), $M$ — *положительная постоянная, не зависящая от сетки,* $\| h \|_2$ — *средний квадратичный шаг,*

$$\| h \|_2 = \left( \sum_{i=1}^{N} h_i^2 h_i \right)^{1/2}.$$

Для доказательства теоремы нам понадобится полученная в [6] априорная оценка

$$\| z \|_0 = \| y - u \|_0 \leqslant M \{ \| \mu^* \|_1 + \| \psi^* \|_3 \}$$

и представление (25), справедливое во всех узлах сетки $\omega_h(k)$.

Следует подчеркнуть, что единственной характеристикой сетки является средний квадратичный шаг $\| h \|_2$.

## § 2. Уравнения параболического типа

Перейдем теперь к изучению однородных разностных схем для уравнений параболического типа.

1. Л и н е й н о е у р а в н е н и е т е п л о п р о в о д н о с т и. Мы начнем изложение с однородных разностных схем для линейного уравнения теплопроводности. Поставим исходную задачу. Пусть дана область $\overline{D} = (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T)$. Требуется в $\overline{D}$ найти решение задачи

$$c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = L^{(k, q, f)} u = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t) u + f(x, t), \qquad (1)$$

$$u(0, t) = u_1(t), \qquad u(1, t) = u_2(t), \qquad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad (3)$$

$$0 < c_1 \leqslant k(x, t), \qquad 0 < c_2 \leqslant c(x, t), \qquad 0 \leqslant q(x, t), \qquad (4)$$

где $c_1$, $c_2$ — положительные постоянные. Пусть $\Gamma_\nu \{x = \xi_\nu(t) \ (1 \leqslant \nu \leqslant \nu_0)\}$ — конечное число дифференцируемых и попарно не пересекающихся кривых. Коэффициенты $k$, $q$, $f$, $c$ могут иметь разрывы I рода только на кривых $\Gamma_\nu$ $(x = \xi_\nu(t), \ \nu = 1, 2, \ldots, \nu_0)$. Если $k(x, t)$ имеет разрыв при $x = \xi_\nu(t)$, то выполняются условия сопряжения

$$[u]_\nu = u(\xi_\nu(t) + 0, t) - u(\xi_\nu(t) - 0, t) = 0, \quad \left[ k \frac{\partial u}{\partial x} \right]_\nu = 0, \qquad x = \xi_\nu(t). \qquad (5)$$

Обозначим, как обычно (см. [5]),

$$\Delta_\nu = (\xi_\nu(t) < x < \xi_{\nu+1}(t),\ 0 < t \leqslant T), \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \nu_0,$$

$$\xi_0(t) = 0, \qquad \xi_{\nu_0+1}(t) = 1,$$

$$Д = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \Delta_\nu, \qquad \overline{\Delta}_\nu = (\xi_\nu(t) \leqslant x \leqslant \xi_{\nu+1}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T).$$

Если $\xi_\nu(t) \equiv 0$, то $x = \xi_\nu(t)$ — прямая, параллельная оси $t$ в плоскости $(x, t)$ («неподвижный разрыв»).

В дальнейшем всюду предполагается, что задача (1) — (5) имеет единственное решение $u = u(x, t)$, непрерывное в $\overline{Д}$ и обладающее нужными по ходу изложения производными. Аналогичные предположения делаются и относительно других задач, которые рассматриваются ниже.

2. Однородные разностные схемы. Пусть $\overline{\omega}_h = \{x_i,\ 0 \leqslant i \leqslant N\}$ — произвольная разностная сетка на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_j,\ 0 \leqslant j \leqslant K\}$ — сетка на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, причем $t_0 = 0$, $t_K = T$; $\omega_h = \{x_i,\ 0 < i < N\}$, $\omega_\tau = \{t_j,\ 0 < j \leqslant K\}$. Обозначим $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \overline{Д}\}$ пространственно-временную сетку, $\Omega = \omega_h \times \omega_\tau$ — множество внутренних узлов сетки $\overline{\Omega}$. Шаги $h_i = x_i - x_{i-1} > 0$, $0 < i \leqslant N$, $\tau_j = t_j - t_{j-1} > 0$, $0 < j \leqslant K$, сеток $\overline{\omega}_h$ и $\overline{\omega}_\tau$ произвольны и удовлетворяют лишь условиям нормировки

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = 1, \qquad \sum_{j=1}^{K} \tau_j = T. \tag{6}$$

Если $\tau_j - \tau_{j-1} = O(\tau_j \tau_{j-1})$ или $\tau_j - \tau_{j-1} = O(\tau_j^2)$, то сетку $\overline{\omega}_\tau$ будем называть квазиравномерной.

Для сеточных функций, как правило, будем пользоваться безындексными обозначениями, полагая

$$h = h_i, \quad h_+ = h_{i+1}, \quad \hbar = 0.5(h + h_+), \quad \tau = \tau_{j+1}, \quad \check{\tau} = \tau_j,$$
$$y = y(x, t) = y_i^{j+1} = y^{j+1} = y_i, \qquad y_{\overline{t}} = (y - \check{y})/\tau.$$

Обозначения для $y_{\overline{x}}$, $y_x$, $y_{\hat{x}}$, $y_{\breve{x}}$ были введены в п. 1, § 1.

Остальные обозначения вводятся по мере надобности.

Задаче (1) — (5) поставим в соответствие шеститочечную однородную разностную схему (ср. [2]):

$$\left.\begin{gathered} \rho^{(\alpha)} y_{\overline{t}} = (L_h^{(k, q, f)} y)^{(\alpha)}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad (x, t) \in \Omega, \\ y_0 = y(0, t) = u_1(t), \quad y_N = y(1, t) = u_2(t), \quad t \in \omega_\tau; \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \end{gathered}\right\} \tag{7}$$

где $\rho^{(\alpha)} = \alpha\rho + (1 - \alpha)\check{\rho}$, $L_h^{(k, q, f)} y = (a y_{\overline{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi$ — схема, определенная в § 1.

Коэффициенты $a$, $d$, $\varphi$, $\rho$ определяются по формулам

$$a = a(x, t) = A[k(x + sh, t)],$$

$$d = d(x, t) = \frac{h}{\hbar} D[q(x + sh, t)\, \eta_0^-(s)] + \frac{h_+}{\hbar} D[q(x + sh_+, t)\, \eta_0^+(s)],$$

$$\varphi = \varphi(x, t) = \frac{h}{\hbar} F[f(x + sh, t)\,\eta_0^-(s)] + \frac{h_+}{\hbar} F[f(x + sh_+, t)\,\eta_0^+(s)],$$

$$\rho = \rho(x, t) = \frac{h}{\hbar} R[c(x + sh, t)\,\eta_0^-(s)] + \frac{h_+}{\hbar} R[c(x + sh_+, t)\,\eta_0^+(s)].$$

Шаблонные функционалы $A, D, F, R$ удовлетворяют всем требованиям 1) — 4), указанным в п.1, § 1, причем $R$ обладает теми же свойствами что и $D$, $F$, так что

$$R[1] = 1, \quad R[s] = 0, \quad R[\eta_0^-(s)] = \tfrac{1}{2}, \quad R[\pi_0(s)] = 0.$$

Кроме того, всюду в дальнейшем будем предполагать, что $A[\overline{k}(s)]$ имеет третий дифференциал.

Из (4) и свойств шаблонных функционалов следует

$$0 < c_1 \leqslant a, \qquad 0 < c_2 \leqslant \rho, \qquad 0 \leqslant d. \tag{8}$$

3. Погрешность аппроксимации на неравномерной сетке. Пусть $u = u(x, t)$ — решение задачи (1) — (5), $y$ — решение задачи (7). Сеточная функция $z = y - u$ определяется условиями:

$$\left.\begin{aligned} \rho^{(\alpha)} z_{\overline{t}} &= (\Lambda z)^{(\alpha)} + \Psi, \qquad \Lambda z = (a z_{\overline{x}})_{\hat{x}} - dz, \\ z_0 &= z_N = 0, \qquad z(x, 0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\Psi = (L_h^{(k, q, f)} u)^{(\alpha)} - \rho^{(\alpha)} u_{\overline{t}},$$

где $\Psi$ — погрешность аппроксимации схемы (7) в классе решений $u = u(x, t)$ дифференциального уравнения (1).

Будем предполагать всюду, что выполнены условия, обеспечивающие максимальный порядок аппроксимации схемы (7) на равномерной сетке (условия А). Эти условия А выполнены либо во всей области $\overline{D}$, либо в каждой из областей $\overline{\Delta}_\nu$ (условия $A_\nu$), если коэффициенты дифференциального уравнения разрывны (см. [4]).

Рассмотрим некоторый узел $(x, t) \in \Omega$. Пусть в окрестности этого узла выполнены условия А. Пользуясь уравнением (1), можно написать:

$$\Psi = (L_h^{(k, q, f)} u - L^{(k, q, f)} u)^{(\alpha)} - \left[\rho^{(\alpha)} u_{\overline{t}} - \left(c \frac{\partial u}{\partial t}\right)^{(\alpha)}\right].$$

На равномерной сетке $\Omega$ ($\tau = T/K = \text{const}$, $h = 1/N = \text{const}$) в силу условий А имеем

$$\Psi = O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha}), \qquad m_\alpha = \begin{cases} 2, & \alpha = 0.5, \\ 1, & \alpha \neq 0.5. \end{cases}$$

Представим $\Psi$ в виде

$$\Psi = \psi^{(\alpha)} + \overline{\psi}, \qquad \psi = L_h^{(k, q, f)} u - L^{(k, q, f)} u - (\rho - c) \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\overline{\psi} = -\alpha\rho\left(u_{\overline{t}} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) - (1 - \alpha)\,\check{\rho}\left(u_{\overline{t}} - \frac{\partial \check{u}}{\partial t}\right).$$

Пользуясь представлением (1.25), находим

$$\psi = \mu^{**}_{\hat{x}} + O(h^2) + O(h_+^2),$$

$$\mu^{**} = h^2\overline{\mu_0^{**}}, \qquad \mu_0^{**} = \mu_0^{*} - \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} R\,[s\eta_0^-(s)],$$

где $\mu_0^*$ определяется по формуле (1.26).

Нетрудно заметить, что $\overline{\psi} = O(\tau^{m\alpha})$. Тем самым доказана

Л е м м а 1. *Погрешность аппроксимации схемы* (7) *можно представить в виде*

$$\left.\begin{aligned} &\Psi = \mu^{(\alpha)}_{\hat{x}} + \psi^*, \qquad \psi^* = O(\tau^{m\alpha}) + O(h^2) + O(h_+^2), \\ &\mu = \overline{\mu_0} h^2, \qquad \overline{\mu_0} = \mu_0(x - 0.5h, t), \qquad \mu_0 = \beta u' + \tfrac{1}{8}(ku')'' + \\ &+ q'uD\,[s\eta_0^-(s)] - f'F\,[s\eta_0^-(s)] + c'\frac{\partial u}{\partial t} R\,[s\eta_0^-(s)], \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\beta = \frac{k''}{2}\left(A_1\,[s^2] - \tfrac{1}{4}\right) + \frac{(k')^2}{k} A_2\,[s].$$

(Штрих означает дифференцирование по $x$.)

З а м е ч а н и е 1. Из условий А и уравнения (1) следует, что $\partial u/\partial t$ удовлетворяет условию Липшица по $x$.

З а м е ч а н и е 2. Из (10) видно, что на неравномерной сетке схема (7) имеет первый порядок аппроксимации по $x$ независимо от порядка гладкости функции $u = u(x, t)$ и коэффициентов уравнения (1).

Рассмотрим случай, когда $k$, $q$, $f$, $c$ имеют конечное число разрывов на прямых $x = \xi_\nu = \text{const}\ (t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0)$, параллельных оси $t$ в плоскости $(x, t)$ (неподвижные разрывы). Так как линии разрыва фиксированы, то всегда можно изменением сетки $\omega_h$ в окрестности точек $x = \xi_\nu \in (0, 1)$ добиться того, что точки $x = \xi_\nu$ будут узлами сетки $\omega_h$, т. е. $\xi_\nu = x_{n_\nu}$, $0 < n_\nu < N$ ($n_\nu$ не зависит от $t$). Построенную таким образом последовательность сеток $\overline{\omega}_h$, зависящую от выбора коэффициентов $k$, $q$, $f$, $c$, обозначим $\overline{\omega}_h(k)$, а соответствующую последовательность пространственно-временны́х сеток обозначим $\overline{\Omega}(k) = \overline{\omega}_h(k) \times \overline{\omega}_\tau$.

Пусть $\xi = x_n$ — одна из точек разрыва, в которой $k_л \neq k_п$, $q_л \neq q_п$, $f_л \neq f_п$, $c_л \neq c_п$. В этой точке выполняются условия сопряжения

$$[u] = u_п - u_л = 0, \quad \left[k\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0 \quad \text{при} \quad x = \xi \in \omega_h. \tag{11}$$

По аналогии с § 1 погрешность аппроксимации схемы (7) в точке $\xi \in \omega_h$ определим так:

$$\Psi = (L_h^{(k, q, f)} u - \widetilde{L^{(k, q, f)} u})^{(\alpha)} = \left[\rho^{(\alpha)} u_{\bar{t}} - \widetilde{\left(c\frac{\partial u}{\partial t}\right)}^{(\alpha)}\right]. \tag{12}$$

Так как разрыв неподвижный, то $[\partial u/\partial t] = 0$ при $x = \xi$.

