ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 3 Май 1963 Июнь № 3

518: 517.944/.947

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

Для численного решения линейного уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными в [1] — [9] был предложен ряд экономичных разностных схем, применимых в случае областей специального вида (параллелепипедов или областей, составленных из параллелепипедов, см. [9]). Уравнения с переменными коэффициентами рассматривались в [7] — [12], в остальных работах — уравнения с постоянными коэффициентами. В [10] предложен локально-одномерный метод переменных направлений для линейного (1.1_0) (см. § 1) и простейшего квазилинейного уравнения (1.1_1), пригодный в случае произвольной пространственной области G, на границе Γ которой заданы краевые условия I рода. Построено семейство локально-одномерных схем, однородных по пространству и циклически однородных по времени. Показано, что все эти схемы абсолютно устойчивы относительно начальных и граничных данных, а также по правой части уравнения (теорема 1, [10]) и равномерно сходятся со скоростью $O(h^2) + O(\tau)$, т. е. имеют тот же порядок точности, что и многомерные неявные схемы (см. [17]).

В данной статье рассматриваются локально-одномерные схемы на произвольных неравномерных сетках для линейных и квазилинейных параболических уравнений с «коэффициентом теплопроводности» $k_\alpha = k_\alpha(x, t, u)$, зависящим от «температуры» $u = u(x, t)$. Принцип максимума, при помощи которого была установлена в [10] равномерная корректность задачи для погрешности $z = y - u$ относительно погрешности аппроксимации, в случае $k_\alpha = k_\alpha(x, t, u)$ не имеет места, а в случае неравномерных сеток и $k_\alpha = k_\alpha(x, t)$ позволяет доказать лишь первый порядок точности по h (для задач II_0 и II_1, см. § 1). Для ряда схем II_k, $k = 1', 2', 3$ (см. § 1), принцип максимума не удалось установить. Поэтому значительное внимание (см. § 2) уделяется выводу априорных оценок (оценок в среднем и равномерных оценок) для весьма сложных уравнений, которым удовлетворяет погрешность $z = y - u$, где u — решение дифференциального уравнения, а y — решение соответствующей разностной задачи. Поскольку коэффициенты пространственных частей разностных схем удовлетворяют лишь условию ограниченности, то для вывода априорных оценок используется метод энергетических неравенств n-го

ранга, развитый в [14], [15], [17]. При этом учитывается сложная структура погрешности аппроксимации

$$\Psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha, \qquad \mathring{\psi}_\alpha = O(1), \quad \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0,$$

$$\psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{p} [(\mu_{\alpha\beta})_{\hat{x}_\beta} + \overset{*}{\psi}_{\alpha\beta}], \qquad \mu_{\alpha\beta} = O(h_\beta^2), \qquad \overset{*}{\psi}_{\alpha\beta} = O(\hbar_\beta^2) + O(\tau).$$

Для суммирования главной части $\mathring{\psi}_\alpha$ погрешности аппроксимации в [10] и [12] предложены два метода. Однако поскольку метод из [10] целесообразно использовать тогда, когда имеет место принцип максимума, а метод из [12] — при $p = 2$ для специального вида схем, то в § 2 предложен третий, весьма общий, метод, который применим во всех случаях. Метод суммирования локальных погрешностей аппроксимации по пространству является развитием методов из [13] — [18]. Наряду с пространственной сеткой $\omega_h^{(1)}$, аналогичной сетке в [10], рассматривается сетка $\omega_h^{(2)}$, граничные точки которой являются точками границы Γ области G, и потому краевые условия в них задаются без сноса. В § 3 показано, что порядок точности на обеих сетках одинаков ($O(h^2)$). Среди результатов § 3 отметим лишь один: если схема II_1 (см. § 1) равномерно сходится на равномерной сетке со скоростью $O(h^2) + O(\tau)$, то на произвольной неравномерной сетке она сходится в среднем со скоростью $O(\|h^2\| + \|\tau\|_0)$ и равномерно со скоростью

$$O\left(\|h\|_0^2 \ln^\delta \frac{1}{H_*}\right) + O\left(\|\tau\|_0 \ln^\delta \frac{1}{H_*}\right),$$

где $\|h^2\|$ — среднее квадратичное значение $h^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2$ по сетке ω_h, $\|h^2\|_0 = \max_{x \in \omega_h} h^2$, $\|\tau\|_0 = \max_{\omega_\tau} \tau_j$, $H_* = \min_{\omega_h} H$, $H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha$ — объем ячейки сетки, $\delta > 1$ — произвольное число.

Получаемые априорные оценки позволяют без труда доказать сходимость всех локально-одномерных схем из § 1 в случае, когда коэффициенты дифференциального уравнения имеют разрывы I рода на конечном числе гиперплоскостей, параллельных координатным гиперплоскостям (ср. [17]). Выбирая, по аналогии с [14], специальные последовательности сеток $\omega_h(k)$, можно добиться того, что и в этом случае наши схемы будут иметь второй порядок точности по h.

Сгущая сетку ω_h вблизи границы, можно добиться также второго порядка точности для третьей краевой задачи в случае параллелепипеда, которая была рассмотрена в [10], § 1, п. 7.

Методы § 2 позволяют, в частности, показать, что однородные разностные схемы для эллиптических уравнений, а также метод расщепления [7] — [9] для линейных параболических уравнений сохраняют свой максимальный порядок точности на произвольных неравномерных сетках. Краткое изложение соответствующих результатов дано в § 4.

§ 1. Локально-одномерные схемы переменных направлений на неравномерной сетке

1. Дифференциальные уравнения

Будем рассматривать p-мерные уравнения параболического типа

$$c(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_p)$ — точка p-мерного евклидова пространства R_p с координатами $x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_p$, $c(x, t) = c(x_1, \ldots, x_p, t)$. Дифференциальный оператор $L_\alpha u$ и функция f определяются по одной из формул:

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \qquad f = f(x, t) - q(x, t)u, \tag{1_0}$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \qquad f = f(x, t, u), \tag{1_1}$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \qquad f = f(x, t, u), \tag{1_2}$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \qquad f = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_p}\right). \tag{1_3}$$

Пусть G — произвольная p-мерная конечная область с границей Γ, $\overline{G} = G + \Gamma$, $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, $Q_T = G \times (0 < t \leqslant T]$. Требуется найти в цилиндре $\overline{Q}_T$ решение $u = u(x, t)$ задачи

$$\left.\begin{aligned} &c\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f, \qquad (x, t) \in Q_T, \\ &u|_\Gamma = u_1(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T]; \qquad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

где $u_0(x)$ и $u_1(x, t)$ — заданные функции.

В зависимости от вида L_α и f мы получаем задачи I_0, I_1, I_2, I_3. В [10] рассматривались лишь задачи I_0 и I_1. Коэффициенты $k_\alpha(x, t, u)$, $c(x, t)$ удовлетворяют условиям

$$k_\alpha(x, t, u) \geqslant c_1 > 0, \quad c(x, t) \geqslant c_2 > 0, \quad \alpha = 1, \ldots, p,$$

где c_1 и c_2 — постоянные. По аналогии с [16] будем предполагать, что

$$\partial k_\alpha/\partial u, \ \partial r_\alpha/\partial u, \ \partial f/\partial u, \ \partial f/\partial q_1, \ldots, \partial f/\partial q_p, \tag{2}$$

где $f = f(x, t, u, q_1, \ldots, q_p)$ равномерно непрерывны во всей области изменения аргументов $(x, t) \in \overline{Q}_T$, u, $q_1, \ldots, q_p$. Предполагается также, что каждая из задач I_k, $k = 0, 1, 2, 3$, имеет единственное решение $u = u(x, t)$, непрерывное в $\overline{Q}_T$ и обладающее всеми требуемыми по ходу изложения производными. Относительно области G используются те же предположения, что в [10]: пересечение с областью G любой прямой $\mathcal{L}_\alpha$, проведенной через точку $x \in G$ параллельно оси координат Ox_α, состоит из конечного числа интервалов. Нетрудно

заметить, что без ограничения общности изложение достаточно провести для случая, когда прямая $\mathcal{L}_\alpha$ пересекает Γ в двух точках. Переход к общему случаю связан лишь с усложнением редакции.

2. Сетки

В [10] изучались схемы для задач I_0 и I_1 на равномерной сетке. Здесь мы рассмотрим два типа пространственных сеток, каждая из которых является неравномерной.

Рассмотрим множество узлов $x_i = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_\alpha^{(i_\alpha)}, \ldots, x_p^{(i_p)}) \in \overline{G}$ прямоугольной сетки, покрывающей $\overline{G}$, где $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и построим две сетки $\overline{\omega}_h^{(1)}$ и $\overline{\omega}_h^{(2)}$ на области $\overline{G}$.

1. Сетка $\overline{\omega}_h^{(1)}$ определяется по аналогии с [10]. Узлы x_i и $x_{i'} = (x_1^{(i_1')}, \ldots, x_\alpha^{(i'_\alpha)}, \ldots, x_p^{(i'_p)})$ соседние, если $\sum_{\alpha=1}^{p} |i_\alpha - i'_\alpha| = 1$. Внутренняя сеточная область $\omega_h^{(1)} = \{x_i \in G\}$ состоит из узлов, все соседние узлы которых принадлежат $\overline{G}$. Узел x_i является граничным, если хотя бы один из его соседних узлов не принадлежит $\overline{G}$. Проведем через точку $x_i \in \omega_h^{(1)}$ прямую $\mathcal{L}_\alpha$, параллельную оси координат Ox_α, и назовем цепочкой $Ц_\alpha$ множество узлов сетки $\omega_h^{(1)}$, лежащих на $\mathcal{L}_\alpha$, включая граничные узлы $x^{(-\alpha)}$ и $x^{(+\alpha)}$ (координата x_α возрастает при переходе от $x^{(-\alpha)}$ к $x^{(+\alpha)}$). Обозначим γ_α^- множество левых граничных узлов $x^{(-\alpha)}$, а γ_α^+ — множество правых граничных узлов $x^{(+\alpha)}$ всех цепочек данного направления, $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^- + \gamma_\alpha^+$, $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_p$ — граница области $\omega_h^{(1)}$, $\overline{\omega}_h^{(1)} = \omega_h^{(1)} + \gamma$.

2. Сетка $\omega_h^{(2)} = \{x_i \in G\}$. Всякий узел $x_i \in G$ является внутренним. Граница γ сетки $\omega_h^{(2)}$ состоит только из точек границы Γ области G, так что $\gamma \subset \Gamma$ (см. [12]).

Для областей G, составленных из параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям (см. [9]), обе сетки $\omega_h^{(1)}$ и $\omega_h^{(2)}$ совпадают.

Обе сетки, $\omega_h^{(1)}$ и $\omega_h^{(2)}$, являются неравномерными, шаг сетки $h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}$ по каждому из направлений α является функцией координаты x_α (номера i_α). Сетка $\omega_h^{(2)}$ неравномерна даже тогда, когда сетка $\omega_h^{(1)}$ равномерна, но область G произвольна, так как вблизи границы Γ равномерность сетки, вообще говоря, нарушается.