Используя результаты п. 3, § 1, а также рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 1, убеждаемся в том, что формулы (10) сохра-

няют силу и в точке $\xi \in \omega_h$ разрыва коэффициентов уравнения (1) и, следовательно, верна

Лемма 2. *Если коэффициенты $k$, $q$, $f$, $c$ имеют конечное число неподвижных разрывов и в каждой из областей $\overline{\Delta}_\nu$ ($\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0$) выполнены условия $A$, то на последовательности сеток $\overline{\Omega}(k)$ погрешность аппроксимации любой из схем* (7) *определяется по формулам* (10) *во всех узлах $(x, t) \in \Omega(k)$.*

Если $k$, $q$, $f$, $c$ имеют разрывы I рода на кривых $x = \xi_\nu(t) = x_{n_\nu} + \theta_\nu h_{n_\nu+1}$, $0 < \theta_\nu < 1$, то представление (10) не имеет места в узлах $(x_{n_\nu}, t)$ и $(x_{n_\nu+1}, t)$.

4. Линейное уравнение общего вида. Рассмотрим теперь линейное параболическое уравнение общего вида

$$c(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = L^{(k, q, f)}u + r(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{13}$$

$u(0, t) = u_1(t)$, $u(1, t) = u_2(t)$, $u(x, 0) = u_0(x)$.

Чтобы написать для него однородную разностную схему на неравномерной сетке, надо найти подходящую разностную аппроксимацию для члена $r\frac{\partial u}{\partial x}$, пригодную и в случае разрывных коэффициентов, в частности на последовательности сеток $\overline{\omega}_h(k)$. Мы будем пользоваться одной из следующих аппроксимаций:

$$r\frac{\partial u}{\partial x} \sim \lambda(y) = \begin{cases} b^- y_{\overset{\times}{x}} + b^+ y_{\hat{x}} = \frac{h}{\hbar} b^- y_{\bar{x}} + \frac{h_+}{\hbar} b^+ y_x, \\ b\,(a^{(+1)} y_x + a y_{\bar{x}}), \end{cases} \tag{14}$$

где

$$y_{\overset{\times}{x}} = \frac{h}{\hbar} y_{\bar{x}}, \qquad y_{\hat{x}} = \frac{h_+}{\hbar} y_x,$$

$$b^- = \frac{h}{\hbar} B\,[r(x + sh, t)\,\eta_0^-(s)], \qquad b^+ = \frac{h_+}{\hbar} B\,[r(x + sh_+, t)\,\eta_0^+(s)],$$

$$b = \frac{h}{\hbar} B\,[\widetilde{r}(x + sh, t)\,\eta_0^-(s)] + \frac{h_+}{\hbar} B\,[\widetilde{r}(x + sh_+, t)\,\eta_0^+(s)], \quad \widetilde{r} = r/2k.$$

Здесь $B[\mu(s)]$ — линейный неубывающий функционал, удовлетворяющий условиям

$$B[1] = 1, \quad B[s] = 0, \quad B[\eta_0^-(s)] = \tfrac{1}{2}, \quad B[\pi_0(s)] = 0.$$

Найдем погрешность аппроксимации для каждого из выражений $\lambda(y)$. Пусть $x \in \omega_h$ — точка разрыва $r(x, t)$ и $k(x, t)$. Рассматривая $\lambda_1(u) = (hb^- u_{\bar{x}} + h_+ b^+ u_x)/\hbar$, после несложных вычислений находим

$$\lambda_1(u) = \frac{1}{2\hbar}(r_л u'_л h + r_п u'_п h_+) + (\overline{\mu}_r)_{\hat{x}} + O(h^2) + O(h_+^2),$$

или

$$\lambda_1(u) - \widetilde{ru}' = (\overline{\mu}_r)_{\hat{x}} + O(h^2) + O(h_+^2), \tag{15}$$

где

$$\overline{\mu}_r = \mu_r(x - 0.5h, t), \qquad \mu_r = (ru'' - r'u'B\,[s\eta_0^-(s)])\,h^2. \tag{16}$$

Если $[ru'] = 0$, то $\widetilde{ru}' = ru'$. Если $r(x, t)$ и $k(x, t)$ имеют разрывы в точке $\xi = x_n + \theta h_{n+1}$ $(0 < \theta < 1)$, то $(\lambda_1(u) - ru')_{x=x_n} = O(1)$ (при $\theta < 0.5$) и в точке $x = x_n$ $\Psi = O(1)$ даже для схемы

$$A^*[\mu] = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{\mu(s)}\right]^{-1}, \qquad B^*[\mu] = D^*[\mu] = F^*[\mu] = R^*[\mu] = \int_{-0.5}^{0.5} \mu(s)\, ds.$$

В этом случае для повышения порядка точности следует пользоваться вторым выражением для $\lambda(y)$ (см. [4], [5]).

Напишем теперь, по аналогии с [4], разностную схему для (13):

$$\left.\begin{aligned} &\rho^{(\alpha)} y_{\bar{t}} = (L_h^{(k, q, f)} y + \lambda(y))^{(\alpha)}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ &y_0 = u_1(t), \quad y_N = u_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Если выполнены условия A, обеспечивающие максимальный порядок аппроксимации схемы (17), то справедливы формулы вида (10) для погрешности аппроксимации $\Psi$ схемы (17):

$$\left.\begin{aligned} &\Psi = \mu_{\hat{x}}^{(\alpha)} + \psi^*, \qquad \psi^* = O(\tau^{m_\alpha}) + O(h^2) + O(h_+^2), \\ &\mu = h^2 \bar{\mu}_0, \ \mu_0 = \mu_0\left(k, k', k'', q', f', (ku')'', c'\frac{\partial u}{\partial t}, ru'', r'u'\right). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Наряду со схемой (17) представляют интерес схемы вида

$$\rho y_{\bar{t}} = L_h^{(k, q, f)} y^{(\alpha)} + \lambda(y^{(\alpha)}), \quad y_0 = u_1(t), \quad y_N = u_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x), \tag{19}$$

коэффициенты которых $\rho$, $a$, $d$, $\varphi$, $b^-$, $b^+$ (или $b$) выражаются через соответствующие коэффициенты дифференциального уравнения (1), взятые в момент $\bar{t} = t - 0.5\tau$. Схема (19) эквивалентна схеме (17) по порядку аппроксимации.

Для практических целей иногда целесообразно пользоваться схемами

$$\rho y_{\bar{t}} = (a y_{\bar{x}})_{\hat{x}}^{(\alpha)} + (ly)_{(\beta)}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \ 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{20}$$

где $ly = -dy + \varphi + \lambda(y)$, а $(ly)_{(\beta)}$ определяется одной из формул:

$$(ly)_{(\beta)} = \beta ly + (1 - \beta)\check{l}\check{y} = (ly)^{(\beta)},$$
$$(ly)_{(\beta)} = -d(x, \bar{t})\, y^{(\beta)} + \varphi(x, \bar{t}) + b^-(x, \bar{t})\, y_{\check{x}}^{(\beta)} + b^+(x, \bar{t})\, y_{\hat{x}}^{(\beta)}, \ \bar{t} = t - 0.5\tau.$$

В частности, для практики очень удобна схема, соответствующая $\beta = 0$, у которой все младшие члены берутся на предыдущей строке. В этом случае формулами прогонки можно пользоваться на любой сетке $\bar{\omega}_h$, независимо от знака $d$ и $b^{\pm}$ (ср. [4], § 2, п.4).

5. К в а з и л и н е й н о е у р а в н е н и е. В [5] изучались однородные разностные схемы на равномерных сетках для квазилинейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{P}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - c(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \\ &\qquad (k(x, t, u) \geqslant c_1 > 0, \quad c(x, t) \geqslant c_2 > 0), \\ &u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \qquad u(x, 0) = u_0(x). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Будем предполагать, что производные функций $k(x, t, u)$ и $f(x, t, u, p)$ по аргументам $u$, $p$ удовлетворяют тем же условиям, что и в [5]. Случай, когда «коэффициент теплопроводности» $k = k(x, t, u)$ зависит от $u$, представляет особые трудности для исследования. Нам удалось в [5] доказать равномерную сходимость только четырехточечных неявных схем, причем оценка их порядка точности была значительно более грубой, чем в случае $k = k(x, t)$. В этой статье мы расширим класс сходящихся схем и получим для них новые оценки скорости сходимости, являющиеся, в частности, более точными по сравнению с [5] в случае равномерных сеток.

Будем рассматривать следующий класс схем:

$$\rho y_{\bar{t}} = (a_{(\alpha)} y_{\bar{x}})_{\hat{x}} + \varphi_{(\beta)}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{22}$$

$$y_0 = u_1(t), \quad y_N = u_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x),$$

где $a_{(\alpha)}$ и $\varphi_{(\beta)}$ определяются одной из соответствующих формул:

$$a_{(\alpha)} = \alpha a(x, t, y^{\circ}) + (1 - \alpha)\, a(x, \check{t}, \check{y}^{*}) = a^{(\alpha)}(x, t, y^{*}),$$

$$y^{\circ} = 0.5\,(y + y^{(-1)}), \quad \check{t} = t - \tau,$$

$$a_{(\alpha)} = a(x, t^{(\alpha)}, (y^{\circ})^{(\alpha)}), \quad (y^{*})^{(\alpha)} = \alpha y^{*} + (1 - \alpha)\,\check{y}^{*},$$

$$\varphi_{(\beta)} = \beta\varphi(x, t, y, \lambda(y)) + (1 - \beta)\,\varphi(x, \check{t}, \check{y}, \check{\lambda}(\check{y})) = \varphi^{(\beta)}(x, t, y, \lambda(y)),$$

$$\varphi_{(\beta)} = \varphi(x, t^{(\beta)}, y^{(\beta)}, \lambda^{(\beta)}(y)), \quad \lambda(y) = 0.5\,(y_{\hat{x}} + y_{\check{x}}) = y^{\circ}_{x} = (y^{(+1)} - y^{(-1)})/2\hbar,$$

$$a(x, t, u) = A[k(x + sh, t, u)], \qquad -1 \leqslant s \leqslant 1,$$

$$\varphi(x, t, u, p) = \frac{h}{\hbar} F[f(x + sh, t, u, p)\,\eta_0^{-}(s)] + \frac{h_+}{\hbar} F[f(x + sh_+, t, u, p)\,\eta_0^{+}(s)],$$

$$\rho = \rho(x, t) = \frac{h}{\hbar} F[c(x + sh, t)\,\eta_0^{-}(s)] + \frac{h_+}{\hbar} F[c(x + sh_+, t)\,\eta_0^{+}(s)].$$

Свойства функционалов $A$ и $F$ указаны в п. 1 § 1; кроме того, мы (так же как и в п. 2 § 2) требуем, чтобы $A[\overline{k}(s)]$ имел третий дифференциал. В [5] показано, что шаблонные функционалы

$$A^{\circ}[\mu(s)] = \left[\int_{-1}^{0.5} \frac{ds}{\mu(s)}\right]^{-1}, \qquad F^{*}[\mu(s)] = \int_{-0.5}^{0.5} \mu(s)\, ds$$

обеспечивают более высокий порядок точности в классе разрывных коэффициентов уравнения (21). При этом функцию $f$ в (21) следует преобразовать к виду

$$f = f\left(x, t, u, 2k\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Тогда будем иметь

$$\varphi = \varphi(x, t, y, \lambda(y)), \qquad \lambda(y) = a^{(+1)} y_{\hat{x}} + a y_{\check{x}},$$

$$a(x, t, u) = A^{\circ}[k(x + sh, t, u)],$$

$$\varphi(x, t, u, p) = F^{*}[f(x + (s + \Delta)\hbar, t, u, p)],$$

$$\rho(x, t) = F^{\circ}[c(x + (s + \Delta)\hbar, t)], \qquad \Delta = (h_+ - h)/4\hbar.$$

Обозначая, как обычно, $u = u(x, t)$ — решение исходной задачи (21), $y = y(x, t)$ — решение задачи (22), получим для сеточной функции $z = y - u$ условия

$$\rho z_{\bar{t}} = (a_{(\alpha)} z_{\bar{x}})_{\hat{x}} + Q(z) + \psi, \qquad z_0 = 0, \qquad z_N = 0, \qquad z(x, 0) = 0, \tag{23}$$
$$a_{(\alpha)} \geqslant c_1 > 0, \qquad \rho \geqslant c_2 > 0,$$

где $Q(z)$ определяется выражением вида

$$Q(z) = d_1 z + d_2 \check{z} + b_{11} z_{\hat{x}} + b_{12} \check{z}_{\hat{x}} + b_{22} z_{\check{x}} + b_{21} \check{z}_{\check{x}} + (g_{11} z)_{\hat{x}} + \tag{24}$$
$$+ (g_{12} \check{z})_{\hat{x}} + (g_{22} z)_{\check{x}} + (g_{21} \check{z})_{\check{x}}$$

при некоторых частных значениях ограниченных коэффициентов $d_s$, $b_{sk}$, $g_{sk}$, $s, k = 1, 2$.

Проводя рассуждения по аналогии с п. 2, найдем для погрешности аппроксимации следующее выражение:

$$\psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \qquad \psi^* = O(h^2) + O(h_+^2) + O(\tau), \qquad \mu = O(h^2). \tag{25}$$

Явное выражение для $\mu$ мы не будем выписывать.

## § 3. Априорные оценки

Для выяснения порядка точности разностных схем, рассмотренных в § 2, нам понадобятся различные априорные оценки, устанавливающие устойчивость линейных уравнений (2.9) и (2.23) относительно правой части. Оценки подобного типа были получены в [1], [2], [4], [5]; там же указано, как видоизменяются эти оценки на неравномерных сетках. Для шеститочечных схем (2.9) мы используем оценки работ [1] и [2], [3] без существенных изменений. Будет лишь показано, что схема (2.9) устойчива по правой части для любых $\|\tau\|_0 = \max \tau_j$, в то время как в [2] ее устойчивость доказана при условии $\tau < \tau_0$.

Особое внимание будет уделено выводу равномерной априорной оценки для уравнения (2.23), частные случаи которого рассматривались в [1] и [5]. При помощи априорной оценки в среднем удается существенно усилить теорему 4 работы [5].

1. Введение. Мы будем различать два случая:

а) $k(x, t)$ ограничено:

$$0 < c_1 \leqslant k(x, t) \leqslant c_1', \tag{1}$$

и удовлетворяет условию Липшица по $t$:

$$|k_{\bar{t}}| \leqslant c_4' \qquad (c_4' = \text{const} > 0); \tag{2}$$

б) $k(x, t)$ или $k(x, t, u)$ лишь ограничено.

Лемма 3. *Если выполнены условия* (1) *и* (2), *а шаблонный функционал* $A[\overline{k}(s)]$ *имеет первый дифференциал, то для коэффициента* $a(x, t) = A[\overline{k}(x + sh, t)]$ *справедливо неравенство*

$$|a_{\bar{t}}| \leqslant c_4, \quad \text{где} \quad c_4 = c_4' \frac{c_1'}{c_1}. \tag{3}$$

Напомним, что $A\,[k]$ — неубывающий однородный функционал первой степени, удовлетворяющий условию нормировки $A\,[1] = 1$.

Пусть $A_1\,[k, \mu]$ — первый дифференциал функционала $A\,[k]$. Покажем сначала, что

$$\frac{c_1}{c_1'} \leqslant A_1\,[k, 1] \leqslant \frac{c_1'}{c_1}. \tag{4}$$

Для этого воспользуемся тождеством $A_1\,[k, k] = A\,[k]$ (см. [7], § 1) и неравенствами

$$c_1 A_1\,[k, 1] = A_1\,[k, c_1] \leqslant A_1\,[k, k] = A\,[k] \leqslant c_1',$$
$$c_1 \leqslant A_1\,[k, k] \leqslant A_1\,[k, c_1'] = c_1' A_1\,[k, 1].$$

Разность $a - \check{a}$, в силу теоремы о среднем значении, равна

$$a - \check{a} = A\,[k\,(x + sh, t)] - A\,[k\,(x + sh, \check{t})] =$$
$$= A\,[k] - A\,[\check{k}] = A_1\,[\check{k} + \theta\tau k_{\bar{t}}, \tau k_{\bar{t}}], \qquad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда и из (4) следует

$$|a_{\bar{t}}| \leqslant c_4' A_1\,[\check{k} + \theta\tau k_{\bar{t}}, 1] \leqslant c_4' \frac{c_1'}{c_1} = c_4.$$

Замечание. Если $A\,[k]$ — линейный функционал, то $|a_{\bar{t}}| \leqslant c_4$, т. е. $c_4 = c_4'$.

Лемма 4. *Пусть $g_j$ и $\rho_j$ — функции, заданные на произвольной неравномерной сетке $\bar{\omega}_\tau$ с шагом $\tau_j = t_j - t_{j-1} > 0$; $j = 1, 2, \ldots$. Если $\rho_j$ — неотрицательная неубывающая функция ($\rho_{j+1} \geqslant \rho_j$), то из неравенства*

$$g_{j+1} \leqslant c_0 \sum_{j'=2}^{j+1} \tau_{j'} g_{j'-1} + \rho_{j+1} \qquad (c_0 = \text{const} > 0) \tag{5}$$

*следует*

$$g_{j+1} \leqslant e^{c_0 t_{j+1}'} \rho_{j+1}, \qquad j = 0, 1, \ldots. \tag{6}$$

*Если $\rho_j$ — произвольная неотрицательная функция, то из (5) следует*

$$g_{j+1} \leqslant \rho_{j+1} + c_0 e^{c_0 t_{j+1}'} \sum_{j'=2}^{j+1} \tau_{j'} \rho_{j'-1}, \qquad t_{j+1}' = t_{j+1} - \tau_1. \tag{7}$$

Получим сначала оценку (6). Будем искать $g_j$ в виде

$$g_j = \sum_{k=0}^{\infty} g_j^{(k)}, \tag{8}$$

где

$$g_j^{(0)} \leqslant \rho_j, \qquad g_j^{(k)} \leqslant c_0 \sum_{j'=2}^{j+1} \tau_{j'} g_{j'-1}^{(k-1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Учитывая, что

$$\sum_{j'=2}^{j+1} \tau_{j'} f\,(t_{j'-1}) \leqslant \int_{\tau_1}^{t_{j+1}} f\,(t)\,dt, \quad \text{если} \quad f\,(t'') \geqslant f\,(t') \quad \text{при} \quad t'' \geqslant t',$$

и пользуясь монотонностью $\rho_j$, найдем

$$g_{j+1}^{(k)} \leqslant \frac{(c_0 t'_{j+1})^k}{k!}\rho_{j+1}, \qquad t'_{j+1} = t_{j+1} - \tau_1.$$

Отсюда и из (8) следует (6).

Пусть $\rho_j$ — произвольная неотрицательная функция. Полагая $g_{j+1} = \rho_{j+1} + v_{j+1}$, получим

$$v_{j+1} \leqslant c_0 \sum_{j'=2}^{j+1} \tau_{j'} v_{j'-1} + \rho^*_{j+1}, \qquad \rho^*_{j+1} = \sum_{j'=2}^{j+1} \tau_{j'}\rho_{j'-1} \geqslant 0,$$

где $\rho^*_j$ — неубывающая функция. Пользуясь затем оценкой (6) для $v_j$, получим (7).

Следствие. *Если сетка* $\bar{\omega}_\tau$ *равномерна, т. е.* $\tau_j = \tau = \text{const}$, *то* $t'_{j+1} = t_{j+1} - \tau_1 = t_j$ *и вместо* (6) *и* (7) *получим*

$$g_{j+1} \leqslant e^{c_0 t_j}\rho_{j+1}, \tag{6'}$$

$$g_{j+1} \leqslant \rho_{j+1} + c_0 e^{c_0 t_j}\,\tau \sum_{j'=1}^{j} \rho_{j'} \tag{7'}$$

Лемма 4а. *Пусть* $g_j$ *и* $f_j$ *заданы на сетке* $\bar{\omega}_\tau = \{t_j,\ j = 0, 1, \ldots, K\}$. *Если* $f_j$ *— произвольная неотрицательная функция, то из*

$$g_{j'} \leqslant (1 + c_0\tau_{j'})\, g_{j'-1} + \tau_{j'} f_{j'}, \qquad j' = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

*следует*

$$g_{j+1} \leqslant e^{c_0 t'_{j+1}}\rho_{j+1}, \quad \text{где} \quad \rho_j = (1 + c_0\tau_1)\, g_0 + \sum_{j'=1}^{j} \tau_{j'} f_{j'}.$$

Для доказательства леммы 4а достаточно просуммировать (9) по $j' = 1, 2, \ldots, j+1$ и воспользоваться оценкой (6) леммы 4.

По аналогии с [6] введем обозначения для сумм и норм сеточных функций. Пусть $v$ и $\psi$ — произвольные функции, заданные на $\bar{\omega}_h$. Обозначим

$$(v, \psi) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i\psi_i h_i, \qquad (v, \psi)^+ = \sum_{i=1}^{N-1} v_i\psi_i h_{i+1}, \qquad (v, \psi)^* = \sum_{i=0}^{N-1} v_i\psi_i \hbar_i,$$

$$(v, \psi] = \sum_{i=1}^{N} v_i\psi_i h_i, \qquad [v, \psi) = \sum_{i=0}^{N-1} v_i\psi_i h_{i+1},$$

$$\|\psi\|_0 = \max_{x_i \in \bar{\omega}_h} |\psi_i|, \qquad \|\psi\|_\sigma = (1, |\psi|^\sigma)^{1/\sigma}, \qquad \|\psi\|_{\sigma^*} = (1, |\psi|^\sigma)^{*1/\sigma}, \qquad \sigma = 1, 2.$$

Если функция $v$ определена на $\omega_h^+ = \{x_i,\ 0 < i \leqslant N\}$, то

$$\|v\|_\sigma = (1, |v|^\sigma]^{1/\sigma}.$$

Так, например, если функция $v$ задана для всех $x \in \bar{\omega}_h$, то $v_{\bar{x}}$ определена для $x \in \omega_h^+$, поэтому

$$\|v_{\bar{x}}\|_2 = (1, v_{\bar{x}}^2]^{1/2} \qquad (v_{\bar{x}}^2 = (v_{\bar{x}})^2).$$

Нетрудно убедиться в том, что справедливо неравенство

$$\|v\|_2 \leqslant \sqrt{2}\,\|v\|_{2^*}.$$

Мы будем пользоваться также нормами

$$\|\psi\|_3 = \|\mu\|_2, \qquad \|\psi\|_{3^*} = \|\mu\|_1, \tag{10}$$

где $\mu$ — сеточная функция, определяемая условиями

$$\psi = \mu_{\hat{x}}, \qquad \mu_N = 0 \quad \text{или} \quad \mu_1 = 0.$$

Приведем некоторые разностные тождества, которыми мы будем в дальнейшем пользоваться:

$$\left.\begin{aligned}(v, y_{\hat{x}})^* &= (v, y_x)^+ = -(y, v_{\bar{x}}] + (yv)_N - y_0 v_1,\\ (v, y_{\check{x}})^* &= (v, y_{\bar{x}}) = -[y, v_{\check{x}}) + y_{N-1}v_N - (yv)_0,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$(v, (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}})^* = (v, (ay_{\bar{x}})_x)^+ = -(a, y_{\bar{x}}v_{\bar{x}}] + (ay_{\bar{x}}v)_N - (a^{(+1)}y_x v)_0, \tag{12}$$

$$(v, (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}})^* = ((av_{\bar{x}})_{\hat{x}}, y)^* + (a\,(vy_{\bar{x}} - yv_{\bar{x}}))_N - (a^{(+1)}\,(vy_x - yv_x))_0. \tag{13}$$

Если $y$ и $v$ удовлетворяют однородным условиям

$$y_0 = y_N = 0, \qquad v_0 = v_N = 0,$$

то все подстановки в формулах (11) — (13) равны нулю. Нам понадобятся также неравенства

$$\|v\|_0 \leqslant \|v_{\bar{x}}\|_2, \qquad \|v\|_0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{c_1}}\|\sqrt{a}\,v_{\bar{x}}\|_2 \quad \text{при } v_0 = v_N = 0, \quad a \geqslant c_1 > 0. \tag{14}$$

$$|(y, v)| \leqslant (1, |y|^p)^{1/p}\,(1, |v|^q)^{1/q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad p > 0, \qquad q > 0. \tag{15}$$

$$\prod_{k=1}^{m} x_k^{\mu_k} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \mu_k x_k, \quad \text{где } \mu_k \geqslant 0, \qquad x_k \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{m} \mu_k = 1. \tag{16}$$

2. Устойчивость схемы (2.9) по правой части. В [1], [2], [3] рассматривалась схема

$$\left.\begin{aligned}&\rho z_{\bar{t}} = (\Lambda z)^{(\alpha)} + \Psi, \qquad \Lambda z = (az_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dz,\\ &z_0 = 0, \qquad z_N = 0, \qquad z(x, 0) = 0,\\ &a \geqslant c_1 > 0, \qquad \rho \geqslant c_2 > 0, \qquad 0 \leqslant d \leqslant c_3,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

и было показано, что эта схема равномерно устойчива по правой части, если $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и выполнены условия

$$|a_{\bar{t}}| \leqslant c_4, \tag{18}$$

$$\tau \leqslant \tau_0, \tag{19}$$

где $\tau_0$ — положительная постоянная, зависящая только от $c_1, \ldots, c_4$.