Сетку по переменной $t \in [0, T]$ также будем считать неравномерной. Пусть $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_k = T$ — произвольное разбиение отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$ на K частей. Следуя [10], каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p (по числу измерений) равных частей и введем промежуточные (дробные) моменты

$$t_{j+\alpha/p} = t_j + \alpha\tau_{j+1}/p, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p-1,$$

где $\tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$ — шаг основной сетки. Сетка $\omega_\tau = \{t_{j^*} \in (0, T]\}$ содержит как целые ($t = t_j, j^* = j$), так и дробные моменты ($j^* = j + \alpha/p$): $j^* = 0, 1/p, \ldots, (p-1)/p, 1, \ldots, j, j + 1/p, \ldots, j + (p-1)/p, \; j+1, \ldots, K$. Множество узлов (x_i, t_{j^*}), где $x_i \in \omega_h^{(k)}$, $t_{j^*} \in \omega_\tau$, образует пространственно-временную сетку $\Omega^{(k)} = \omega_h^{(k)} \times \omega_\tau$, $k = 1, 2$. Граница S сетки $\Omega^{(k)}$ определяется так же, как и в [10], $\overline{\Omega} = \Omega + S$.

Для сеточных функций, заданных на $\overline{\Omega}$, мы будем пользоваться, по аналогии с [10] и [14], обозначениями

$$y = y(x, t) = y(x_i, t_{j+\alpha/p}) = y^{j+\alpha/p}, \qquad h_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)}, \qquad h_{\alpha+} = h_\alpha^{(i_\alpha+1)},$$

$$\hbar_\alpha = 0.5\,(h_\alpha + h_{\alpha+}),$$

$$x^{(\pm m_\alpha)} = x_i^{(\pm m_\alpha)} = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_{\alpha-1}^{(i_{\alpha-1})}, x_\alpha^{(i_\alpha \pm m)}, x_{\alpha+1}^{(i_{\alpha+1})}, \ldots, x_p^{(i_p)}), \quad m = 0.5, 1, 2,$$

$$x_\alpha^{(i_\alpha \pm 0.5)} = 0.5\,(x_\alpha^{(i_\alpha)} + x_\alpha^{(i_\alpha \pm 1)}), \qquad y^{(\pm m_\alpha)} = y\,(x^{(\pm m_\alpha)}, t),$$

$$y_{\bar{x}_\alpha} = (y - y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha, \qquad y_{x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/h_{\alpha+},$$

$$y_{\hat{x}_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/\hbar_\alpha = \frac{h_{\alpha+}}{\hbar_\alpha}\, y_{x_\alpha},$$

$$y_{\check{x}_\alpha} = (y - y^{(-1_\alpha)})/\hbar_\alpha = \frac{h_\alpha}{\hbar_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha}, \qquad y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = \frac{1}{2}(y_{\hat{x}_\alpha} + y_{\check{x}_\alpha}) = (y^{(+1_\alpha)} - y^{(-1_\alpha)})/2\hbar_\alpha,$$

$$y_{\bar{t}} = (y^{j+1} - y^j)/\tau, \qquad y_{\bar{t}_\alpha} = (y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p})/\tau, \qquad \tau = \tau_{j+1}.$$

Другие обозначения вводятся по ходу изложения.

Если шаг сетки ω_τ удовлетворяет условию

$$\tau_{\bar{t}} = O(\tau) \text{ или } \tau = \check{\tau}\,(1 + O(\tau)) \qquad (\check{\tau} = \tau_{\bar{j}}), \tag{3}$$

то $\omega_\tau = \omega_\tau^{**}$ называем квазиравномерной сеткой. Если

$$\tau \leqslant m^* \check{\tau}, \tag{4}$$

где $m^* > 0$ — произвольная постоянная, то $\omega_\tau = \omega_\tau^*$ (и, соответственно, $\Omega^{(k)} = \Omega_*^{(k)}$, $k = 1, 2$) будем называть нормальной сеткой.

3. Однородные схемы на неравномерных сетках ω_h

Прежде чем переходить к построению локально-одномерных схем для задач I_k, $k = 0, 1, 2, 3$, введем сначала семейство однородных разностных схем, соответствующих оператору L_α, предполагая при этом сетку ω_h неравномерной.

Рассмотрим оператор вида

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\,\frac{\partial y}{\partial x_\alpha}\right) + f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_p).$$

Соответствующую однородную разностную схему возьмем в виде

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + \varphi(x). \tag{5}$$

Эта схема определена, если указан способ вычисления коэффициентов a_α и φ через функции $k_\alpha(x)$ и $f(x)$, пригодный для произвольной неравномерной сетки.

Будем исходить из способа, указанного в [14] для $p = 1$, имея в виду, что k_α и f могут иметь разрывы I рода на гиперплоскостях, параллельных координатным гиперплоскостям и проходящих через узлы сетки.

Введем среднее значение $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$ в точке $x \in \omega_h$, полагая

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2^p} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p = 1}^{2} f(x_{1,\sigma_1}, \ldots, x_{p,\sigma_p})\, h_1^{(\sigma_1)} \ldots h_p^{(\sigma_p)}/H, \quad H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha, \tag{6}$$

где $x_{\alpha,1} = x_\alpha - 0$, $x_{\alpha,2} = x_\alpha + 0$, $h_\alpha^{(1)} = h_\alpha$, $h_\alpha^{(2)} = h_{\alpha+}$, а каждое из $\sigma_1, \ldots, \sigma_\alpha, \ldots, \sigma_p$ принимает одно из значений, 1 или 2. В частности, при $p = 1$ и $p = 2$

$$\tilde{f}(x_1) = \frac{1}{2\hbar_1}(h_1 f(x_1 - 0) + h_{1+} f(x_1 + 0)),$$

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\hbar_1\hbar_2}[f(x_1 - 0, x_2 - 0) h_1 h_2 + f(x_1 - 0, x_2 + 0) h_1 h_{2+} + f(x_1 + 0, x_2 - 0) h_{1+} h_2 + f(x_1 + 0, x_2 + 0) h_{1+} h_{2+}].$$

Если x — точка непрерывности функции f, то $\tilde{f}(x) = f(x)$. На равномерной сетке ($h_\alpha = h_{\alpha+}$) имеем

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2^p} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p = 1}^{2} f(x_{1,\sigma_1}, \ldots, x_{p,\sigma_p}). \tag{7}$$

По аналогии с [14] рассмотрим функции

$$\eta_0^{(1)}(s) = \begin{cases} 1, & s < 0 \\ 0, & s \geqslant 0 \end{cases}, \quad \eta_0^{(2)}(s) = \begin{cases} 0, & s \leqslant 0 \\ 1, & s > 0 \end{cases}, \quad \pi_0(s) = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Пусть $F_p[\mu(s_1, \ldots, s_p] = F_p[\mu(s)]$ — линейный неотрицательный функционал, определенный в параллелепипеде $\{-0.5 \leqslant s_\alpha \leqslant 0.5, \alpha = 1, \ldots, p\}$ и удовлетворяющий условиям

$$F_p[1] = 1, \quad F_p\Big[\prod_{\alpha=1}^{p} \eta_0^{(\sigma_\alpha)}(s_\alpha)\Big] = \frac{1}{2^p}, \quad F_p\Big[s_\alpha \prod_{k \neq \alpha}^{1-p} \eta_0^{(\sigma_k)}(s_k)\Big] = 0,$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию

$$f^*(s) = \frac{1}{H} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p}^{1-2} f(x_1 + s_1 h_1^{(\sigma_1)}, \ldots, x_p + s_p h_p^{(\sigma_p)}) h_1^{(\sigma_1)} \eta_0^{(\sigma_1)}(s_1) \ldots h_p^{(\sigma_p)} \eta_0^{(\sigma_p)}(s_p) \tag{10}$$

и определим $\varphi(x)$ с помощью формулы

$$\varphi(x) = F_p[f^*(s)] = F_p[f^*(s_1, \ldots, s_p)]. \tag{11}$$

В случае простейшего функционала

$$F[f^*(s)] = \tilde{f}(x) \tag{12}$$

получаем $\varphi(x) = \tilde{f}(x)$. На равномерной сетке, в силу условий (9), из (10) и (11) следует

$$\varphi(x) = F_p[f(x_1 + s_1 h_1, \ldots, x_p + s_p h_p)]. \tag{13}$$

Для коэффициента $a_\alpha(x)$ будем пользоваться формулой

$$a_\alpha(x) = A[\tilde{k}_\alpha^{(\alpha)}(x + s_\alpha h_\alpha)], \tag{14}$$

где $A[\mu(s_\alpha)]$ — одномерный функционал из [14], а

$$\tilde{k}_\alpha^{(\alpha)}(x + s_\alpha h_\alpha) = \tag{15}$$
$$= \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{\substack{\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \ldots, \sigma_p \\ (k \neq \alpha)}}^{1-2} k_\alpha(x_{1,\sigma_1}, \ldots, x_{\alpha-1,\sigma_{\alpha-1}}, x_\alpha + s_\alpha h_\alpha, x_{\alpha+1,\sigma_{\alpha+1}}, \ldots, x_{p,\sigma_p}) H_{\alpha,\sigma}/H_\alpha,$$

где

$$H_\alpha = \prod_{k\neq\alpha}^{1-p} \hbar_k, \quad H_{\alpha,\sigma} = \prod_{k\neq\alpha}^{1-p} h_k^{(\sigma_k)}.$$

Таким образом, при вычислении a_α мы сначала проводим усреднение в соответствии с (15) по переменным $x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p$, после чего действуем шаблонным функционалом $A\,[\mu\,(s_\alpha)]$. Среднее значение (15) можно было бы вычислять по аналогии с φ при помощи линейного функционала F_{p-1} размерности $p-1$. В случае двух переменных ($p=2$) имеем

$$\widetilde{k}_1^{(1)}\,(x+s_1h_1) = \frac{1}{2\hbar_2}\,(k_1\,(x_1+s_1h_1,\ x_2-0)\,h_2 + k_1\,(x_1+s_1h_1,\ x_2+0)\,h_{2+}).$$

Нетрудно убедиться в том, что погрешность аппроксимации $\varphi - \widetilde{f}$ можно представить в виде

$$\varphi\,(x) - \widetilde{f}\,(x) = \sum_{\alpha=1}^{p} (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \cdots, \qquad \mu_\alpha = O\,(h_\alpha^2). \tag{16}$$

Точками здесь и всюду в дальнейшем будем обозначать члены второго порядка относительно $\hbar_1, \ldots, \hbar_p$.

В самом деле, разложим $f^*\,(s)$, определяемое формулой (10), в окрестности точки $x^{(\sigma)} = (x_{1,\sigma_1}, \ldots, x_{p,\sigma_p})$:

$$f\,(x_1 + s_1h_1^{(\sigma_1)}, \ldots, x_p + s_ph_p^{(\sigma_p)}) = f\,(x^{(\sigma)}) + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\,(x^{(\sigma)})\,s_\alpha h_\alpha^{(\sigma_\alpha)} + \ldots.$$

Подставляя это выражение в (10) и (11), получим

$$\varphi\,(x) = \widetilde{f}(x) + \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\sigma_\beta,\,\beta\neq\alpha}^{1-2} \left[h_\alpha^2 + \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\,(x^{(\sigma)})\Big|_{\sigma_\alpha=2} - h_\alpha^2\,\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\,(x^{(\sigma)})\Big|_{\sigma_\alpha=1}\right] \times$$
$$\times\, F_p\left[s_\alpha\eta_0^{(2)}(s_\alpha)\prod_{\beta\neq\alpha}^{1-p} \eta_0^{(\sigma_\beta)}\,(s_\beta)\right]\prod_{\beta\neq\alpha}^{1-p} h_\beta^{(\sigma_\beta)}/H + \ldots.$$

Замечая, что

$$H = H_\alpha\cdot\hbar_\alpha, \qquad H_\alpha = \prod_{\beta\neq\alpha}^{1-p} \hbar_\beta, \qquad \prod_{\beta\neq\alpha}^{1-p} h_\beta^{(\sigma_\beta)}\cdot H_\alpha^{-1} = 0\,(1) \quad \text{и}$$

$$h_\alpha^2 + \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\,(x^{(\sigma)})\Big|_{\sigma_\alpha=2} - h_\alpha^2\,\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\,(x^{(\sigma)})\Big|_{\sigma_\alpha=1} = \left(h_\alpha^2\,\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\,(x^{(\sigma)})\Big|_{\sigma_\alpha=1}\right)_{\hat{x}_\alpha} + \cdots,$$

и суммируя по $\sigma_\beta = 1, 2$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$, $\beta \neq \alpha$, приходим к выражению (16).