Покажем, что условие (19) является лишним.

Теорема 2. *Для решения задачи* (17) *справедливо неравенство*

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M\Big(\sum_{t_{j'}=t_1}^{t} \tau_{j'}\,\|\Psi(x, t_{j'})\|_{2^*}^2\Big)^{1/2}, \tag{20}$$

*если*

1) $|a_{\bar{t}}| \leqslant c_4, \quad |\rho_{\bar{t}}| \leqslant c_5, \quad 0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1,$

2) $\bar{\omega}_h$ — *произвольная сетка*, $\bar{\omega}_\tau$ — *квазиравномерная сетка* ($M$ — *положительная постоянная, зависящая только от* $c_1, \ldots, c_5$). *Если* $\bar{\omega}_\tau$ — *произвольная неравномерная сетка, то оценка* (20) *имеет место при условии* $\|\tau\|_0 = \max \tau_j \leqslant \tau_0$, *где* $\tau_0 > 0$ — *постоянная, зависящая только от постоянных* $c_1, \ldots, c_4$.

Доказательство проведем в два этапа: сначала получим оценку в среднем (по аналогии с [2] и [5]), а затем используем ее для получения равномерной оценки.

1. Для простоты выкладку проведем для $\rho = 1$, $\tau = \text{const}$. Перепишем уравнение (17) в виде

$$z - \alpha\tau\Lambda z = \check{z} + (1 - \alpha)\,\tau\check{\Lambda}\check{z} + \tau\Psi.$$

Возведем обе части в квадрат, умножим на $\hbar$ и просуммируем по всем $x \in \omega_h$. Пользуясь первой формулой Грина (12), а также неравенством

$$|(\psi, v)^*| \leqslant \frac{1}{2c_0}\|\psi\|_{2^*}^2 + \frac{c_0}{2}\|v\|_{2^*}^2,$$

где $c_0$ — произвольная положительная постоянная, получим

$$H + 2\tau\,(\alpha I + (1 - \alpha)\,\check{I}) \leqslant (1 + c_0\tau)\,\check{H} + \tau\,(\tau + 1/c_0)\,\|\Psi\|_{2^*}^2, \qquad (21)$$

где

$$H = \|z\|_{2^*}^2 + \frac{\tau^2}{4}\|\Lambda z\|_{2^*}^2, \quad I = (a, z_{\bar{x}}^2] + (d, z^2)^*.$$

Полагая $c_0 = 1/t_{j+1}$ и пользуясь леммой 4, находим

$$\|z\,(x, t_{j+1})\|_{2^*}^2 + \frac{\tau_{j+1}^2}{4}\|(\Lambda z)^{j+1}\|_{2^*}^2 + \sum_{j'=1}^{j+1}\tau_{j'}I^{j'} \leqslant e^{t_{j+1}}\sum_{j'=1}^{j+1}\tau_{j'}\|\Psi^{j'}\|_{2^*}^2. \qquad (22)$$

В общем случае, когда $\rho = \rho\,(x, t)$, а $\bar{\omega}_\tau$ — квазиравномерная сетка ($|\tau_{\bar{t}}| \leqslant m^*\check{\tau}$, $m^* > 0$), вместо (22) получим

$$\|(\sqrt{\rho}z)^{j+1}\|_{2^*}^2 + \frac{1}{4}\tau_{j+1}^2\left\|\left(\frac{\Lambda z}{\sqrt{\rho}}\right)^{j+1}\right\|_{2^*}^2 + \sum_{j'=1}^{j+1}\tau_{j'}I^{j'} \leqslant M\sum_{j'=1}^{j+1}\tau_{j'}\|\Psi^{j'}\|_{2^*}^2, \qquad (23)$$

где $M$ — положительная постоянная, зависящая только от $c_2$, $c_6$, $m^*$ и $T$. Из (23), в частности, следует

$$\sum_{j'=1}^{j+1}\tau_{j'}I^{j'} \leqslant M\sum_{j'=1}^{j+1}\tau_{j'}\|\Psi^{j'}\|_{2^*}^2. \qquad (24)$$

При выводе (24) мы не пользовались условием $d \leqslant c_3$.

2. Умножим (17) на $\tau z_{\bar t}\hbar$ и просуммируем по $x \in \omega_h$:

$$\tau \| \sqrt{\rho} z_{\bar t} \|^2_{2*} + \alpha (a, z^2_{\bar x}] = (1-\alpha)(\check a, \check z^2_{\bar x}] - \tau (\alpha dz + (1-\alpha)\check d \check z, z_{\bar t})^* + \\ + (\alpha a - (1-\alpha)\check a, z_{\bar x}\check z_{\bar x}] + \tau (\Psi, z_{\bar t})^*. \qquad (25)$$

Учитывая очевидные неравенства

$$(\alpha a - (1-\alpha)\check a, z_{\bar x}\check z_{\bar x}] = (2\alpha - 1)(a, z_{\bar x}\check z_{\bar x}] + (1-\alpha)\tau (a_{\bar t}, z_{\bar x}\check z_{\bar x}] \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha - 0.5)\{(a, z^2_{\bar x}] + (\check a, \check z^2_{\bar x}]\} + \tau (c_4/2c_1)\{(1-\alpha)(a, z^2_{\bar x}] + \alpha (\check a, \check z^2_{\bar x}]\},$$
$$-(\alpha dz + (1-\alpha) d\check z, \tau z_{\bar t})^* \leqslant \frac{\tau}{2} \| \sqrt{\rho} z_{\bar t} \|^2_{2*} + \\ + \frac{\tau}{2c_2} \sqrt{c_3}\{\alpha (d, z^2)^* + (1-\alpha)(\check d, \check z^2)^*\},$$
$$\tau (\Psi, z_{\bar t})^* \leqslant \frac{\tau}{2} \| \sqrt{\rho} z_{\bar t} \|^2_{2*} + \frac{\tau}{2c_2} \| \Psi \|^2_{2*},$$

получим из (25) при $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$(a, z^2_{\bar x}] \leqslant (\check a, \check z^2_{\bar x}] + \tau c^* (I + \check I) + \frac{\tau}{c_2} \| \Psi \|^2_{2*},$$

где

$$I = (a, z^2_{\bar x}] + (d, z^2)^*, \qquad c^* = \max\left(\frac{c_4}{c_1}, \frac{\sqrt{c_3}}{c_2}\right).$$

Отсюда находим

$$(a, z^2_{\bar x}]^{j+1} \leqslant 2c^* \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} I^{j'} + \frac{1}{c_2} \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} \| \Psi^{j'} \|^2_{2*}.$$

Пользуясь затем оценкой (24), а также неравенством (14), получаем (20).

Замечание 1. Если $z(x, 0) \neq 0$, то в (23) справа будет стоять дополнительное слагаемое

$$M \left\{ \| \sqrt{\rho} z \|^2_{2*} + \tau \| \sqrt{a} z_{\bar x} \|^2_{2*} + \tau (d, z^2)^* + \frac{\tau^2}{4} \left\| \frac{\Lambda z}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{2*} \right\}_{t=0},$$

которое может быть мажорировано выражением

$$(M + M'\gamma + M''\gamma^2) \| z(x, 0) \|^2_{2*}, \qquad \gamma = \| \tau_1/h^2 \|_0 = \max_{\omega_h^+} (\tau_1/h_i^2),$$

где $M = M(c_1, \ldots, c_5, c_2', T, m^*)$, $M' = M(c_1, \ldots, c_5, c_1', c_2', T, m^*)$, $M'' = M(c_1, \ldots, c_5, c_1', c_2', T, m^*)$ — положительные постоянные, причем

$$c_1' \geqslant a \geqslant c_1 > 0, \quad c_2' \geqslant \rho \geqslant c_2 > 0 \quad \text{(ср. [2])}.$$

В этом случае вместо (20) получим оценку вида

$$\| z(x, t_{j+1}) \|_0 \leqslant M \left\{ (1+\gamma) \| z(x, 0) \|_0 + \left( \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} \| \Psi^{j'} \|^2_{2*} \right)^{1/2} \right\}. \qquad (20')$$

Замечание 2. Оценка (24) сохраняет силу, если условие $0 \leqslant d \leqslant c_3$ заменить условиями

$$0 \leqslant d, \quad |d_{\bar t}| \leqslant c_6.$$

Замечание 3. Вторая часть теоремы для случая произвольной сетки $\overline{\omega}_\tau$ доказывается по аналогии с [1], если воспользоваться леммой $4_a$.

4. Устойчивость другой схемы для уравнения теплопроводности. Рассмотрим теперь схему (2.19), которая также используется на практике:

$$\left.\begin{gathered} \rho z_{\bar{t}} = (a z_{\bar{x}}^{(\alpha)})_{\hat{x}} - d z^{(\alpha)} + \Psi = \Lambda z^{(\alpha)} + \Psi, \quad 0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ z_0 = z_N = 0, \\ 0 < c_1 \leqslant a, \qquad 0 < c_2 \leqslant \rho, \qquad 0 \leqslant d, \end{gathered}\right\} \tag{26}$$

где

$$\rho = \rho(x, \bar{t}), \qquad a = a(x, \bar{t}), \qquad d = d(x, \bar{t}), \qquad \bar{t} = t - 0.5\tau.$$

Теорема 3. *Разностная схема* (26) *равномерно устойчива по правой части и начальным данным на произвольной неравномерной сетке* $\overline{\Omega}$:

$$\| z(x, t_{j+1}) \|_{\overline{0}} \leqslant M' \| z(x, 0) \|_{\overline{0}} + M \Big( \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} \| \Psi^{j'} \|_{2^*}^2 \Big)^{1/2}, \tag{27}$$

*где*

$$\| z \|_{\overline{0}} = \| z \|_0 + \| z_{\bar{x}} \|_2,$$

*если выполнены дополнительные условия*:

$$| a_{\bar{t}} | \leqslant c_4, \qquad | d_{\bar{t}} | \leqslant c_5, \qquad a(x, 0) \leqslant c_1', \qquad d \leqslant c_3. \tag{28}$$

При $\alpha = 1$ теорема следует из [2]. Пусть $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Напишем, как обычно, интегральное тождество

$$\tau \| \sqrt{\rho} z_{\bar{t}} \|_{2^*}^2 + \alpha \{(a, z_{\bar{x}}^2] + (d, z^2)^*\} = (1 - \alpha) \{(a, \check{z}_{\bar{x}}^2] + (d, \check{z}^2)^*\} +$$

$$+ (2\alpha - 1) \{(a, z_{\bar{x}} \check{z}_{\bar{x}}] + (d, z\check{z})^*\} + \tau (\Psi, z_{\bar{t}})^*.$$

Учитывая оценки

$$(a, \check{z}_{\bar{x}}^2] \leqslant \Big(1 + \frac{\tau c_4}{c_1}\Big) (\check{a}, \check{z}_{\bar{x}}^2], \qquad (a, z_{\bar{x}} \check{z}_{\bar{x}}] \leqslant \frac{1}{2} (a, z_{\bar{x}}^2] + \frac{1}{2} \Big(1 + \frac{\tau c_4}{c_1}\Big) (\check{a}, \check{z}_{\bar{x}}^2],$$

$$(d, \check{z}^2)^* = (\check{d}, \check{z}^2)^* + \tau (d_{\bar{t}}, \check{z}^2)^* \leqslant (\check{d}, \check{z}^2)^* + \frac{\tau c_5}{2c_1} (\check{a}, \check{z}_{\bar{x}}^2],$$

$$(d, z\check{z}) \leqslant \frac{1}{2} (d, z^2)^* + \frac{1}{2} (d, \check{z}^2)^*,$$

получим

$$I \leqslant (1 + c^* \tau) \check{I} + \frac{\tau}{c_2} \| \Psi \|_{2^*}^2,$$

$$I^{j+1} \leqslant c^* \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} I^{j'-1} + I^0 + \sum_{j'=1}^{j+1} \frac{\tau_{j'}}{c_2} \| \Psi^{j'} \|_{2^*}^2,$$

где

$$I = (a, z_{\bar{x}}^2] + (d, z^2)^*, \qquad c^* = \max \Big( \frac{c_4}{2c_1}, \frac{c_5}{2c_1} \Big),$$

$$I^0 = (a(x, 0), z_x^2(x, 0)] + (d(x, 0), z^2(x, 0))^*.$$

Отсюда, в силу леммы $4_a$, следует (27), если $a(x, 0) \leqslant c_1'$, $d(x, 0) \leqslant c_3$.

Разностная схема (2.19) имеет второй порядок аппроксимации на равномерной сетке $\omega_h$, а на произвольной неравномерной сетке

$$\Psi = \mu_{\overset{\wedge}{x}}^{(\alpha)} + O(h^2) + O(h_+^2) + O(\tau^{m\alpha}), \qquad \mu = O(h^2). \tag{29}$$

Отсюда следует, что схема (2.19), вообще говоря, не хуже схемы (2.9), так как она устойчива при любых $\|\tau\|_0$.

5. Улучшенная априорная оценка для схемы (2.17). При изучении порядка точности на неравномерных сетках норма $\|\Psi\|_{2^*}$ является слишком грубой даже в случае непрерывных коэффициентов дифференциального уравнения. Пользуясь методом стационарных решений, изложенным в [3], и оценкой (20), нетрудно по аналогии с [3] получить более тонкие оценки для $\|z\|_0$.

Формулируем результат сразу для более общей задачи:

$$\left.\begin{gathered} \rho z_{\overline{t}} = (a z_{\overline{x}})_{\overset{\wedge}{x}}^{(\alpha)} + Q(z) + \Psi, \qquad z_0 = z_N = 0, \qquad z(x, 0) = 0, \\ Q(z) = d_1 z + d_2 \check{z} + b_{11} z_{\overset{\wedge}{x}} + b_{12} \check{z}_{\overset{\wedge}{x}} + b_{22} z_{\overset{\vee}{x}} + b_{21} \check{z}_{\overset{\vee}{x}}, \\ 0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_1', \quad 0 \leqslant c_2 \leqslant \rho \leqslant c_2', \quad |d_s| \leqslant c_3, \quad |a_{\overline{t}}| \leqslant c_4, \\ |b_{sk}| \leqslant c_5 \quad (s, k = 1, 2). \end{gathered}\right\} \tag{30}$$

Теорема 4. *Для решения задачи* (30) *на произвольной неравномерной сетке при* $0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *и при достаточно малом* $\|\tau\|_0 \leqslant \tau_0$ *справедливы оценки*:

1)

$$\|z(x, t_{j+1})\|_0 + \|z_{\overline{x}}(x, t_{j+1})\|_2 \leqslant M' (\|z(x, 0)\|_0 + \|z_{\overline{x}}(x, 0)\|_2) + \tag{31}$$

$$+ M \Big( \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} \|\Psi^{j'}\|_{2^*}^2 \Big)^{1/2};$$

2) *если* $\Psi = \psi^{(\alpha)}$, $\psi = \mu_{\overset{\wedge}{x}} + \psi^*$, *то*

$$\|z(x, t_{j+1})\|_0 \leqslant M \{ \|\psi(x, 0)\|_3 + \|\psi(x, t_{j+1})\|_{3^*} + \tag{32}$$

$$+ \Big[ \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} (\|\psi^{j'}\|_{3^*}^2 + \|\psi_{\overline{t}}^{j'}\|_{3^*}^2) \Big]^{1/2} \Big\} + \overline{M} \Big[ \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} (\|\psi^{j'}\|_3^2 + \|\psi^{j'-1}\|_3^2) \Big]^{1/2},$$

*где*

$$\|\psi\|_3 = \|\mu\|_2 + \|\psi^*\|_3, \qquad \|\psi\|_{3^*} = \|\mu\|_1 + \|\psi^*\|_{3^*},$$

$\overline{M} = 0$ *при* а) $Q(z) = (b_1 z_{\overset{\wedge}{x}} + b_2 z_{\overset{\vee}{x}})^{(\alpha)} + d_1 z + d_2 \check{z}$ *и* б) $|(b_s)_{\overline{t}}| \leqslant c_6$, $s = 1, 2$.

Для доказательства теоремы 4 следует несколько изменить рассуждения, проведенные в [1] и [3].

6. Энергетическое тождество $n$-го ранга. Все последующие пункты § 3 посвящены выводу новых априорных оценок для решения задачи (2.23), т. е. задачи

$$\rho z_{\overline{t}} = (a z_{\overline{x}})_{\overset{\wedge}{x}} + Q(z) + \psi, \quad z_0 = z_N = 0, \quad z(x, 0) = 0. \tag{33}$$

где $Q(z)$ определяется по формуле (2.24). Будем предполагать, что коэффициенты $a$, $\rho$, $d_s$, $b_{sk}$, $g_{sk}$ $(s, k = 1, 2)$ ограничены:

$$0 < c_1 \leqslant a, \quad 0 < c_2 \leqslant \rho, \quad \underset{s,\ k=1,\ 2,}{|d_s| \leqslant c_3}, \quad |b_{sk}| \leqslant c_4, \quad |g_{sk}| \leqslant c_5, \tag{34}$$

а $\rho = \rho(x, t)$, кроме того, удовлетворяет условию Липшица по $t$

$$|\rho_{\bar{t}}| \leqslant c_6 \tag{35}$$

($c_1, \ldots, c_6$ — положительные постоянные, не зависящие от сетки).

В [5] рассматривался частный случай уравнения (33) при $d_2 = b_{12} = b_{21} = g_{21} = g_{12} = 0$ с краевыми условиями общего вида

$$a^{(+1)} z_x = \mathscr{G}_1 z_{\bar{t}} + \sigma_1 z - \nu_1 \text{ при } x = 0, \quad -a z_{\bar{x}} = \mathscr{G}_2 z_{\bar{t}} + \sigma_2 z - \nu_2 \text{ при } x = 1. \tag{36}$$

Хотя последующие рассуждения проводятся для условий I рода $z_0 = z_N = 0$, однако окончательные результаты сохраняют силу и для условий (36), если только $\mathscr{G}_s$, $\sigma_s$ $(s = 1, 2)$ удовлетворяют указанным в [6] требованиям. При этом $\|\psi\|_3$ достаточно заменить на $\|\psi\|_5$, где

$$\|\psi\|_5 = \|\psi\|_3 + |(\psi, 1)^*| + |\nu_1| + |\nu_2|.$$

Будем предполагать, что $\bar{\omega}_h$ — произвольная неравномерная сетка, $\omega_\tau = \overset{*}{\omega}_\tau$ — неравномерная сетка, шаги которой удовлетворяют условию

$$\tau \leqslant m^* \check{\tau}, \tag{37}$$

где $m^*$ — некоторая положительная постоянная. Соответствующую сетку $\Omega$ обозначим $\Omega^* = \omega_h \times \overset{*}{\omega}_\tau$.

Вводя новую функцию $v$:

$$z = v w, \quad w_{\bar{t}} = \bar{M} \check{w}, \quad w(x, 0) = 1, \text{ или } w = (1 + \bar{M}\tau)\check{w}, \tag{38}$$

где $\bar{M} > 0$ — произвольная постоянная, получим

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\rho} v_{\bar{t}} - (a v_{\bar{x}})_x + d v = \Psi = \bar{\psi} + Q_1(v), \quad v_0 = v_N = 0, \quad v(x, 0) = 0, \\ &Q_1(v) = \bar{d}_2 \check{v} + b_{11} v_{\hat{x}} + b_{22} v_{\check{x}} + \bar{b}_{12} \check{v}_{\hat{x}} + \bar{b}_{21} \check{v}_{\check{x}} + (g_{11} v)_{\hat{x}} + \\ &\qquad + (g_{22} v)_{\check{x}} + (\bar{g}_{12} \check{v})_{\hat{x}} + (\bar{g}_{21} \check{v})_{\check{x}}, \\ &\bar{\rho} = \rho\gamma, \ \bar{d} = \rho\gamma\bar{M} - d_1, \ \bar{d}_2 = d_2\gamma, \ \bar{b}_{sk} = b_{sk}\gamma, \ \bar{g}_{sk} = g_{sk}\gamma, \\ &\bar{\psi} = \psi/w, \qquad \gamma = (1 + \bar{M}\tau)^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Напишем уравнение $n$-го ранга, т. е. уравнение для функции $\overset{n}{v} = v^{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Для этого надо умножить (39) на $v \cdot v^2 \ldots v^{2^{n-1}} = 2^n v^{\alpha_n}$, где $\alpha_n = 2^n - 1$, и учесть тождество

$$2v(a v_{\bar{x}})_{\hat{x}} = (a (v^2)_{\bar{x}})_{\hat{x}} - \frac{1}{\hbar}[h a v_{\bar{x}}^2 + h_+ a^{(+1)} v_x^2].$$

В результате получим (см. [1] и [5])

$$\overset{n}{\rho} v_{\bar{t}} - (a \overset{n}{v}_{\bar{x}})_{\hat{x}} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} \left\{ \frac{h}{\hbar} a (\overset{k}{v}_{\bar{x}})^2 + \frac{h_+}{\hbar} a^{(+1)} (\overset{k}{v}_x)^2 + \tau \bar{\rho} (\overset{k}{v}_{\bar{t}})^2 \right\} \times$$

$$\times v^{\alpha_n - \alpha_k + 1} + 2^n \overset{n}{d} v = 2^n v^{\alpha_n} \Psi.$$

Умножая (39) на $\hbar$, суммируя по $x \in \omega_h$ и учитывая, что

$$\left(\frac{h}{\hbar}\, a\overset{k}{(v_{\tilde{x}})}^2 + \frac{h_+}{\hbar}\, a^{(+1)}\overset{k}{(v_x)}^2,\ v^{\alpha_n-\alpha_{k+1}}\right)^* = \left(a\overset{k}{(v_{\tilde{x}})}^2,\ v^{\alpha_n-\alpha_{k+1}}\right) + \left(a^{(+1)}\overset{k}{(v_x)}^2,\ v^{\alpha_n-\alpha_{k+1}}\right)^+,$$

получим основное интегральное (энергетическое) тождество

$$(\bar{\rho},\ \overset{n}{v})^*_{\bar{t}} + 2I_n + P_n + 2^n (d,\ \overset{n}{v})^* = 2^n (Q_1(v),\ v^{\alpha_n})^* + 2^n (\bar{\psi},\ v^{\alpha_n})^\circ + (\bar{\rho}_{\bar{t}},\ \overset{n}{\check{v}})^*, \tag{40}$$

где

$$I_n = \left(a, \overset{n-1}{(v_{\tilde{x}})}^2\right] + \sum_{k=0}^{n-2} 2^{n-k-2} \left\{\left(a\overset{k}{(v_{\tilde{x}})}^2,\ v^{\alpha_n-\alpha_{k+1}}\right) + \left(a^{(+1)}\overset{k}{(v_x)}^2,\ v^{\alpha_n-\alpha_{k+1}}\right)^+\right\}, \tag{41}$$

$$P_n = \tau \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} \left(\bar{\rho}\overset{k}{(v_{\bar{t}})}^2,\ v^{\alpha_n-\alpha_{k+1}}\right)^*. \tag{42}$$

Наша цель — найти оценку для $\| v \|_0$ (и, следовательно, для $\| z \|_0$) через $\| \psi \|_3$. В [5] для частного случая $b_{sk} = g_{sk} = 0$ при $s \neq k$ и равномерной сетки получена оценка

$$\| \overset{n}{z}(x, t) \|_1^{1/2^n} \leqslant M_2 2^n e^{M_1 \cdot 2^n} \overline{\| \psi(x, t) \|_3}, \qquad \overline{\| \psi(x, t) \|_3} = \max_{0<t'\leqslant t} \| \psi(x, t') \|_3,$$

где $M_1 = 0$ при $g_{sk} = 0$, $s, k = 1, 2$. Ниже будет показано, что $M_1 = 0$ для общего уравнения (39).

Сначала найдем априорную оценку в среднем, т. е. для $\| v \|_{2^*}$, и затем используем ее для оценки $\| \overset{n}{v} \|_1$ и $\| v \|_0$.

7. Устойчивость в среднем по правой части. Полагая в (40) $n = 1$, получим энергетическое тождество 1-го ранга:

$$(\bar{\rho}, v^2)^*_{\bar{t}} + 2I_1 + P_1 + 2(d, v^2)^* = 2(Q_1(v), v)^* + 2(\bar{\psi}, v)^* + (\bar{\rho}_{\bar{t}}, \check{v}^2)^*. \tag{43}$$

Повторяя для $n = 1$ рассуждения, проведенные в п.5, § 1, [5], приходим в случае неравномерной сетки к неравенству

$$(\bar{\rho}, v^2)^{*j+1} + \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} (a, v_{\bar{x}}^2]^{j'} \leqslant M \overline{\| \bar{\psi}(x, t_{j+1}) \|_3} \text{ при } \| \tau \|_0 < \tau_0.$$

Отсюда следует

$$\| v(x, t) \|_{2^*} + \sqrt{\tau}\, \| v_{\bar{x}}(x, t) \|_2 \leqslant M \overline{\| \bar{\psi}(x, t) \|_3} \text{ при } \| \tau \|_0 \leqslant \tau_0, \tag{44}$$

$$\| z(x, t) \|_{2^*} + \sqrt{\tau}\, \| z_{\bar{x}}(x, t) \|_2 \leqslant M \overline{\| \psi(x, t) \|_3} \text{ при } \| \tau \|_0 \leqslant \tau_0, \tag{45}$$

где $M$ — положительная постоянная, зависящая только от $c_1, c_2, \ldots, c_6, T$, а $\tau_0$ — положительная постоянная, зависящая только от $c_1, \ldots, c_5$.

Таким образом, схема (39) устойчива в среднем по правой части при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$.