По аналогии с [14] находим

$$(a_\alpha\,(x)\,u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} - \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\,(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)} = (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \cdots, \qquad \mu_\alpha = O\,(h_\alpha^2), \tag{17}$$

где волнистая черта означает усреднение по формуле (6).

Замечание. В случае простейшего функционала (12) $\varphi\,(x) - \widetilde{f}\,(x) = 0$.

4. Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках

Основная идея метода написания локально-одномерных схем для уравнения (1) состоит в том, что в каждый момент $t_{j^*} \in \omega_\tau$ нужно пользоваться

однородными разностными схемами, соответствующими одномерному параболическому уравнению

$$\mathcal{P}_\alpha u = L_\alpha u - \frac{1}{p} c \frac{\partial u}{\partial t} + f_\alpha = 0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f. \tag{18}$$

Обозначим $\Lambda_\alpha y$ однородную разностную схему, соответствующую оператору $L_\alpha u$. Тогда однородную схему Π_α для (18) можно записать в виде

$$\Pi_\alpha y = \Lambda_\alpha y - \rho y_{\bar{t}_\alpha} + \varphi_\alpha = 0, \qquad \Lambda_\alpha y = \Lambda_\alpha y^{j+\alpha/p}. \tag{19}$$

Будем предполагать, что ρ не зависит от α, т. е. для всех $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ коэффициент ρ вычисляется по одной и той же формуле:

$$\rho = \rho(x, t_{j+1}) = F_p\,[c^*(s, t_{j+1})], \tag{20}$$

где $c^*(s, t)$ определяется формулой (10), а $F_p[\mu(s)] = F_p[\mu(s_1, \ldots, s_p)]$ — линейный неубывающий функционал, введенный в п. 3.

Коэффициенты, входящие в Λ_α, а также φ_α будем вычислять при помощи одномерных функционалов $A[\mu(s)]$ и линейного функционала $F_1[\mu(s)]$ $(-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5)$, использованных в [14] $(F_1[1] = 1,\ F_1[s] = 0,\ F_1[\eta_0^{(\sigma)}(s)] = \frac{1}{2},\ F_1[\pi_0(s)] = 0,\ \sigma = 1, 2)$. Эти функционалы действуют на соответствующие функции, предварительно усредненные по переменным x_β, $\beta \neq \alpha$, $\beta = 1, \ldots, p$ согласно (15). Будем обозначать эти средние значения $\tilde{k}_\alpha(x + s_\alpha h_\alpha, t, u)$, $\tilde{r}_\alpha(x + s_\alpha h_\alpha, t, u)$, $\tilde{f}_\alpha(x + s_\alpha h_\alpha, t, u)$, опуская верхний индекс (α); тогда

$$\left.\begin{aligned} a_\alpha(x, t, u) &= A\,[\tilde{k}_\alpha(x + s_\alpha h_\alpha, t, u)], \\ b_\alpha^-(x, t, u) &= F_1\,[\tilde{r}_\alpha(x + s_\alpha h_\alpha, t, u)\,\eta_0^{(1)}(s_\alpha)], \\ b_\alpha^+(x, t, u) &= F_1\,[\tilde{r}_\alpha(x + s_\alpha h_\alpha, t, u)\,\eta_0^{(2)}(s_\alpha)], \\ \varphi_\alpha(x, t, u) &= [\varphi_\alpha^- h_\alpha + \varphi_\alpha^+ h_{\alpha+}]/\hbar_\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где $\varphi_\alpha^\pm(x, t, u)$ выражаются по тем же формулам, что и $b_\alpha^\pm(x, t, u)$.

Рассмотрим сначала задачу I_1. В этом случае

$$\begin{gathered} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + b_\alpha^+(x, t, \check{y})\, y_{\hat{x}_\alpha} + b_\alpha^-(x, t, \check{y})\, y_{\check{x}_\alpha}, \\ \varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t, \check{y}), \end{gathered} \tag{22_1}$$

где $y = y^{j+\alpha/p}$, $\check{y} = y^{j+(\alpha-1)/p}$. В [10] указывалось, что коэффициенты, входящие в (22_1), можно брать в любой момент времени $t \in [t_j, t_{j+1}]$. При этом получаются схемы, эквивалентные по порядку точности. Для упрощения редакции в дальнейшем будем в (22_1) полагать $t = t_{j+1}$. Оказывается, что при этом, вообще говоря, ослабляются требования гладкости по t, предъявляемые к коэффициентам дифференциального уравнения.

Схемы Π_α для различных уравнений 1_k, $k = 1, 2, 3$, отличаются лишь выражениями для $\Lambda_\alpha y$ и φ_α. Поэтому мы напишем эти выражения для уравнений 1_2 и 1_3. Для квазилинейного уравнения (1_2) будем пользоваться однородной схемой

$$\begin{gathered} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t, (y^*)^{(\beta)})\, y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + b_\alpha^+(x, t, \check{y})\, y_{\hat{x}_\alpha} + b_\alpha^-(x, t, \check{y})\, y_{\check{x}_\alpha}, \\ \varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t, \check{y}), \end{gathered} \tag{22_2}$$

где $(y^*)^{(\beta)} = \beta y^* + (1-\beta)\check{y}^*$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $y^* = 0.5\,(y + y^{(-1_\alpha)})$, $t = t_{j+1}$. Наряду со схемами (22_1), (22_2), теоретический и практический интерес представляют схемы

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + b^+_{\alpha-1}(x, t, \check{y})\, \check{y}_{\hat{x}_{\alpha-1}} + b^-_{\alpha-1}(x, t, \check{y})\, \check{y}_{\check{x}_{\alpha-1}}, \qquad (22_{1'})$$

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t, \check{y}),$$

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t, \check{y}^*)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + b^+_{\alpha-1}(x, t, \check{y})\, \check{y}_{\hat{x}_{\alpha-1}} + b^-_{\alpha-1}(x, t, \check{y})\, \check{y}_{\check{x}_{\alpha-1}}, \qquad (22_{2'})$$

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t, \check{y}),$$

причем $b^\pm_{\alpha-1} = b^\pm_p(x, t_j, y^j)$, $\check{y}_{x_{\alpha-1}} = y^j_{x_p}$ при $\alpha = 1$. Эти схемы соответствуют другому способу разбиения оператора $L = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} L_\alpha$:

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L'_\alpha u, \qquad L'_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_{\alpha-1}(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha-1}}$$

при $\alpha > 1$,

$$L'_1 u = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + r_p(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_p} \quad \text{при } \alpha = 1.$$

Коэффициенты $a^\pm_\alpha$ и ρ удовлетворяют условиям

$$a_\alpha \geqslant c_1 > 0, \qquad \rho \geqslant c_2 > 0, \qquad (23)$$

а r_α (и $b^\pm_\alpha$) может иметь любой знак. Поэтому при решении, например, уравнений (22_1), (22_2) относительно y методом прогонки [21], вообще говоря, требуется, чтобы шаг $h_\alpha \leqslant h_0$ был достаточно мал, причем h_0 зависит от $\max(|b^\pm_\alpha| / a_\alpha)$ (см. [16]). Разностные схемы $(22_{1'})$, $(22_{2'})$ не обладают этим недостатком.

Мы не приводим схему для (1_0), так как она следует из (22_1) в случае $r_\alpha = r_\alpha(x, t)$, $f = f(x,t) - qu$. Уравнение (1_0) мы привели в п. 1 для того, чтобы установить связь с работой [10].

Перейдем к формулировке краевых условий. На сетке $\omega^{(1)}_h$, по аналогии с [10], краевые условия ставятся путем сноса $u|_\Gamma$ на γ_α при помощи линейный интерполяции, что дает для $y = y^{j+\alpha/p}$

$$y = \beta^-_\alpha y^{(+1_\alpha)} + (1 - \beta^-_\alpha)\, u_1(x^{(-\alpha)}_л, t_{j+1}), \qquad x \in \gamma^-_\alpha;$$

$$y = \beta^+_\alpha y^{(+1_\alpha)} + (1 - \beta^+_\alpha)\, u_1(x^{(+\alpha)}_п, t_{j+1}), \qquad x \in \gamma^+_\alpha, \qquad (24)$$

где $x^{(-\alpha)}_л$ — ближайшая к $x^{(-\alpha)} \in \gamma^-_\alpha$ точка границы Γ, $x^{(+\alpha)}_п \in \Gamma$ — ближайшая к $x^{(+\alpha)} \in \gamma^+_\alpha$ (точки $x^{(-\alpha)}_л$, $x^{(+\alpha)}_п$ и $x^{(\pm\alpha)}$ лежат на прямой $\mathscr{L}_\alpha$), $\beta^\pm_\alpha = \varkappa^\pm_\alpha/(1 + \varkappa^\pm_\alpha)$, $\varkappa^-_\alpha h_{\alpha+}$ — расстояние между $x^{(-\alpha)}_л$ и $x^{(-\alpha)}$, $\varkappa^+_\alpha h_\alpha$ — расстояние между $x^{(+\alpha)}_п$ и $x^{(+\alpha)}$; $0 \leqslant \beta^\pm_\alpha < 1$. Будем рассматривать только такие сетки $\omega^{(1)}_h$, для которых $\beta^\pm_\alpha \leqslant \beta^* < 1$, где β^* — постоянная*. В остальном $\omega^{(1)}_h$ произвольная неравномерная сетка. На сетке $\omega^{(2)}_h$ краевые условия имеют вид

$$y^{j+\alpha/p} = u_1(x^{(\pm\alpha)}, t_{j+1}) \quad \text{при } x = x^{(\pm\alpha)} \in \gamma^\pm_\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots, p, \qquad (25)$$

что формально соответствует случаю $\beta^\pm_\alpha = 0$. Поэтому в дальнейшем будем писать граничные условия всегда в форме (24) и при переходе к сетке $\omega^{(2)}_h$ полагать $\beta^\pm_\alpha = 0$.

* В дальнейшем всюду предполагается, что это условие выполнено.

Из (24) и (25) видно, что граничные значения $u_1 = u|_\Gamma$ для всех $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ берутся в момент $t = t_{j+1}$. Это не ограничивает общности нашего исследования, так как если брать $u|_\Gamma$ в любой момент $t \in [t_j, t_{j+1}]$, то мы получим схемы, эквивалентные по порядку точности.