Л е м м а 5. *Если* $d_1 \leqslant 0$, $b_{ss} = g_{ss} = 0$, $s = 1, 2$, *т. е.*

$$Q(z) = Q^*(z) + d_1 z, \qquad Q^*(z) = b_{12}\check{z}_{\hat{\bar{x}}} + b_{21}\check{z}_{\check{\bar{x}}} + (g_{12}\check{z})_{\hat{\bar{x}}} + (g_{21}\check{z})_{\check{\bar{x}}} + d_2\check{z}, \tag{46}$$

*то схема* (39) *устойчива в среднем по правой части на произвольной сетке* $\Omega^*$ *при любых значениях* $\|h\|_0$ *и* $\|\tau\|_0$:

$$\|z(x,t)\|_{2^*} + \sqrt{\tau}\,\|z_{\bar{x}}(x,t)\|_2 \leqslant M\,\overline{\|\psi(x,t)\|_3}. \tag{47}$$

Будем исходить из тождества (43), которое перепишем в виде

$$(\rho, v^2)^*_{\bar{t}} + \tau(\rho, v_{\bar{t}}^2)^* + 2I_1' + 2\overline{M}\,\|(\rho, v^2)^\circ\|^2_{2^*} - 2(1+\overline{M}\tau)(d_1, v^2)^* = \\ = 2(Q^*(v), v)^* + 2(\psi', v) + (\rho_{\bar{t}}, \check{v}^2)^*, \tag{48}$$

$$I_1' = (a', v_{\bar{x}}^2], \quad a' = a(1+\overline{M}\tau), \quad \psi' = \overline{\psi}(1+\overline{M}\tau).$$

Оценим отдельные слагаемые правой части (48):

$$2(\psi', v)^* \leqslant 2\|\psi'\|_3\|v_{\bar{x}}\|_2 \leqslant \tfrac{1}{2}\check{I}_1' + \frac{2}{\bar{c}_1}\|\psi'\|_3^2, \qquad \bar{c}_1 = c_1(1+\overline{M}\tau) > c_1,$$

$$2(d_2\check{v}, v)^* \leqslant 2c_3\|\check{v}\|_{2^*}\|v\|_{2^*} \leqslant \frac{c_3}{\sqrt{c_2}}(\|\sqrt{\check{\rho}}\check{v}\|_{2^*}^2 + \|v\|_{2^*}^2),$$

$$2(b_{12}\check{v}_{\hat{\bar{x}}} + b_{21}\check{v}_{\check{\bar{x}}}, v)^* = 2(b_{12}\check{v}_x, v)^+ + 2(b_{21}, \check{v}_{\bar{x}}, v) \leqslant 4\sqrt{2}\,c_4\|\check{v}_{\bar{x}}\|_2\|v\|_{2^*} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\sqrt{2}c_4}{\sqrt{c_1}}\|v\|_{2^*}(\check{I}')^{1/2} \leqslant \frac{\check{\tau}}{\tau}\check{I}_1' + \frac{16c_4^2}{c_1}\left(\frac{\tau}{\check{\tau}}\right)^2\|v\|_{2^*}^2,$$

$$2((g_{12}\check{v})_{\hat{\bar{x}}_i}, v)^* = -2(g_{12}\check{v}, v_{\bar{x}}] \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c_1}}c_5\|\check{v}\|_{2^*}(I_1')^{1/2} \leqslant \tfrac{1}{4}I_1' +$$

$$+ \frac{4c_5^2}{c_1c_2}\|\sqrt{\check{\rho}}\check{v}\|_{2^*}^2, \quad (\rho_{\bar{t}}, \check{v}^2)^* \leqslant \frac{c_6}{c_2}\|\sqrt{\check{\rho}}, \check{v}\|_{2^*}^2.$$

Выбирая затем $\overline{M} = 0.5\,(c_3c_5^{-1/2} + 16c_4^2(m^*)^2/c_1)\,c_2^{-1}$, приходим к неравенству

$$\|\sqrt{\rho}v\|_{2^*}^2 + \tau I_1' \leqslant (1+M\tau)\|\sqrt{\check{\rho}}\check{v}\|_{2^*}^2 + \check{\tau}\check{I}_1' + \frac{2\tau}{c_1}\|\psi'\|_3^2,$$

справедливому для любых $\tau$ на сетке $\Omega^*$.

Пользуясь леммой $4_a$, находим

$$\sqrt{\rho}v(x, t_{j+1})\|_{2^*}^2 + \tau I_1'(t_{j+1}) \leqslant M\left\{\|\sqrt{a'}v_{\bar{x}}\|_{2^*}^2 + \|\sqrt{\rho^t}v\|_{2^*}^2|_{t=0} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{c_1}\sum_{j'=1}^{j+1}\tau_{j'}\|\psi'(x, t_{j'})\|_3^2\right\}.$$

Отсюда следует $\|v\|_{2^*} + \sqrt{\tau}\,\|v_{\bar{x}}\|_2 \leqslant M\,\overline{\|\psi\|_3}$, так как $v(x,0) = 0$, и, в силу (38), неравенство (47).

8. Р а в н о м е р н а я у с т о й ч и в о с т ь. Перейдем теперь к выводу априорной оценки для $\|v\|_0$ из (40), используя для этого метод мажорантных оценок правой части тождества (40), предложенный в [1] и усовершенствованный в [5]. Основное отличие от [5] будет состоять в использовании оценки (44).

Нам понадобится формула

$$(v^{\alpha_n})_x = \sum_{k=0}^{n-1}(v^{(+1)})^{\alpha_k}v^{\alpha_n-\alpha_{k+1}}\overset{k}{v_x}$$

и аналогичная формула для $(v^{\alpha_n})_{\bar{x}}$. Рассмотрим выражение $2^n(\bar{\psi}, v^{\alpha_n})^*$. Полагая $\bar{\psi} = \eta_{\check{x}}$, $\eta_N = 0$, найдем

$$2^n(\bar{\psi}, v^{\alpha_n})^* = -2^n(\eta, (v^{\alpha_n})_x)^+$$

и, по аналогии с [5],

$$2^n|((v^{\alpha_n})_x, \eta)^+| \leqslant \tfrac{1}{8} I_n + (M\cdot 2^n \|\eta\|_2)^{2^n} = \tfrac{1}{8} I_n + (M\cdot 2^n \|\bar{\psi}\|_3)^{2^n}. \quad (49)$$

Это неравенство позволяет сразу написать оценку для $2^n((g_{22}v)_{\check{x}}, v^{\alpha_n})^*$. В самом деле, имеем

$$2^n((g_{22}v)_{\check{x}}, v^{\alpha_n})^* = -2^n(g_{22}v, (v^{\alpha_n})_x)^+ \leqslant \tfrac{1}{8} I_n + (M\cdot 2^n \|v\|_{2^*})^{2^n}$$

и аналогично для других выражений того же типа, так что

$$K_n = 2^n((g_{11}v)_{\hat{x}} + (\bar{g}_{12}\check{v})_{\hat{x}} + (g_{22}v)_{\check{x}} + (\bar{g}_{21}\check{v})_{\check{x}}, v^{\alpha_n})^* \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2} I_n + [M2^n(\|v\|_{2^*} + \|\check{v}\|_{2^*})]^{2^n}.$$

Так как, согласно (44), $\|v\|_{2^*} \leqslant M\|\bar{\psi}\|_3$, то

$$K_n \leqslant \tfrac{1}{2} I_n + (M\cdot 2^n \|\bar{\psi}\|_3)^{2^n}, \qquad M = M(c_1, \ldots, c_5) > 0. \quad (50)$$

По аналогии с [5] находим

$$2^n(b_{11}v_{\hat{x}} + b_{22}v_{\check{x}}, v^{\alpha_n})^* \leqslant \tfrac{1}{8} I_n + M\cdot 2^n(1, \overset{n}{v})^*, \qquad M = M(c_1, c_4) > 0, \quad (51)$$

$$2^n(\bar{d}_2\check{v}, v^{\alpha_n})^* \leqslant (\check{\rho}, \overset{\check{n}}{\check{v}})^* + M\cdot 2^n(1, \overset{n}{v})^*, \qquad M = M(c_2, c_3) > 0. \quad (52)$$

Остановимся более подробно на оценке выражения $2^n(\bar{b}_{12}\check{v}_{\hat{x}} + \bar{b}_{21}\check{v}_{\check{x}}, v^{\alpha_n})^*$. Проведем выкладку только для первого слагаемого:

$$2^n(\bar{b}_{12}\check{v}_{\hat{x}}, v^{\alpha_n})^* = 2^n(\bar{b}_{12}\check{v}_x, v^{\alpha_n})^+ = 2^n(\bar{b}_{12}\check{v}_x, (\overset{\check{n}-1}{v} + \tau \overset{n-1}{v}_{\bar{t}}), v^{\alpha_{n-1}})^+ =$$
$$= 2^n(\bar{b}_{12}\check{v}_x \check{v}^{\alpha_{n-1}}\check{v}, v^{\alpha_{n-1}})^+ + 2^n\tau(\bar{b}_{12}\check{v}_x, \overset{n-1}{v}_{\bar{t}} v^{\alpha_{n-1}})^+.$$

Из формулы (41) для $I_n$ видно, что

$$(\sqrt{a^{(+1)}}|\check{v}_x|, |v^{\alpha_{n-1}}|)^+ \leqslant (a^{(+1)}\check{v}_x^2, v^{\alpha_n-\alpha_1})^{1/2} \leqslant 2^{-n/2+1} I_n^{1/2}.$$

Поэтому можно написать

$$2^n(\bar{b}_{12}\check{v}_x \overset{n-1}{\check{v}}, v^{\alpha_{n-1}})^+ \leqslant 2^n c_4(\check{v}_x^2, \overset{\check{n}}{\check{v}})^{+1/2}(v^{\alpha_{n-1}}, 1)^{+1/2} \leqslant \quad (53)$$
$$\leqslant 2^n c_4 c_1^{-1/2^n} \check{I}_n^{1/2^n}(\check{v}_x^2, \check{v}^{\alpha_n-\alpha_1})^{+1/2}(1, \overset{n}{v})^{+(1/2-1/2^n)} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(n+1)/2} c_4 c^{-(1/2-1/2^n)} \check{I}_n^{1/2+1/2^n}(1, \overset{n}{v})^{+(1/2-1/2^n)} \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}\tfrac{\check{\tau}}{\tau}\check{I}_n + M2^n(1, \overset{n}{v})^*, \qquad M = M(c_1, c_4, m^*) > 0,$$

так как $\overset{n}{v} = v^{\alpha_n-1}v^2$, $v^2 \leqslant \left(\frac{1}{c_1} I_n\right)^{1/2^{n-1}}$, $\left(\check{v}_x^2, \check{v}^{\alpha_n-\alpha_1}\right)^+ \leqslant 2^{(n-1)/2}\left(\check{I}_n/c_1\right)^{1/2}$.

Рассмотрим теперь второе выражение:

$$2^n\tau\,(\bar{b}_{12}\check{v}_x,\ \overset{n-1}{v_{\bar{t}}}\,v^{\alpha_{n-1}})^+ \leqslant \frac{2^n c_4\sqrt{2}}{\sqrt{c_2}}\left(\frac{1}{c_1}I_n\right)^{1/2-1/2^n}\left(\sqrt{\tau}\,\|\check{v}_{\bar{x}}\|_2\right)\left(\sqrt{\tau}\,\|\sqrt{\bar{\rho}}\,\overset{n-1}{v_{\bar{t}}}\,\|_{2^*}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{8}I_n + \tfrac{1}{2}\tau\left\|\sqrt{\bar{\rho}}\,\overset{n-1}{v_{\bar{t}}}\right\|^2_{2^*} + (M\cdot 2^n\sqrt{\tau}\,\|\check{v}_{\bar{x}}\|_2)^{2^n}.$$

Учитывая затем оценку (44) для $\sqrt{\tau}\,\|\check{v}_{\bar{x}}\|_2$, находим

$$2^n\,(\bar{b}_{12}\check{v}_{\hat{x}} + \bar{b}_{21}\check{v}_{\check{x}},\ v^{\alpha_n})^* \leqslant \tfrac{1}{4}I_n + P_n + \frac{\check{\tau}}{\tau}\check{I}_n + (M\cdot 2^n\,\overline{\|\bar{\psi}\|_3})^{2^n}.$$

Собирая все оценки (51) — (53) и выбирая $\overline{M}$ так, чтобы коэффициент при $\left(1,\ \overset{n}{v}\right)^*$ в (40) был неотрицательным, получим неравенство

$$(\bar{\rho},\ \overset{n}{v})^* + \tau I_n \leqslant (\check{\bar{\rho}},\ \overset{\check{n}}{v})^*\,(1 + M_1\tau) + \check{\tau}\check{I}_n + \tau\,(M\cdot 2^n\,\overline{\|\bar{\psi}\|_3})^{2^n}, \qquad (54)$$

справедливое при достаточно малом $\tau < \tau_0$, где $\tau_0$, $M_1$, $M$ — положительные постоянные, не зависящие от сетки, $\tau_0 = \tau_0\,(c_1, \ldots, c_5)$, $M_1 = M\,(c_2, c_6)$, $M = M\,(c_1, \ldots, c_5, m^*)$.