Таким образом, задаче I_k $(k = 1, 2)$ мы ставим в соответствие следующую разностную задачу II_k:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_\alpha y - \rho y_{\bar{t}_\alpha} + \varphi_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad (x, t) \in \Omega, \\ &y = \beta_\alpha^\pm y^{(\mp 1_\alpha)} + (1 - \beta_\alpha^\pm)\, u_1^{j+1} \quad \text{при } x \in \gamma_\alpha^\pm, \\ &y(x, 0) = u_0(x) \qquad \text{при } x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

где Λ_α определяется формулами (22_1) и (22_2). В зависимости от вида Λ_α получаем задачи (схемы) II_1 и II_2, соответствующие задачам I_1 и I_2. Если Λ_α, φ_α определяются формулами $(22_{1'})$ или $(22_{2'})$, то получаем схему $\mathrm{II}_{1'}$ или $\mathrm{II}_{2'}$.

Задаче I_3 ставим в соответствие схему II_3, для которой

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t, \check{y}^*)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \\ &\varphi_\alpha = \delta_{\alpha, p}\, \varphi(x, t, \check{y}, y_{\overset{\circ}{x}_1}^{j+1/p}, \ldots, y_{\overset{\circ}{x}_p}^{j+1}), \\ &\delta_{\alpha, p} = \begin{cases} 1, & \alpha = p \\ 0, & \alpha \neq p \end{cases}, \qquad t = t_{j+1}. \end{aligned}\right\} \tag{22_3}$$

Схемы $\mathrm{II}_{1'}$, $\mathrm{II}_{2'}$ и II_3 мы будем рассматривать только на произвольных неравномерных сетках $\omega_h^{(1)}$ и нормальных сетках $\overset{*}{\omega}_\tau$.

Локально-одномерная схема II, очевидно, однородна (для каждого α по пространству и циклически однородна по времени (с периодом p).

Замечание. Разбиение f на сумму $f = \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha$ проводится из соображений удобства счета. Можно полагать, например, $f_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, $f_p = f$ и, соответственно, $\varphi_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ldots, p-1$, $\varphi_p = \varphi$.

5. Погрешность аппроксимации

Пусть $u = u(x, t)$ — решение задачи I, а $y = y(x, t)$ — решение разностной задачи II. Рассмотрим их разность, характеризующую точность схемы II, полагая $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+1}$ при $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, $z^j = y^j - u^j$. Для сеточной функции $z = z(x, t)$ мы получим следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} &\rho z_{\bar{t}_\alpha} = (a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + Q_\alpha(z) + \Psi_\alpha, \\ &z = \beta_\alpha^\pm (z^{(\mp 1_\alpha)} + \nu_\alpha^\pm) \quad \text{при } x \in \gamma_\alpha^\pm, \\ &z(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

где $a_\alpha = a_\alpha(x, t_{j+1})$ для схемы II_1, $a_\alpha = a_\alpha(x, t_{j+1}, (y^*)^{(\beta)})$ для схемы II_2, а $Q_\alpha(z)$ — выражение, содержащее младшие члены $(z, z_{\hat{x}_\alpha}, z_{\check{x}_\alpha}$ и др.) и являющееся частным случаем выражения

$$\begin{aligned} Q_\alpha(z) = (g_{\alpha 1}^+ z)_{\hat{x}_\alpha} + (g_{\alpha 1}^- z)_{\check{x}_\alpha} + (g_{\alpha 2}^+ \check{z})_{\hat{x}_\alpha} + (g_{\alpha 2}^- \check{z})_{\check{x}_\alpha} + b_\alpha^+ \hat{z}_{\hat{x}_\alpha} + \\ + b_\alpha^- z_{\check{x}_\alpha} + d_{\alpha 1} z + d_{\alpha 2} \check{z}. \end{aligned} \tag{26}$$

Мы не будем выписывать выражения для коэффициентов. Отметим лишь, что в случае схемы II_1 следует положить $g^{\pm}_{\alpha m} = 0$, $d_{\alpha 1} = 0$, $m = 1, 2$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. В силу сделанных в п. 1 и п. 3, 4 предположений,

$$a_\alpha \geqslant c_1 > 0, \quad \rho \geqslant c_2 > 0, \quad |d_{\alpha m}| \leqslant c_3, \quad |b^{\pm}_\alpha| \leqslant c_4, \quad |g^{\pm}_{\alpha m}| \leqslant c_5, \qquad m = 1, 2,$$

где $c_1, \ldots, c_5$ — положительные постоянные, не зависящие от сетки.

Укажем, что $g^{\pm}_{\alpha 1} = g^{\pm}_{\alpha 1}(x, t_{j+1}, y^*)$, $b^{\pm}_\alpha = b^{\pm}_\alpha(x, t_{i+1}, \check{y})$ зависят от y и потому их нельзя (разностно) дифференцировать ни по x, ни по t. Для локальной погрешности аппроксимации схемы II_2 (и, следовательно II_1) получаем

$$\Psi_\alpha = \Psi^{(1)}_\alpha - \rho(x, t_{j+1})\, u_{\bar{t}} \cdot \delta_{\alpha,1} + \varphi_\alpha, \qquad \delta_{\alpha,1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha \neq 1, \end{cases} \tag{27}$$

$$\Psi^{(1)}_\alpha = (a_\alpha(x, t_{j+1}, (u^*)^{(\beta)})\, u^{j+1}_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + b^+_\alpha(x, t_{j+1}, \bar{u})\, u^{j+1}_{\hat{x}_\alpha} +$$

$$+ b^-_\alpha(x, t_{j+1}, \bar{u})\, u^{j+1}_{\check{x}_\alpha}, \quad \varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t_{j+1}, \bar{u}),$$

где $\bar{u} = u^{j+1}$ при $\alpha > 1$, $\bar{u} = u^j$ при $\alpha = 1$, $(u^*)^{(\beta)} = (u^*)^{j+1}$ при $\alpha > 1$, $(u^*)^{(\beta)} = \beta (u^*)^{j+1} + (1 - \beta)(u^*)^j$ при $\alpha = 1$.

Отсюда видно, что $\Psi^{(1)}_\alpha$ представляет собой погрешность аппроксимации схемы $\Lambda_\alpha y$. Из п. 3, 4 и [14] следует, что

$$\Psi^{(1)}_\alpha = (\widetilde{L_\alpha u})^{j+1} + (\mu^{(1)}_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \delta_{\alpha,1} O(\tau) + \cdots, \qquad \mu^{(1)}_\alpha = O(h^2_\alpha).$$

Замечая также, что

$$\varphi_\alpha = \widetilde{f_\alpha}(x, t_{j+1}, u^{j+1}) + (\mu^{(2)}_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \delta_{\alpha,1} O(\tau) + \cdots, \qquad \mu^{(2)}_\alpha = O(h^2_\alpha),$$

$$\rho = \widetilde{c}(x, t_{j+1}) + \sum_{\alpha=1}^{p} (\mu^{(3)}_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \cdots, \qquad \mu^{(3)}_\alpha = O(h^2_\alpha),$$

убеждаемся в справедливости формул

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha, \qquad \mathring{\psi}_\alpha = \overset{*}{\mathcal{P}}_\alpha u = \left(\widetilde{L_\alpha u} - \delta_{\alpha,1}\, c \frac{\widetilde{\partial u}}{\partial t} + \widetilde{f_\alpha}\right)^{j+1}, \\ &\psi_\alpha = (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \overset{*}{\psi}_\alpha + \delta_{\alpha,1} \sum_{k=1}^{p} [(\mu^*_k)_{\hat{x}_k} + \overset{**}{\psi}_k], \quad \delta_{\alpha,1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha \neq 1, \end{cases} \\ &\mu_\alpha = O(h^2_\alpha), \quad \overset{*}{\mu}_\alpha = O(h^2_\alpha), \quad \overset{**}{\psi}_\alpha = O(\hbar^2_\alpha) + O(\tau), \quad \overset{*}{\psi}_\alpha = O(\hbar^2_\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Отсюда видно, что главная часть $\mathring{\psi}_\alpha$ погрешности аппроксимации удовлетворяет условию

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0. \tag{29}$$

При этом мы предполагаем, что выполнены условия А, при которых Λ_α, φ_α, ρ на равномерной сетке в классе непрерывных коэффициентов имеют максимальный порядок аппроксимации

$$\Psi^{(1)}_\alpha = L_\alpha u + O(h^2), \qquad \rho = c + O(h^2), \qquad \varphi_\alpha = f_\alpha + O(h^2_\alpha).$$

Если узел $x \in \omega_h$ лежит на гиперплоскости разрыва k_α, c и f, перпен-

дикулярной к Ox_α, и условия А выполнены слева и справа от этой гиперплоскости, то формулы (28) для Ψ_α сохраняют силу.

Погрешность аппроксимации $\Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \Psi_\alpha$ локально-одномерной схемы $\Pi = \{\Pi_\alpha\}$ имеет вид

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \Psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{p} [(\bar{\mu}_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \bar{\psi}_\alpha], \qquad \bar{\mu}_\alpha = \mu_\alpha + \mu_\alpha^* = O(h_\alpha^2),$$
$$\bar{\psi}_\alpha = O(\hbar_\alpha^2) + O(\tau). \tag{30}$$

При доказательстве сходимости локально-одномерной схемы на последовательности неравномерных сеток мы должны преодолеть две трудности: 1) отсутствие аппроксимации в любой момент $t = t_{j+\alpha/p}$, $\mathring{\psi}_\alpha = O(1)$, 2) понижение порядка локальной аппроксимации по пространству, связанное с неравномерностью сеток ω_h.

Для погрешности z задачи II_3 получаем также задачу III_3, где $Q_\alpha(z)$ есть выражение, определяемое формулой (3_3) из § 2. Погрешность аппроксимации Ψ_α схемы II_3 можно представить формулами (4) и (5) из § 2, причем получаем

$$\mathring{\psi}_\alpha = \left[\widetilde{L_\alpha u} - \delta_{\alpha,1}\, \widetilde{c\frac{\partial u}{\partial t}} + \delta_{\alpha,p}\tilde{f}\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_p}\right)\right]^{j+1}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0,$$
$$\mu_{\alpha\beta} = \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} + \mu_\beta^* \delta_{\alpha_1} + \mu_\beta^{**} \delta_{\alpha p}, \qquad \mu_\alpha = O(h_\alpha^2),$$
$$\mu_\beta^* = O(h_\beta^2), \qquad \mu_\beta^{**} = O(h_\beta^2).$$

Формула (28) для ψ_α является также частным случаем (2.5) при

$$\mu_{\alpha\beta} = \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta} + \mu_\beta^* \delta_{\alpha 1}, \qquad \mu_\alpha = O(h_\alpha^2), \qquad \mu_\beta^* = O(h_\beta^2).$$

Вычисления показывают, что (2.4) и (2.5) верны и для задач $\mathrm{III}_{1'}$, $\mathrm{III}_{2'}$, соответствующих схемам $\mathrm{II}_{1'}$, $\mathrm{II}_{2'}$. Выражения для $Q_\alpha^{(1')}$ и $Q_\alpha^{(2')}$ даны в § 2, п. 1.

Фактически в § 2 мы рассматриваем задачи III_k, $k = 1, 2, 3, 1', 2'$ более общие, чем задачи, которые получаются для погрешности $z = y - u$ схемы II_k. Это позволяет использовать априорные оценки § 2 для оценки точности не только исходных схем, определенных выше, но и более широкого класса схем.