Из (54) в силу леммы $4_a$ следует

$$\left(1,\ \overset{n}{v}\right)^* + \tau\left\|\overset{n-1}{v_{\bar{x}}}\right\|^2_2 \leqslant M'\,(M2^n\,\overline{\|\bar{\psi}\|_3})^{2^n} \quad \text{при } \tau \leqslant \tau_0. \qquad (55)$$

Перейдем от $v$ к $z$:

$$\left(1,\ \overset{n}{z}\right)^* + \tau\left\|\overset{n-1}{z_{\bar{x}}}\right\|^2_2 \leqslant M''\,(M2^n\,\overline{\|\bar{\psi}\|_3})^{2^n} \quad \text{при } \tau \leqslant \tau_0.$$

Отсюда получаем

$$\|z\,(x,\ t)\|_0 \leqslant M\cdot 2^n\,\overline{\|\psi\,(x,\ t)\|_3}\,\hbar_*^{-1/2^n}, \quad \hbar_* = \min_{0<i<N}\hbar_i, \qquad (56)$$

$$\|z\,(x,\ t)\|_0 \leqslant M\cdot 2^n\,\overline{\|\psi\,(x,\ t)\|_3}\,\tau_*^{-1/2^n}, \quad \tau_* = \min_{0<t_j\leqslant t}\tau_j. \qquad (57)$$

Второе неравенство следует из

$$\left(\tau\left\|\overset{n-1}{z_{\bar{x}}}\right\|^2_2\right)^{1/2^n} \leqslant M\cdot 2^n\,\overline{\|\psi\,(x,\ t)\|_3}, \qquad \left\|\overset{n}{z}\right\|_0 \leqslant \left\|\overset{n-1}{z_{\bar{x}}}\right\|^2_2.$$

Выбирая $n$ так, чтобы выполнялось условие (78), § 1, [5], т. е. условие

$$\frac{\log_2\frac{1}{\hbar_*}}{\varepsilon\log_2\log_2\frac{1}{\hbar_*}} \leqslant 2^n \leqslant \log_2\frac{1}{\hbar_*} \text{ при } \hbar_* \leqslant h_0\,(\varepsilon), \qquad (58)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, и учитывая, что

$$n + \frac{1}{2^n}\log_2\frac{1}{\hbar_*} \leqslant \delta\log_2\log_2\frac{1}{\hbar_*}, \quad \delta = 1 + \varepsilon > 1,$$

из (56) находим

$$\|z(x,\ t)\|_0 \leqslant M\,\overline{\|\psi\,(x,\ t)\|_3}\,\ln^{\delta}\frac{1}{\hbar_*} \quad \text{при } \hbar_* \leqslant h_0\,(\varepsilon). \qquad (59)$$

Выбирая $n = n(\tau_*)$ по аналогии с (58) и пользуясь (57), получим

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M \overline{\|\psi(x, t)\|_3} \ln^{\delta} \frac{1}{\tau_*} \quad \text{при } \tau_* \leqslant \tau_0(\varepsilon).$$

Тем самым доказана

Т е о р е м а 5. *Пусть $z = z(x, t)$ есть решение задачи* (33) *и выполнены условия* (34) *и* (35). *Тогда на произвольной последовательности сеток $\Omega$ справедливы следующие оценки:*

$$\|z(x, t)\|_2 \leqslant M \overline{\|\psi(x, t)\|_3} \quad \textit{при } \|\tau\|_0 \leqslant \tau_0 \textit{ (оценка в среднем)}, \tag{60}^*$$

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M \overline{\|\psi(x, t)\|_3} \ln^{\delta} \frac{1}{\tau_*} \quad \textit{при } \|\tau\|_0 \leqslant \tau_0'(\tau_0, \varepsilon), \tag{61}$$

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M \overline{\|\psi(x, t)\|_3} \ln^{\delta} \frac{1}{\hbar_*} \quad \textit{при } \|\tau\|_0 \leqslant \tau_0,\ \hbar_* \leqslant h_0(\varepsilon), \tag{62}$$

*где $\delta = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon$ — произвольное положительное число, $\tau_0$, $M$ — положительные постоянные, не зависящие от сетки.*

З а м е ч а н и е 1. Если $b_{12} = b_{21} = 0$, то теорема 5 верна для произвольной сетки $\Omega$.

З а м е ч а н и е 2. Если $b_{ss} = g_{sk} = 0$ $(k, s = 1, 2)$, то принцип максимума дает

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M \overline{\|\psi(x, t)\|_0} \text{ при } \|\tau\|_0 \leqslant \tau_0$$

(ср. с [5]) на любой сетке $\Omega$. Если, кроме того, $d_1 \leqslant 0$, то эта оценка справедлива для любых $\|\tau\|_0$.

## § 4. О порядке точности разностных схем на неравномерных сетках

1. В в е д е н и е. В § 2 были рассмотрены различные однородные разностные схемы для линейного и квазилинейного параболических уравнений в случае неравномерных сеток. Нашей конечной целью является выяснение порядка точности этих схем на произвольных неравномерных сетках в классе непрерывных и разрывных коэффициентов соответствующих дифференциальных уравнений. Этот вопрос детально изучался в [2], [4], [5] для равномерных сеток. Полученные в § 3 априорные оценки позволяют даже в случае равномерных сеток существенно усилить теорему 6 работы [5] о порядке точности схем для квазилинейного уравнения (2.21). Двухпараметрическому семейству разностных схем (2.22), очевидно, принадлежат, в частности, и схемы, изучавшиеся в [5].

Будем всегда предполагать, как уже указывалось в § 2, что во всей области $\overline{D}$ или в каждой из областей $\overline{\Delta}_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0$ (в случае разрывных коэффициентов), выполнены условия, при которых рассматриваемые нами схемы имеют максимальный порядок аппроксимации на равномерных сетках. Тогда, как было показано в § 2, погрешность аппроксимации $\Psi$ наших схем может быть представлена в виде:
а) для схем (2.10), (2.17) и (2.19)

$$\Psi = \mu \overset{(\alpha)}{\hat{x}} + \psi^*, \quad \psi^* = O(h^2) + O(h_+^2) + O(\tau^{m_\alpha}), \quad m_\alpha = \begin{cases} 2, & \alpha = 0.5 \\ 1, & \alpha \neq 0.5 \end{cases}$$
$$\mu = \mu_0 h^2 = O(h^2), \tag{1}$$

где $\mu_0$ определяется одной из формул (2.10), (2.18);
б) для схемы (2.22)

$$\Psi = \psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \quad \mu = \mu_0 h^2 = O(h^2), \quad \psi^* = O(h^2) + O(h_+^2) + O(\tau). \quad (2)$$

Если условия А выполнены в $\overline{Д}$, то представления (1), (2) справедливы во всех узлах $(x, t)$ сетки $\Omega$. Если же имеются линии $x = \xi_\nu(t) = x_{n_\nu} + \theta_\nu h_{n_\nu+1}$ $(0 \leqslant \theta_\nu \leqslant 1, \nu = 1, 2, \ldots, \nu_0)$ разрыва коэффициентов дифференциального уравнения и условия А выполнены в каждой области $\overline{\Delta}_\nu$, то в случае неподвижных разрывов $(\xi_\nu(t) \equiv 0, \ \nu = 1, 2, \ldots, \nu_0)$ (1) и (2) справедливы во всех узлах сетки $\Omega$, кроме узлов $(x_{n_\nu}, t_j)$ и $(x_{n_\nu+1}, t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, K$. Выбирая последовательность сеток $\Omega(k)$, можно добиться, что для таких сеток формулы (1) и (2) сохраняют силу и вдоль линий разрыва $x = \xi_\nu = x_{n_\nu}$.

В случае движущихся или косых разрывов $(\xi_\nu'(t) \neq 0$ хотя бы для одного $\nu)$ ситуация сложнее (см. [2]).

В дальнейшем будем всегда предполагать, что в случае а) всегда выполнено условие: функция $\mu_0(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица по $t$, так что

$$|(\mu_0)_{\bar{t}}| \leqslant M, \qquad \mu_{\bar{t}} = O(h^2), \quad (3)$$

где $M$ — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

Из формулы (2) видно, что (3) означает требование, чтобы, например, $\partial^3 u/\partial x^3$ удовлетворяла условию Липшица по $t$.

Для упрощения формулировок, вместо слов: «решение задачи (2.7) равномерно сходится к решению задачи (2.1) и имеет точность $O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha})$»,—будем говорить: «схема (2.7) равномерно сходится со скоростью $O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha})$».

Все эти замечания позволят облегчить приводимые ниже формулировки теорем о сходимости и точности наших схем.

2. К о э ф ф и ц и е н т ы  н е п р е р ы в н ы.

Т е о р е м а 6. *Разностная схема* (2.17) *при* $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *равномерно сходится со скоростью* $O(\|h^2\|_2) + O(\|\tau^{m_\alpha}\|_2)$ *на произвольной последовательности неравномерных сеток* $\overline{\Omega}$, *точнее,*

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(\|h^2\|_2 + \|\tau^{m_\alpha}\|_2) \quad \text{при } \|\tau\|_0 \leqslant \tau_0, \quad (4)$$

$$\|\tau^{m_\alpha}\|_2 = \left(\frac{1}{t}\sum_{t_{j'}=t_1}^{t} (\tau_{j'}^{m_\alpha})^2 \tau_{j'}\right)^{1/2}, \qquad \|h^2\|_2 = (1, h^2]^{1/2},$$

*где* $y$ — *решение задачи* (2.17), $u$ — *решение задачи* (2.13), $\tau_0$ *и* $M$ — *положительные постоянные, не зависящие от выбора сеток.*

Т е о р е м а 7. *Разностные схемы* (2.22) *при* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *и* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ *сходятся в среднем со скоростью* $O(\|h^2\|_2) + O(\|\tau\|_2)$ *и равномерно сходятся на последовательности сеток* $\Omega^*$ *со скоростью* $O\left(\|h^2\|_2 \ln^\delta \frac{1}{\hbar_*}\right) + O\left(\|\tau\|_2 \ln^\delta \frac{1}{\tau_*}\right)$, *точнее,*

$$\|y - u\|_2 = \|y(x, t) - u(x, t)\|_2 \leqslant M(\|h^2\|_2 + \|\tau\|_2) \quad \text{при } \|\tau\|_0 \leqslant \tau_0, t \in \omega_\tau, \quad (5)$$

$$\|y(x, t) - u(x, t)\|_0 \leqslant M\left(\|h^2\|_2 \ln^\delta \frac{1}{\hbar_*} + \|\tau\|_2 \ln^\delta \frac{1}{\tau_*}\right)$$

$$\text{при } \|\tau\|_0 \leqslant \tau_0'(\tau_0, \delta), \quad \hbar_* \leqslant h_0(\delta), \quad \tau \leqslant m^* \check{\tau}, \quad (6)$$

*где $u$ — решение задачи* (2.21), *$y$ — решение задачи* (2.22), $\hbar_* = \min\limits_{0<i<N} \hbar_i$, $\tau_\circ = \tau_{*j+1} = \min\limits_{0<j'\leqslant j+1} \tau_{j'}$, $\delta > 1$ — *произвольное число*, $\tau_0$, $M$, $m^*$ — *постоянные, не зависящие от выбора сетки* ($t = t_{j+1}$).

Для доказательства теоремы 6 достаточно воспользоваться выражением (1) для $\Psi$ и теоремой 4, для доказательства теоремы 7 — выражением (2) и теоремой 5 (см. [2] — [5]).

Если сетка $\overline{\Omega}$ равномерна, то из (6) следует (ср. [5])

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\left(h^2 \ln^\delta \frac{1}{h} + \tau \ln^\delta \frac{1}{\tau}\right). \tag{7}$$

При этом мы, естественно, предполагаем, что $h_\circ = \min \hbar_i$ и $\tau_\circ = \min \tau_j$ удовлетворяет при $\|h\|_0 \to 0$ и $\|\tau\|_0 \to 0$ требованиям: $\ln(1/\|h_*\|) < 1/\|h\|_0^\varepsilon$, $\ln(1/\tau) < 1/\|\tau\|_0^\varepsilon$, где $\varepsilon$ — любое сколь угодно малое положительное число.

3. К о э ф ф и ц и е н т ы  р а з р ы в н ы. Ограничимся изучением сходимости наших схем только для случая неподвижных разрывов (Н. Р.), когда коэффициенты дифференциальных уравнений имеют разрывы I рода только на конечном числе прямых, параллельных оси $t$ в плоскости $(x, t)$.

Т е о р е м а  8. *Разностная схема* (2.17) *при* $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *в случае, когда коэффициенты уравнения* (2.13) *имеют только неподвижные разрывы, равномерно сходится на последовательности сеток* $\overline{\Omega}(k)$ *со скоростью* $O(\|h^2\|_2) + O(\|\tau^{m_\alpha}\|_2)$.