§ 2. Априорные оценки

1. Постановка задачи

При изучении вопроса о погрешности схем II_k, $k = 1, 2, 3, 1', 2'$, мы получили в § 1 для сеточной функции z во всех случаях линейные уравнения, различающиеся между собой только младшими членами $Q_\alpha(z)$. Поэтому естественно формулировать общую задачу и исследовать частные случаи, соответствующие конкретным схемам. Мы будем рассматривать для $z = z(x, t)$, заданной на $\bar{\Omega}$, следующую задачу:

$$\rho z_{\bar{t}_\alpha} - \Lambda_\alpha^0 z + d_\alpha z = Q_\alpha(z) + \Psi_\alpha, \qquad \Lambda_\alpha^0 z = (a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}, \qquad \alpha = 1, \ldots, p, \tag{1}$$

$$z = \beta_\alpha^\pm (z^{(\mp 1_\alpha)} + \nu_\alpha^\pm), \quad x \in \gamma_\alpha^\pm; \qquad z(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{2}$$

где $Q_\alpha(z)$ — одно из выражений:

$$Q_\alpha^{(1)}(z) = b_\alpha^+ z_{\hat{x}_\alpha} + b_\alpha^- z_{\check{x}_\alpha} + d_{\alpha 2} \check{z}, \tag{3_1}$$

$$Q_\alpha^{(2)}(z) = Q_\alpha^{(1)}(z) + Q_\alpha^*(z), \qquad Q_\alpha^*(z) = (g_{\alpha 1}^+ z)_{\hat{x}_\alpha} + (g_{\alpha 1}^- z)_{\check{x}_\alpha} + \tag{3_2}$$
$$+ (g_{\alpha 2}^+ \check{z})_{\hat{x}_\alpha} + (g_{\alpha 2}^- \check{z})_{\check{x}_\alpha},$$

$$\left.\begin{aligned} Q_\alpha^{(3)}(z) &= Q_\alpha^{**}(z) + d_{\alpha 2} \check{z} + \delta_{\alpha, p} \sum_{\alpha=1}^{p} (b_\alpha^+ z_{\hat{x}_\alpha}^{j+\alpha/p} + b_\alpha^- z_{\check{x}_\alpha}^{j+\alpha/p}), \\ Q_\alpha^{**}(z) &= (g_{\alpha 2}^+ \check{z})_{\hat{x}_\alpha} + (g_{\alpha 2}^- \check{z})_{\check{x}_\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{3_3}$$

$$Q_\alpha^{(1')}(z) = b_{\alpha-1}^+ \check{z}_{\hat{x}_{\alpha-1}} + b_{\alpha-1}^- \check{z}_{\check{x}_{\alpha-1}} + d_{\alpha 2} \check{z} \quad \text{при } \alpha > 1,$$

$$Q_1^{(1')}(z) = (b_p^+ z_{\hat{x}_p} + b_p^- z_{\check{x}_p})^j + d_{p2} z^j, \tag{$3_{1'}$}$$

$$Q_\alpha^{(2')}(z) = Q_\alpha^{(1')}(z) + Q_\alpha^{**}(z). \tag{$3_{2'}$}$$

Сеточная функция Ψ_α дается выражениями

$$\Psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha, \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0, \qquad \mathring{\psi}_\alpha = O(1), \tag{4}$$

$$\psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} [(\mu_{\alpha\beta})_{\hat{x}_\beta} + \overset{*}{\psi}_{\alpha\beta}], \qquad \mu_{\alpha\beta} = O(h_\beta^2), \qquad \overset{*}{\psi}_{\alpha\beta} = O(\hbar_\beta^2) + O(\tau). \tag{5}$$

Будем предполагать, что выполнены условия

$$a_\alpha \geqslant c_1 > 0, \qquad \rho \geqslant c_2 > 0, \qquad |d_{\alpha 2}| \leqslant c_3, \qquad |b_{\alpha k}^\pm| \leqslant c_4,$$
$$|g_{\alpha k}^\pm| \leqslant c_5, \qquad |\rho_{\bar{t}}| \leqslant c_6, \quad k = 1, 2, \tag{6}$$

$$d_\alpha \geqslant M^* \text{ при } \tau < \tau_0, \text{ если } g_{\alpha k}^\pm = 0, \tag{7}$$

$$d_\alpha \geqslant M^* 2^n \text{ при } \tau < \tau_0/2^n, \text{ если } g_{\alpha k}^\pm \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{7'}$$

где $c_1, \ldots, c_6$ — положительные постоянные, не зависящие от сетки, M^* — произвольная положительная постоянная, а $\tau_0 > 0$ — постоянная, зависящая от $c_1, \ldots, c_5$ и M^*. Поясним условия (7) и (7′). При выводе энергетических тождеств, которые используются нами для получения нужных априорных оценок, сначала проводится преобразование (см. [14])

$$z = v \cdot w, \tag{8}$$

где w — сеточная функция, определяемая условиями

$$w_{\bar{t}_\alpha} = \overline{M} \check{w} \quad \text{или} \quad w^{j+\alpha/p} = (1 + \overline{M}\tau)\, w^{j+(\alpha-1)/p}, \qquad w(x, 0) = 1, \tag{8'}$$

а $\overline{M}$ — произвольная положительная постоянная, которая выбирается так, чтобы выполнялись условия (7) и (7′), причем M^* и τ_0 являются за-

данными постоянными, зависящими только от $c_1, \ldots, c_5$. Если $g_{\alpha k}^{\pm} \neq 0$, то полагаем $\overline{M} = \overline{M}_0 \cdot 2^n$, где $\overline{M}_0$ — произвольная положительная постоянная, а целое число n есть ранг энергетического тождества.

Отметим сразу же, что для w на произвольной неравномерной сетке ω_τ справедлива оценка

$$1 < w^{j+\alpha/p} \leqslant e^{p\overline{M}t_{j+1}}, \tag{9}$$

так как $w^{j+\alpha/p} \leqslant e^{\overline{M}\tau_{j+1}} w^{j+(\alpha-1)/p}$, $\quad w^j \leqslant e^{\overline{M}p\tau_j} w^{j-1}$. Чтобы упростить изложение, будем предполагать, что преобразование (8) уже выполнено, и сохраним для искомой функции прежнее обозначение z (т. е. заменим v на z).

Задачу, определяемую условиями (1), (2), (3_k), (4) — (7), где $k = 1, 2, 3, 1', 2'$, будем называть задачей III_k или III_k°, если $\nu_\alpha^{\pm} = 0$.

Основное внимание мы уделим выводу априорных оценок для задач III_1 и III_2. Для задачи III_2 на сетке $\Omega^{(1)}$ будем всегда предполагать выполненными условия

$$g_{\alpha 2}^{\pm} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{10}$$

Отметим, что схема III_1 совпадает на равномерной сетке $\Omega^{(1)}$ со схемой, рассмотренной в [10]. Для нее справедлив принцип максимума и априорная оценка вида

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant M \left(\| \nu(x, t) \|_{0,s} + \| \overline{\Psi(x, t)} \|_0 \right), \qquad t \in \omega_\tau,$$

$$\| \nu(x, t) \|_{0,s} = \max_{0<t'\leqslant t,\ \alpha=1,\ldots,p} \| \nu(x, t') \|_{0,\gamma_\alpha}, \qquad \| \nu(x, t) \|_{0,\gamma_\alpha} =$$

$$= \max_{x\in\gamma_\alpha=\gamma_\alpha^+ + \gamma_\alpha^-} | \nu_\alpha^{\pm}(x, t) |, \tag{11}$$

$$\overline{\| \Psi(x, t_{j+1}) \|_0} = \left(\sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} \| \Psi(x, t_{j'}) \|_0^2 \right)^{1/2}, \qquad \| \Psi \|_0 = \max_{x\in\omega_h,\ \alpha=1,\ldots,p} | \Psi_\alpha(x, t) |.$$

Для оценки порядка точности на неравномерной сетке оценка $\| z \|_0$ через $\| \Psi \|_0$ является слишком грубой. Ниже будут найдены оценки $\| z \|_0$ через аналог одномерной нормы $\| \Psi \|_3$, использованной в [14], которые позволяют показать, что схема II_1 имеет такой же порядок точности, что и в случае равномерной сетки. Метод интегральных или энергетических неравенств, излагаемый ниже, является естественным развитием метода, применявшегося нами ранее (см. [14] — [17]) для одномерных задач. Сравнительно просто получаются оценки «в среднем» для всех задач III_k, $k = 1, 2, 3, 1', 2'$. Однако поскольку для практики весьма желательны равномерные оценки точности численных алгоритмов, то значительное внимание уделяется выводу равномерных оценок, прежде всего для задачи III_1, соответствующей схеме II_1 для квазилинейного уравнения (1.1_1). В [14] для получения равномерных оценок успешно использовались оценки в среднем. В многомерном случае, к сожалению, этот метод неприменим. Поэтому равномерные оценки решения задачи III_2 грубее соответствующих оценок, полученных в [14] для одномерной задачи ($p = 1$) (ср. [17]).

Наряду с задачами III_k мы будем рассматривать эталонные задачи IV_k, которые отличаются от III_k лишь выражением для

$$\psi_\alpha = (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \overset{*}{\psi}_\alpha. \tag{12}$$

Ниже будет показано, что оценка решения задачи III_k сводится к оценке решения эталонной задачи IV_k^* (см. п. 5).

2. Энергетические неравенства на цепочке $Ц_\alpha$

При выводе энергетических неравенств мы будем пользоваться следующим методическим приемом. Рассматривается произвольная цепочка $Ц_\alpha$ фиксированного направления x_α, на которой для $t = t_{j+\alpha/p}$ пишется энергетическое тождество n-го ранга. Используя мажорантные оценки [14], получаем энергетические неравенства, которые затем суммируем с весом

$$H_\alpha = \prod_{k\neq\alpha}^{1-p} \hbar_k \tag{13}$$

по всем цепочкам $Ц_\alpha$ при фиксированном α. В результате получим неравенства на сетке ω_h.

Итак, рассмотрим произвольную цепочку $Ц_\alpha$ с граничными точками $x^{(-\alpha)} \in \gamma_\alpha^-$ и $x^{(+\alpha)} \in \gamma_\alpha^+$. Обозначим u_α множество внутренних узлов этой цепочки, $u_\alpha^+ = u_\alpha + x^{(+\alpha)}$, $u_\alpha^- = u_\alpha + x^{(-\alpha)}$, $\bar{u}_\alpha = u_\alpha + x^{(+\alpha)} + x^{(-\alpha)}$.

Пусть v и z — некоторые сеточные функции, заданные на $\bar{\omega}_h$. Введем скалярные произведения и нормы:

$$(v, z)^*_{u_\alpha} = \sum_{x\in u_\alpha} vz\hbar_\alpha, \qquad (v, z)_{u_\alpha} = \sum_{x\in u_\alpha} vzh_\alpha, \qquad (v, z)^+_{u_\alpha} = \sum_{x\in u_\alpha} vzh_{\alpha+},$$

$$(v, z]_{u_\alpha} = \sum_{x\in u_\alpha^+} vzh_\alpha, \qquad [v, z)_{u_\alpha} = \sum_{x\in u_\alpha^-} vzh_{\alpha+}, \tag{14}$$

$$\|v\|_{2\alpha,1} = (v, v)^{*1/2}_{u_\alpha}, \qquad \|z_{\bar{x}_\alpha}\|_{2\alpha,1} = (1, z^2_{\bar{x}_\alpha}]^{1/2}_{u_\alpha}.$$

Рассмотрим разностный оператор $\Lambda_\alpha^0 z = (a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}$. Первая разностная формула Грина, очевидно, будет иметь вид

$$(\Lambda_\alpha^0 z, z)^*_{u_\alpha} = -(a_\alpha, z^2_{\bar{x}_\alpha}]_{u_\alpha} + a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha} z\big|_{x=x^{(+\alpha)}} - a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha} z\big|_{x=x^{(-\alpha)}}. \tag{15}$$

Если $z = 0$ при $x = x^{(\pm\alpha)}$, то подстановка обратится в нуль. Пусть z удовлетворяет однородному граничному условию

$$z = \beta_\alpha^\pm z^{(\mp 1_\alpha)} \text{ при } x = x^{(\pm\alpha)}. \tag{16}$$

Учитывая, что $z^{(+1_\alpha)} = z + h_{\alpha+} z_{x_\alpha}$, $z^{(-1_\alpha)} = z - h_\alpha z_{\bar{x}_\alpha}$, получим из (16)

$$(\Lambda_\alpha^0 z, z)^*_{u_\alpha} = -I^{(\alpha)}_{1,1}, \qquad I^{(\alpha)}_{1,1} = (a_\alpha, z^2_{\bar{x}_\alpha}]_{u_\alpha} + \tag{17}$$
$$+ h_{\alpha+}\varkappa_\alpha^- a_\alpha^{(+1_\alpha)} z^2_{x_\alpha}\big|_{x=x^{(-\alpha)}} + h_\alpha \varkappa_\alpha^+ a_\alpha z^2_{\bar{x}_\alpha}\big|_{x=x^{(+\alpha)}}.$$

Мы будем, как обычно, пользоваться в дальнейшем, помимо разностной

формулы Грина, неравенством Гёльдера и элементарными неравенствами

$$\prod_{k=1}^{m} x_k^{\mu_k} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \mu_k x_k, \qquad x_k \geqslant 0, \qquad \mu_k \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{m} \mu_k = 1, \tag{18}$$

$$|ab| \leqslant \frac{c_0}{2} a^2 + \frac{1}{2c_0} b^2 \quad (c_0 > 0 \text{ — произвольная постоянная}). \tag{19}$$

Положительные постоянные, зависящие от $c_1, \ldots, c_6$ и от диаметра области G и не зависящие от сетки, будем обозначать M, не приводя, как правило, выражения для них.

Нетрудно убедиться в том, что справедлива

Лемма 1. *Если z удовлетворяет условию*

$$z = \beta_\alpha^{\pm} (z^{(\mp 1_\alpha)} + \nu_\alpha^{\pm}), \qquad x = x^{(\pm\alpha)} \in \gamma_\alpha^{\pm}, \qquad 0 \leqslant \beta_\alpha^{\pm} \leqslant \beta^* < 1 \tag{20}$$

(β^* — *постоянная, не зависящая от сетки*), *то справедливы оценки*

$$\|z\|_{0,u_\alpha}^2 = \max_{x \in \bar{u}_\alpha} |z|^2 \leqslant M_0 (a_\alpha, z_{\bar{x}_\alpha}^2]_{u_\alpha} + M_0' |\bar{\nu}_\alpha|^2, \tag{21}$$

$$\|\overset{n}{z}\|_{0,u_\alpha} \leqslant M_1 (a_\alpha, \left(\overset{n-1}{z}_{\bar{x}_\alpha}\right)^2]_{u_\alpha} + (M_1' 2^n |\bar{\nu}_\alpha|)^{2^n}, \tag{22}$$

где $\overset{n}{z} = z^{2^n}$, M_0, M_0', M_1, M_1' — *положительные постоянные, зависящие от* c_1, β^* *и длины* l_α *цепочки* $Ц_\alpha$, $|\bar{\nu}_\alpha|$ — *любая из величин* $|\nu_\alpha^{\pm}|$.

Из условия (20) следует $|z| \leqslant \beta^* |z^{(+1_\alpha)}| + \beta^* |\nu_\alpha^-|$ $(x \in \gamma_\alpha^-)$. Неравенство $|z^{(+1_\alpha)}| \leqslant |z(x^{(-\alpha)}, t)| + h_{\alpha+}^{1/2} c_1^{-1/2} I^{1/2}$ дает $|z^{(+1_\alpha)}| \leqslant \beta^* (1 - \beta^*)^{-1} |\nu_\alpha^-| + h_{\alpha+}^{1/2} c_1^{-1/2} (1 - \beta^*)^{-1} I^{1/2}$ и $|z(x^{(-\alpha)}, t)| \leqslant (\beta^*)^2 (1 - \beta^*)^{-1} |\nu_\alpha^-| + h_{\alpha+}^{1/2} \beta^* c_1^{-1/2} \times (1 - \beta^*)^{-1} I^{1/2}$, где $I = (a_\alpha, z_{\bar{x}_\alpha}^2]_{u_\alpha}$. Отсюда и из неравенства $\|z\|_{0,u_\alpha} \leqslant |z(x^{(-\alpha)}, t)| + l_\alpha^{1/2} c_1^{-1/2} I^{1/2}$ следует (21). На сетке $\omega_h^{(2)}$ $\beta_\alpha^{\pm} = 0$ и

$$\|z\|_{0,u_\alpha} \leqslant M (a_\alpha, z_{\bar{x}_\alpha}^2]_{u_\alpha}^{1/2}, \qquad \|\overset{n}{z}\|_{0,u_\alpha} \leqslant M (a_\alpha, \left(\overset{n-1}{z}_{\bar{x}_\alpha}\right)^2]_{u_\alpha}. \tag{23}$$

По аналогии с [14] напишем сразу энергетическое тождество n-го ранга на цепочке $Ц_\alpha$:

$$((\rho, \overset{n}{z})_{u_\alpha}^*)_{\bar{t}_\alpha} + 2I_{n,1}^{(\alpha)} + P_{n,1}^{(\alpha)} + 2[d_\alpha, \overset{n}{z}]_{u_\alpha} = 2^n (Q_\alpha(z) + \Psi_\alpha, z^{\sigma_n})_{u_\alpha}^* + (\rho_{\bar{t}_\alpha}, \overset{n}{z})_{u_\alpha}^* + R_{n,1}^{(\alpha)}, \tag{24}$$

$$I_{n,1}^{(\alpha)} = (a_\alpha, \left(\overset{n-1}{z}_{\bar{x}_\alpha}\right)^2]_{u_\alpha} + \sum_{k=0}^{n-2} 2^{n-k-2} \{(a_\alpha \left(\overset{k}{z}_{\bar{x}_\alpha}\right)^2, z^{\sigma_{n-\sigma_{k+1}}}]_{u_\alpha} + [a_\alpha^{(+1_\alpha)} \left(\overset{k}{z}_{x_\alpha}\right)^2, z^{\sigma_{n-\sigma_{k+1}}})_{u_\alpha}^+\}, \tag{25}$$

$$P_{n,1}^{(\alpha)} = \tau \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} (\rho \left(\overset{k}{z}_{\bar{t}_\alpha}\right)^2, z^{\sigma_{n-\sigma_{k+1}}})_{u_\alpha}^*, \qquad \sigma_k = 2^k - 1, \tag{26}$$

$$R_{n,1}^{(\alpha)} = 2^n \{\nu_\alpha^+ a_\alpha z^{\sigma_n} h_\alpha^{-1}|_{x=x^{(+\alpha)}} - \nu_\alpha^- a_\alpha^{(+1_\alpha)} z^{\sigma_n} h_{\alpha+}^{-1}|_{x=x^{(-\alpha)}}\}, \tag{27}$$

$$[d_\alpha, \overset{n}{z}]_{u_\alpha} = (d_\alpha, \overset{n}{z})_{u_\alpha}^* + a_\alpha \overset{n}{z} (\varkappa_\alpha^+ h_\alpha)^{-1}|_{x=x^{(+\alpha)}} + a_\alpha^{(+1_\alpha)} \overset{n}{z} (\varkappa_\alpha^- h_{\alpha+})^{-1}|_{x=x^{(-\alpha)}}\}, \tag{28}$$

При выводе тождества (24) краевые условия (2) мы записали в форме условий III рода

$$z_{x_\alpha} = z/\varkappa_\alpha^- h_{\alpha+} - \nu_\alpha^-/h_{\alpha+} \text{ при } x = x^{(-\alpha)}; \quad -z_{\bar{x}_\alpha} = z/\varkappa_\alpha^+ h_\alpha - \nu_\alpha^+/h_\alpha \text{ при } x = x^{(+\alpha)}$$

и воспользовались выражением для

$$\overset{n}{z}_{x_\alpha} = 2^n z^{\sigma_n} z_{x_\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} h_{\alpha+} (\overset{k}{z}_{x_\alpha})^2 z^{\sigma_n - \sigma_{k+1}} \tag{29}$$

и аналогичным выражением для $\overset{n}{z}_{\bar{x}_\alpha}$. Следует иметь в виду, что $\overset{n}{z}(\varkappa_\alpha h_\alpha)^{-1} = 0$, если $\varkappa_\alpha = 0$. На сетке $\omega_h^{(2)}$ $[d_\alpha, \overset{n}{z}]_{u_\alpha} = (d_\alpha, \overset{n}{z})^*_{u_\alpha}$ и $R_{n,1}^{(\alpha)} = 0$, если $z|_{\gamma_\alpha} = 0$. Если $z = \nu_\alpha^\pm$ при $x \in \gamma_\alpha^\pm$, то $[d_n, \overset{n}{z}]_{u_\alpha} = (d_\alpha, \overset{n}{z})^*_{u_\alpha}$, а для $R_{n,1}^{(\alpha)}$ верна формула (27).

Предположим теперь, что $\nu_\alpha^\pm = 0$, т. е. рассмотрим задачу III°. Полагая в (24) $n = 1$, получим тождество первого ранга, которое, согласно (17), можно записать в виде

$$((\rho, z^2)^*_{u_\alpha})_{\bar{t}_\alpha} + 2I_{1,1}^{(\alpha)} + P_{1,1}^{(\alpha)} + 2(d_\alpha, z^2)^*_{u_\alpha} = 2(Q_\alpha(z) + \Psi_\alpha, z)^*_{u_\alpha} + (\rho_{\bar{t}_\alpha}, \check{z}^2)^*_{u_\alpha}, \tag{30}$$

$$I_{1,1}^{(\alpha)} = (a_\alpha, z^2_{\bar{x}_\alpha}]_{u_\alpha} + h_\alpha \varkappa_\alpha^+ a_\alpha z^2_{\bar{x}_\alpha}\Big|_{x=x^{(+\alpha)}} + h_{\alpha+} \varkappa_\alpha^- a_\alpha^{(+1_\alpha)} z^2_{x_\alpha}\Big|_{x=x^{(-\alpha)}}, \tag{31}$$

$$P_{1,1}^{(\alpha)} = \tau(\rho, z^2_{\bar{t}_\alpha})^*_{u_\alpha}.$$

Рассмотрим задачу III_2, частным случаем которой при $g_{\alpha k}^\pm = 0$, $k = 1, 2$, является задача III_1. Введем функцию η_α, положив

$$(\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} = \psi_\alpha, \quad \eta_\alpha^{(+1_\alpha)} = 0 \quad \text{при } x = x^{(-\alpha)}, \tag{32}$$

и обозначим

$$\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,1} = \|\eta_\alpha\|_{2_\alpha,1} + |\eta_\alpha(x^{(+\alpha)}, t)| = \|\eta_\alpha\|_{\bar{2}_\alpha,1}, \qquad \|\eta_\alpha\|_{2_\alpha,1} = (1, \eta_\alpha^2]^{1/2}_{u_\alpha}. \tag{33}$$

Лемма 2. *Если z удовлетворяет однородным граничным условиям* (16), *то справедлива оценка*

$$2(\psi_\alpha, z)^*_{u_\alpha} \leqslant \tfrac{1}{8} I_{1,1}^{(\alpha)} + M\|\psi_\alpha\|^2_{4_\alpha,1}. \tag{34}$$

В самом деле,

$$2(\psi_\alpha, z)^* = -2(\eta_\alpha, z_{\bar{x}_\alpha}]_{u_\alpha} + 2\eta_\alpha z\Big|_{x=x^{(+\alpha)}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\eta_\alpha\|_{2_\alpha,1}\|z_{\bar{x}_\alpha}\|_{2_\alpha,1} + 2|\eta_\alpha(x^{(+\alpha)}, t)||z(x^{(+\alpha)}, t)|.$$

Пользуясь затем леммой 1, получаем (34).