Если выбрана сетка $\overline{\Omega}(k) = \overline{\omega}_h(k) \times \overline{\omega}_\tau$ такая, что линии разрыва коэффициентов дифференциального уравнения (2.13) являются узловыми линиями сетки $\overline{\Omega}(k)$, то для погрешности аппроксимации, как было показано в § 2, сохраняет силу представление (2.18) во всех узлах сетки $x \in \omega_h(k)$ и для всех $t_j \in \omega_\tau$. Поэтому доказательство теоремы 8 совпадает с доказательством теоремы 6.

Мы не будем приводить формулировки теорем о точности схем (2.17) и (2.22) на произвольной последовательности сеток $\overline{\Omega}$ (или $\overline{\Omega}^*$), так как в этом случае соответствующие теоремы работы [5] сохраняют силу, если вместо $O(h^\varkappa) + O(\tau^{m_\alpha})$ писать $O(\|h\|_0^\varkappa) + O(\|\tau^{m_\alpha}\|_2)$, а для схемы (2.22) вместо $O(h^{\varkappa_1 - \rho(h)}) + O(\tau^{1-\rho(\tau)})$, где $\rho(h) \sim 1/\sqrt{\ln(1/h)}$, $\rho(\tau) \sim \sim 1/\sqrt{\ln(1/\tau)}$, написать

$$O\left(\|h\|_0^\varkappa \ln^\delta \frac{1}{\hbar_*}\right) + O\left(\|\tau\|_2 \ln^\delta \frac{1}{\tau_*}\right). \tag{8}$$

Не представляет также труда обобщение теоремы работы [5] на случай неравномерных сеток. При этом, в силу теоремы 5, схемы (2.7), (2.17) и (2.22) имеют одинаковый порядок точности, если $k(x, t)$ и, соответственно, $k(x, t, u)$ обладают движущимися (косыми) разрывами (см. также [2]).

4. Д р у г и е  с х е м ы  д л я  к в а з и л и н е й н ы х  у р а в н е н и й. Рассмотрим задачу (2.21). Помимо указанных в § 2 схем, заслуживает внимания также схема

$$\left.\begin{aligned} \rho y_{\bar{t}} = \tfrac{1}{2}\left(a_{(0.5)}(x, t, y^\circ)\left(y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\right)\right)_{\hat{x}} + \varphi\left(x, \bar{t}, \tfrac{1}{2}(y + \check{y}), \tfrac{1}{2}\lambda(y + \check{y})\right), \\ y_0 = u_1(t), \qquad y_N = u_2(t), \qquad y(x, 0) = u_0(x), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\rho = \rho(x, \bar{t})$, $\bar{t} = t - 0.5\tau$, $a_{(0,5)}$ определяется по второй из формул п.5, § 2, при $\alpha = 0.5$, $y^* = 0.5\,(y + y_i^{(-1)})$.

Эта схема на равномерной сетке имеет 2-й порядок аппроксимации. На неравномерной сетке погрешность аппроксимации можно представить в виде

$$\Psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \quad \mu = O(h^2) + O(\tau^2), \quad \psi^* = O(h^2) + O(h_+^2) + O(\tau^2). \tag{10}$$

Для погрешности $z = y - u$, где $y$ — решение задачи (9), мы получаем задачу, являющуюся частным случаем (при $b_1 = b_2$, $g_1^{(-1)} = g_2$) задачи

$$\left.\begin{gathered} \rho z_{\bar{t}} = 0.5\Lambda(z + \check{z}) + \Psi, \qquad z_0 = z_N = 0, \qquad z(x, 0) = 0, \\ \Lambda w = (a w_{\bar{x}})_{\hat{x}} + b_1 w_{\hat{x}} + b_2 w_{\check{x}} + (g_1 w)_{\hat{x}} + (g_2 w)_{\check{x}} + dw, \\ 0 < c_1 \leqslant a, \quad 0 < c_2 \leqslant \rho, \quad |d| \leqslant c_3, \quad |b_s| \leqslant c_4, \quad |g_s| \leqslant c_5, \quad s = 1, 2, \end{gathered}\right\} \tag{11}$$

$$|\rho_{\bar{t}}| \leqslant c_6. \tag{12}$$

Покажем, что схема (11) — (12) устойчива в среднем на любой последовательности сеток, так что при $\|\tau\|_0 \leqslant \tau_0$ справедлива оценка

$$\|z(x, t_{j+1})\|_{2^*} \leqslant M\left\{\|\sqrt{\rho(x, 0)}\, z(x, 0)\|_{2^*} + \Big[\sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} \|\Psi(x, t_{j'})\|_3^2\Big]^{1/2}\right\}. \tag{13}$$

Перейдем, как обычно, от функции $z$ к функции $v$, полагая

$$z^j = v^j \mu^j, \qquad \mu = (1 + \overline{M}\tau), \check{\mu} \qquad \text{или} \qquad \mu_{\bar{t}} = \overline{M}\mu, \quad \mu(x, 0) = 1 \tag{14}$$

где $\overline{M}$ — произвольная положительная постоянная.

Для упрощения выкладок будем пока считать $\rho = 1$. Учитывая соотношение $z_{\bar{t}} = 0.5\,(\mu + \check{\mu})\, v_{\bar{t}} + 0.5\,(v + \check{v})\,\mu_{\bar{t}}$, вводя обозначение

$$w = \frac{\mu v + \check{\mu}\check{v}}{\mu + \check{\mu}},$$

и замечая, что $v + \check{v} = 2w - \varkappa\tau^2 v_{\bar{t}}$, получим

$$(1 - \tau^2\varkappa^2) v_{\bar{t}} + 2\varkappa w = \Lambda w + \overline{\Psi}, \tag{15}$$

где

$$\varkappa = \mu_{\bar{t}}/(\mu + \check{\mu}), \qquad \overline{\Psi} = \Psi/0.5\,(\mu + \check{\mu}).$$

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} v_{\bar{t}} w = v_{\bar{t}}(\mu v + \check{\mu}\check{v})/(\mu + \check{\mu}) = 0.5(\mu + \check{\mu})^{-1}\{\mu[(v^2)_{\bar{t}} + \\ + \tau v_{\bar{t}}^2] + \check{\mu}[(v^2)_{\bar{t}} - \tau v_{\bar{t}}^2]\} = 0.5(v^2)_{\bar{t}} + 0.5\tau^2\varkappa v_{\bar{t}}^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} 1 - \tau^2\varkappa^2 = 1 - \tau^2(\mu_{\bar{t}})^2(\mu + \check{\mu})^{-2} = \\ = 1 - (\mu - \check{\mu})^2 (\mu + \check{\mu})^{-2} = 2\mu\check{\mu}(\mu + \check{\mu})^{-2} > 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Умножим (15) на $w\hbar$ и просуммируем по $x \in \omega_h$. Учитывая (16), (17), после серии несложных мажорантных оценок приходим к неравенству (запишем его для $\rho \neq 1$)

$$(\rho, v^2)^* \leqslant (1 + M\tau)(\check{\rho}, \check{v}^2)^* + \tau\|\Psi\|_3^2 (c_1 \mu\check{\mu})^{-1} \tag{18}$$

которое будет выполняться, если выбрать $\overline{M} = \overline{M}(c_1, \ldots, c_5)$ достаточно большим, а $\tau$ достаточно малым:

$$\tau \leqslant \tau_0, \qquad \tau_0 = \tau_0(c_1, \ldots, c_5) > 0.$$

Пользуясь леммой $4_a$ и возвращаясь к функции $z$, получим (13).

Оценка (13) может быть использована для доказательства теорем о сходимости и точности схемы (9) как в классе непрерывных, так и в классе разрывных коэффициентов уравнения (2.21). Отметим лишь, что в классе непрерывных $k$ и $f$ (условия $A$ выполнены в $\overline{D}$) схема (9) имеет второй порядок точности:

$$\|y - u\|_{2^*}^{\overline{\Omega}} = O(\|h^2\|_2) + O(\|\tau^2\|_2) \qquad \text{на } \overline{\Omega}.$$

Такой же порядок точности на последовательности сеток $\overline{\Omega}(k)$ имеет схема (9) и в случае неподвижных разрывов (условия А выполнены в каждой из областей $\overline{\Delta}_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0$).

5. Об одной экономичной однородной разностной схеме для системы параболических уравнений. Рассмотрим в $\overline{D} = (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T)$ задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u^j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x}\left(k_{ij}(x,t)\frac{\partial u^j}{\partial x}\right) + f^j(x,t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \\ &u^i(0,t) = u_1^i(t), \quad u^i(1,t) = u_2^i(t), \quad u^i(x,0) = u_0^i(x), \quad i = 1, \ldots, p; \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\sum_{i,j=1}^{p} k_{ij}\xi_i\xi_i \geqslant c_1 \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2, \quad k_{ij} = k_{ji}, \quad |(k_{ij})_{\bar{t}}| \leqslant c_2 \quad (c_m = \text{const} > 0, \ m = 1,2). \tag{20}$$

В [3] рассматривались шеститочечные схемы для системы параболических уравнений и были получены априорные оценки, которые позволяют, по аналогии со случаем одного уравнения ($p = 1$), доказать равномерную сходимость и получить оценку порядка точности указанных схем как в классе непрерывных коэффициентов, так и в классе коэффициентов, имеющих неподвижные разрывы. Нет необходимости проводить соответствующие доказательства. Так как схемы [3] являются неявными, то решение получающихся разностных уравнений требует большого объема вычислений и может быть найдено, например, при помощи формул матричной прогонки [9]. Мы рассмотрим ниже схему, которая требует меньшего числа операций, так как для нахождения вектора $y = \{y^i\}$ в каждый момент $t = t_{n+1}$ требуется лишь $p$-кратное последовательное применение одномерных формул прогонки (см. [9], [10], [4]). Эта схема для уравнений (19) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_{\bar{t}}^i = &\sum_{j=1}^{i-1} (d_{ij}y_{\bar{x}}^j)_{\hat{x}} + \tfrac{1}{2}[(\check{a}_{ii}\check{y}_{\bar{x}}^i)_{\hat{x}} + (a_{ii}y_{\bar{x}}^i)_{\hat{x}}] + \\ &+ \sum_{j=i+1}^{p} (\check{a}_{ij}\check{y}_{\bar{x}}^j)_{\hat{x}} + \varphi^i(x, t - 0.5\tau), \\ y^i(0,t) = u_1^i(t), \quad &y^i(1,t) = u_2^i(t), \quad y^i(x,0) = u_0^i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Мы ограничимся здесь классом схем, для которых

$$a_{ij} = A[k_{ij}(x + sh, t)], \qquad -1 \leqslant s \leqslant 0,$$

где $A[\mu(s)]$ — линейный неубывающий функционал, для которого

$$A[1] = 1, \qquad A[s] = -0.5:$$

Отсюда и из (20) следует, что

$$\sum_{i,\,j=1}^{p} a_{ij}\xi_i\xi_j = A\Big[\sum_{i,\,j=1}^{p} k_{ij}(x_i^- + sh,\ t)\ \xi_i\xi_j\Big] \geqslant c_1 \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2. \tag{22}$$

Для вычисления $\varphi^i$ используется тот же функционал $F[\bar{f}(s)]$, что и в § 1—2:

$$\varphi^i(x,\ t) = \frac{h}{\hbar} F\ [f^i(x + sh,\ t)\ \eta_0^-(s)] + \frac{h_+}{\hbar} F\ [f^i(x + sh_+,\ t)\ \eta_0^+(s)].$$

Погрешность аппроксимации $\{\Psi^i\} = \Psi$ схемы (21) может быть представлена в виде

$$\left.\begin{aligned} \Psi^i &= (\mu^i)_{\hat{x}} + \psi^{*i}, \qquad \mu^i = O(h^2), \\ \psi^{*i} &= O(h^2) + O(h_+^2) + O(\tau), \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ p. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

По аналогии с [3] методом энергетических неравенств получается априорная оценка

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\ \{\overline{\|\mu\ (x,\ t)\|_2} + \overline{\|\mu_{\bar{t}}(x,\ t)\|_2} + \overline{\|\psi^*\ (x,\ t)\|_3}\} \tag{24}$$

при достаточно малом $\|\tau\|_0 \leqslant \tau_0$. Здесь $y = \{y^i\}$, $u = \{u^i\}$, $\mu = \{\mu^i\}$, $\psi^* = \{\psi^{*i}\}$ — сеточные вектор-функции.

Отсюда и из (23) вытекает, что схема (21) равномерно сходится на произвольной последовательности неравномерных сеток со скоростью $O(\|h^2\|_2) + O(\|\tau\|_2)$.

*Поступила в редакцию*
*12.12.1962*

**Цитированная литература**

1. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 441—460.
2. А. А. Самарский, И. В. Фрязинов. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 5, 806—824.
3. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 6, 979—1000.
4. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем и матем. физ., 1962, 2, № 1, 25—56.
5. А. А. Самарский. О сходимости и точности однородных разностных схем для одномерных и многомерных параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 4, 603—634.
6. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем и матем. физ., 1962, 2, № 5, 812—832.
7. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 5—63.
8. И. В. Фрязинов. Об устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 6, 1122—1127.
9. Г. И. Марчук. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
10. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 2. М., Физматгиз, 1959.