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$2\,(Q_\alpha^{(1)}(z) + (g_{\alpha 1}^{+} z)_{\hat{x}_\alpha} + (g_{\alpha 1}^{-} z)_{\check{x}_\alpha},\ z)_{u_\alpha}^{*} \leqslant \tfrac{1}{4} I_{1,1}^{(\alpha)} + M\,\|z\|_{2_\alpha,1}^{2} + M'\,(\check{\rho},\ \check{z}^2)_{u_\alpha}^{*}. \tag{35}$$

Лемма 3 доказывается по аналогии с [14]. При этом используются лемма 1, разностная формула Грина и неравенство (19).

Лемма 4. *На сетке* $\omega_h^{(2)}$ *справедлива оценка*

$$2\,((g_{\alpha 2}^{+}\check{z})_{\hat{x}_\alpha} + (g_{\alpha 2}^{-}\check{z})_{\check{x}_\alpha},\ z)_{u_\alpha}^{*} \leqslant \tfrac{1}{8} I_{1,1}^{(\alpha)} + M\,(\check{\rho},\ \check{z}^2)_{u_\alpha}^{*}. \tag{36}$$

Неравенство (36) следует из оценки вида

$$2\,((g_{\alpha 2}^{+}\check{z})_{\hat{x}_\alpha},\ z)_{u_\alpha}^{*} = -\,2\,(g_{\alpha 2}^{+}\check{z},\ z_{\bar{x}_\alpha})_{u_\alpha} \leqslant 2c_5\,\|\check{z}\|_{2_\alpha,1}\,\|z_{\bar{x}_\alpha}\|_{2_\alpha,1}.$$

Пользуясь леммами 2—4, получаем неравенство 1-го ранга на цепочке $Ц_\alpha$:

$$(\rho,\ z^2)_{u_\alpha}^{*} + \tau I_{1,1}^{(\alpha)} + \tau P_{1,1}^{(\alpha)} + 2c^{*}\tau\,(1,\ z^2)_{u_\alpha}^{*} \leqslant (1 + M\tau)\,(\check{\rho},\ \check{z}^2)_{u_\alpha}^{*} + \\ + M\tau\,\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,1}^{2} + 2\,(\overset{\circ}{\psi}_\alpha,\ z)_{u_\alpha}^{*}\cdot\tau, \tag{37}$$

где c^{*} — произвольная положительная постоянная, зависящая от выбора $\overline{M}$. Нетрудно, по аналогии с [14], [15], [17], получить энергетическое неравенство n-го ранга на цепочке $Ц_\alpha$:

$$(\rho,\ \overset{n}{z})_{u_\alpha}^{*} + \tau I_{n,1}^{(\alpha)} + \tau P_{n,1}^{(\alpha)} + 2^{m+1}\tau c^{*}\,(1,\ \overset{n}{z})_{u_\alpha}^{*} \leqslant (1 + M\tau)\,(\check{\rho},\ \check{\overset{n}{z}})_{u_\alpha}^{*} + \\ + \tau\,(M_n\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,1})^{2n} + 2^{n}\tau\,(\overset{\circ}{\psi}_\alpha,\ z^{\sigma_n})_{u_\alpha}^{*}, \quad m = n \text{ для } \mathrm{III}_1,\ \ m = 2n \text{ для } \mathrm{III}_2, \tag{38}$$

где $M_n = M\cdot 2^{n}$. При этом выполняются условия (7) и (7′).

Последние слагаемые в (37) и (38) оцениваются ниже.

3. Энергетические неравенства на сетке ω_h

Рассмотрим суммы (14) по $Ц_\alpha$. Умножая их на H_α и суммируя по всем цепочкам данного направления α, получим суммы по ω_h:

$$(v,\ z) = \sum_{\omega_h} vzH, \qquad (v,\ z)_\alpha = \sum_{\omega_h} vzH^{(\alpha)},$$

$$(v,\ z)_\alpha^{+} = \sum_{\omega_h} vzH^{(+\alpha)}, \qquad (v,\ z]_\alpha = \sum_{\omega_h^{+\alpha}} vzH^{(\alpha)},$$

$$[v,\ z)_\alpha^{+} = \sum_{\omega_h^{-\alpha}} vzH^{(+\alpha)}, \qquad H^{(\alpha)} = H_\alpha h_\alpha, \qquad H^{(+\alpha)} = H_\alpha h_{\alpha+},$$

$$H = H_\alpha \hbar_\alpha = \prod_{k=1}^{p} \hbar_k, \quad \omega_h^{\pm\alpha} = \omega_h + \gamma_\alpha^{\pm}.$$

С этими суммами связаны нормы $\|v\| = (v,\ v)^{1/2}$, $\|v\|_{2_\alpha} = (v,\ v)_\alpha^{1/2}$ или $\|v\|_{2_\alpha} = (v,\ v]_\alpha^{1/2}$, например

$$\|v_{\bar{x}_\alpha}\|_{2_\alpha} = (v_{\bar{x}_\alpha},\ v_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha^{1/2}. \tag{39}$$

Кроме того, нам понадобятся нормы

$$\|v\|_0 = \max_{\omega_h} |v(x, t)|, \qquad \overline{\|v(x, t_{j+1})\|} = \left(\sum_{j'=1}^{j+1} \|v(x, t_{j'})\|^2 \tau_{j'}\right)^{1/2}. \tag{40}$$

Умножим теперь (37) и (38) на H_α и просуммируем по всем цепочкам направления α. В результате получим энергетические неравенства 1-го и n-го ранга на сетке ω_h:

$$(\rho, z^2) + \tau (I_1^{(\alpha)} + P_1^{(\alpha)}) + 2\tau c^* (1, z^2) \leqslant \tag{41}$$
$$\leqslant (1 + M\tau)(\check{\rho}, \check{z}^2) + \tau M \|\psi_\alpha\|_{4_\alpha}^2 + 2(\mathring{\psi}_\alpha, z)\tau,$$

$$(\rho, \overset{n}{z}) + \tau (I_n^{(\alpha)} + P_n^{(\alpha)}) + \tau 2^{m+1} c^* (1, \overset{n}{z}) \leqslant (1 + M\tau)(\check{\rho}, \check{\overset{n}{z}}) + \tag{42}$$
$$+ \tau (M \cdot 2^n \|\psi_\alpha\|_{4_\alpha, 0})^{2^n} + 2^n (\mathring{\psi}_\alpha, z^{\sigma_n})\tau.$$

Здесь приняты обозначения

$$\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha} = \|\eta_\alpha\|_{2_\alpha} + \|\eta_\alpha\|_{2, \gamma_\alpha^+}, \qquad \|\eta_\alpha\|_{2, \gamma_\alpha^+} = \left(\sum_{\gamma_\alpha^+} \eta_\alpha^2 H_\alpha\right)^{1/2}, \tag{43}$$

$\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha, 0}$ — максимальное значение $\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha, 1}$ по всей сетке ω_h, точнее, по всем цепочкам данного направления α, $\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha, 0} = \|\,\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha, 1}\|_0$

$$I_n^{(\alpha)} = (a_\alpha, \left(\overset{n-1}{z}_{\bar{x}_\alpha}\right)^2] + \sum_{k=0}^{n-2} 2^{n-k-2} \left\{(a_\alpha \left(\overset{k}{z}_{\bar{x}_\alpha}\right)^2, z^{\sigma_{n-\sigma_{k+1}}}]_\alpha + \right. \tag{44}$$
$$\left. + [a_\alpha^{(+1_\alpha)} \left(\overset{k}{z}_{x_\alpha}\right)^2, z^{\sigma_{n-\sigma_{k+1}}})_\alpha^+\right\},$$

$$P_n^{(\alpha)} = \tau \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} (\rho \left(\overset{k}{z}_{\bar{t}_\alpha}\right)^2, z^{\sigma_{n-\sigma_{k+1}}}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{45}$$

Напомним, что (42) и (41) получены при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$ и произвольном n. Суммирование (41) и (42) по $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ дает

$$(\rho, z^2)^{j+1} + \tau (I_1 + P_1) + \tau c^* \sum_{\alpha=1}^{p} (1, z^2)^{j+\alpha/p} \leqslant (1 + M\tau)(\rho, z^2)^j + \tag{46}$$
$$+ \tau M \|\psi\|_4^2 + 2 \sum_{\alpha=1}^{p} (\mathring{\psi}_\alpha, z^{j+\alpha/p})\tau,$$

$$(\rho, \overset{n}{z})^{j+1} + \tau (I_n + P_n) + 2^m \tau c^* \sum_{\alpha=1}^{p} \left(1, \overset{n}{z}\right)^{j+\alpha/p} \leqslant (1 + M\tau)(\rho, \overset{n}{z})^j + \tag{47}$$
$$+ \tau (M \cdot 2^n \|\psi\|_{4,0})^{2^n} + 2^n \sum_{\alpha=1}^{p} (\mathring{\psi}_\alpha, (z^{\sigma_n})^{j+\alpha/p})\tau,$$

$$I_n = I_n^{j+1} = \sum_{\alpha=1}^{p} I_n^{(\alpha)}, \quad P_n = P_n^{j+1} = \sum_{\alpha=1}^{p} P_n^{(\alpha)}, \quad m = n \text{ для } \mathrm{III}_1, \quad m = 2n \text{ для } \mathrm{III}_2,$$

$$\|\psi\|_4 = \sum_{\alpha=1}^{p} \|\psi_\alpha\|_{4_\alpha}, \qquad \|\psi\|_{4,0} = \sum_{\alpha=1}^{p} \|\psi_{\alpha\ 4_\alpha,0}, \qquad \|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,0} = \|\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,1}\|_0, \tag{48}$$

$\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha}$ и $\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,1}$ определяются по формулам (43) и (33).

Перейдем теперь к оценке последних слагаемых в (46) и (47).

4. Основная лемма

Лемма 5. *Пусть произвольная сеточная функция $z = z(x, t)$, заданная на $\overline{\Omega}^k$ $(k = 1, 2)$, удовлетворяет условиям* (16), *а $\mathring{\psi}_\alpha$ — условию*

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0. \tag{49}$$

Тогда справедливы неравенства

$$2^n \sum_{\alpha=1}^{p} (\mathring{\psi}_\alpha, (z^{\sigma_n})^{j+\alpha/p}) \leqslant \tfrac{1}{2}(I_n + P_n) + M \sum_{\alpha=1}^{p-1} (1, \overset{n}{z})^{j+\alpha/p} + \tag{50}$$

$$+ \left(M 2^n \sqrt{\tau} \sum_{\alpha=1}^{p-1} \|\mathring{\psi}_\alpha\|_0\right)^{2^n},$$

$$2 \sum_{\alpha=1}^{p} (\mathring{\psi}_\alpha, z^{j+\alpha/p}) \leqslant \tfrac{1}{2} P_1 + M\tau \sum_{\alpha=1}^{p-1} \|\mathring{\psi}_\alpha\|^2. \tag{51}$$

Если ω_τ — нормальная сетка $(\tau \leqslant m^* \check{\tau})$, то

$$2^n \sum_{\alpha=1}^{p} (\mathring{\psi}_\alpha, (z^{\sigma_n})^{j+\alpha/p}) \leqslant \tfrac{1}{2}(I_n + P_n) + \tfrac{1}{2}\frac{\check{\tau}}{\tau} \check{I}_n + (M 2^n \sqrt{\tau}\, \|\mathring{\psi}\|_{2,0})^{2^n}, \tag{52}$$

где

$$\|\mathring{\psi}\|_{2,0} = \sum_{\alpha=1}^{p} \|\mathring{\psi}_\alpha\|_{2_\alpha,0}, \qquad \|\mathring{\psi}_\alpha\|_{2_\alpha,0} = \|\|\mathring{\psi}_\alpha\|_{2_\alpha,1}\|_0,$$

$$I_n = I_n^{j+1}, \qquad \check{I}_n = I_n^j, \qquad \tau = \tau_{j+1}, \qquad \check{\tau} = \tau_j. \tag{53}$$

Ограничимся выводом лишь неравенства (50). Представляя $v^{j+\alpha/p}$ в виде

$$v^{j+\alpha/p} = v^{j+1} - \tau \sum_{m=\alpha+1}^{p} v_{\bar{t}_m},$$

где $v = z^{\sigma_n}$, и учитывая формулу

$$(z^{\sigma_n})_{\bar{t}_m} = \sum_{k=0}^{n-1} \check{z}^{\sigma_k} z^{\sigma_n - \sigma_{k+1}} \overset{k}{z}_{\bar{t}_m}$$

(см. [14]), а также условие (49), после изменения порядка суммирования по α и m получим

$$2^n \sum_{\alpha=1}^{p} (\mathring{\psi}_\alpha, z^{\sigma_n}) = -2^n \tau \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=2}^{p} \left(\check{z}^{\sigma_k} z^{\sigma_n - \sigma_{k+1}} \overset{k}{z}_{\bar{t}_m}, \sum_{\alpha=1}^{m-1} \mathring{\psi}_\alpha\right),$$

где под знаком суммы справа стоят $z = z^{j+m/p}$, $\check{z} = z^{j+(m-1)/p}$. Проводя затем рассуждения по аналогии с [14] сначала для цепочки $Ц_\alpha$ и пользуясь леммой 1, находим

$$2^n\tau \sum_{k=0}^{n-1} (\check{z}^{\sigma_k} z^{\sigma_{n-\sigma_{k+1}}} z_{\bar{t}_m}, \mathring{\psi}_\alpha) \leqslant c_0 (I_n + P_n) + M (1, \overset{n}{z})^{j+(m-1)/p} + (M 2^n \sqrt{\tau}\, \|\mathring{\psi}_\alpha\|_0)^{2n}.$$

Отсюда и из предыдущей формулы следует (50).

Если $\mathring{\psi}_\alpha$ имеет вид

$$\mathring{\psi}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} \mathring{\psi}_{\alpha\beta}, \tag{54}$$

то в (53) следует положить

$$\|\mathring{\psi}\|_{2,0} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \|\mathring{\psi}_{\alpha\beta}\|_{2_\beta,0}. \tag{55}$$

5. Априорные оценки в среднем

Обратимся теперь к энергетическому неравенству 1-го ранга (46). Подставляя туда оценку (51), получим

$$(\rho, z^2)^{j+1} + \tau I_1 \leqslant (1 + M\tau)(\rho, z^2)^j + M\tau \|\Psi^{j+1}\|^2, \qquad \tau = \tau_{j+1}, \tag{56}$$

$$\|\Psi\|^2 = \|\psi\|_4^2 + \tau \|\mathring{\psi}\|^2, \qquad \|\psi\|_4 = \sum_{\alpha=1}^{p} \|\psi_\alpha\|_{4_\alpha}, \qquad \|\mathring{\psi}\| = \sum_{\alpha=1}^{p} \|\mathring{\psi}_\alpha\|, \tag{57}$$

где $\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha}$ дается формулой (43).

Так как $z(x, 0) = 0$, то лемма 4_a из [14] дает

$$(\rho, z^2)^{j+1} + \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} I_1^{j'} \leqslant M \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} \|\Psi^{j'}\|^2 = M \overline{\|\Psi(x, t_{j+1})\|}^2. \tag{58}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Для решения задач* III_k^0 *и* IV_k^0, $k = 1, 2$, *на любой последовательности неравномерных сеток* $\Omega^{(1)}$ *и* $\Omega^{(2)}$ *при достаточно малом* $\tau < \tau_0$ *выполняется неравенство*

$$\|z(x, t_{j+1})\| + \sqrt{\tau_{j+1}}\, \|z_{\bar{x}}(x, t_{j+1})\| \leqslant M \overline{\|\Psi(x, t_{j+1})\|}, \tag{59}$$

где $\|\Psi\|$ *определяется формулами* (57) *и* (43), *причем для задачи* IV_k^0

$$\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha} = \|\psi_\alpha^*\|_{4_\alpha} + \|\mu_\alpha\|_{2_\alpha} + \|\mu_\alpha\|_{2,\gamma_\alpha^+} + \|\mu_\alpha\|_{2,\gamma_\alpha^-}, \tag{60}$$

$$\|z_{\bar{x}}(x, t_{j+1})\| = \sum_{\alpha=1}^{p} \|z_{\bar{x}_\alpha}(x, t_{j+\alpha/p})\|_{2_\alpha}.$$

Следствие. Если $\psi_\alpha = 0$, то для решения задачи III_2^0 при доста-

точно малом $\|\tau\|_0 < \tau_0$ справедлива оценка

$$\| z(x, t_{j+1}) \| + \sqrt{\tau_{j+1}} \| z_{\bar{x}}(x, t_{j+1}) \| \leqslant M \left(\sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'}^2 \| \mathring{\psi}^{j'} \|^2 \right)^{1/2}, \tag{61}$$

где $\|\mathring{\psi}\|$ определяется по формуле (57).

Напомним, что мы условились на $\Omega^{(1)}$ рассматривать только те из задач III_k, для которых $g_{\alpha 2}^{\pm} = 0$.

Функция ψ_α для задачи III_k $(k = 1, 2)$, согласно (5), имеет вид

$$\psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} [(\mu_{\alpha\beta})_{\hat{x}_\beta} + \psi_{\alpha\beta}^*]. \tag{62}$$

Отсюда видно, что норма (43) неудобна для оценки (62) на неравномерной сетке, так как она будет содержать отношения шагов $\hbar_\alpha/\hbar_\beta$. Поэтому мы сначала сведем задачу III_k к задаче IV_k, для которой

$$\psi_\alpha = (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi_\alpha^*, \tag{63}$$

а затем воспользуемся нормой (60).

В § 1 было показано, что

$$\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}^0 h_\beta^2, \quad \text{где } \mu_{\alpha\beta}^0 = O(1). \tag{64}$$

Введем обозначения

$$\|\mu^0\|_0 = \sum_{\alpha, \beta=1}^{p} \|\mu^0{}_{\alpha\beta}\|_0, \qquad \|\overline{\mu^0}\|_0 = \max_{\omega_\tau} \|\mu^0\|_0. \tag{65}$$

Лемма 6. *Пусть z — решение задачи III_2, а v — решение той же задачи с правой частью*

$$\Psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi_\alpha^*, \text{ где } \mu_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} \mu_{\beta\alpha}, \qquad \psi_\alpha^* = \sum_{\beta=1}^{p} \psi_{\alpha\beta}^*; \tag{66}$$

тогда при достаточно малом $\tau < \tau_0$ справедлива оценка

$$\| z(x, t_{j+1}) - v(x, t_{j+1}) \| \leqslant M \|\overline{\mu^0}\|_0 (\|\tau\|_2 + \|\hbar\|^2), \tag{67}$$

где

$$\|\tau\|_2 = \|\tau\|_2^{j+1} = \left(\sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'}^3 \right)^{1/2}, \qquad \|\hbar\| = \sum_{\beta=1}^{p} \|\hbar_\beta\|. \tag{68}$$

Напомним, что по нашей терминологии (см. п. 1) v есть решение задачи IV_2. Рассмотрим разность $w = z - v$. Для нее получим условия

$$\left.\begin{aligned} &\rho w_{\bar{t}_\alpha} - \Lambda_\alpha w + d_\alpha w = Q_\alpha^{(2)}(w) + \widetilde{\psi}_\alpha, \qquad \widetilde{\psi}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} (\mu_{\alpha\beta})_{\hat{x}_\beta} - \sum_{\beta=1}^{p} (\mu_{\beta\alpha})_{\hat{x}_\alpha} \\ &w = \beta_\alpha^{\pm} w^{(\mp 1_\alpha)} \text{ при } x \in \gamma_\alpha^{\pm}; \qquad w(x, 0) = 0 \text{ при } x \in \overline{\omega}_h. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Отсюда видно, что

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \widetilde{\psi}_\alpha = 0 \tag{70}$$

и, следовательно, можно воспользоваться леммой 5. Учитывая, что

$$(\mu_{\alpha\beta})_{\hat{x}_\beta} \leqslant 2\{h_\beta|\mu^0_{\alpha\beta}| + h_{\beta+}|(\mu^0_{\alpha\beta})^{(+1_\beta)}|, \quad h_\beta \leqslant 2\hbar_\beta, \quad h_{\beta+} \leqslant 2\hbar_\beta,$$

получим $\|\widetilde{\psi}_\alpha\|^2 \leqslant M\|\hbar\|^2$, $\|\widetilde{\psi}\|^2 \leqslant M\|\hbar\|^2$. Пользуясь затем для w оценкой (61) и учитывая, что $2\|\tau\|_2^{1/2}\|\hbar\| \leqslant \|\tau\|_2 + \|\hbar\|^2$, приходим к неравенству (67).

Из теоремы 1 и леммы 6 следует

Теорема 2. *Пусть $z = z(x, t)$ есть решение задачи III_2^0. Тогда при достаточно малом $\tau < \tau_0$ на произвольной последовательности сеток $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ справедлива оценка*

$$\|z(x, t_{j+1})\| \leqslant M\overline{\|\Psi(x, t_{j+1})\|} + M\|\overline{\mu^0}\|(\|\tau\|_2 + \|\hbar\|^2), \tag{71}$$

где $\|\Psi(x, t)\|$ — выражение, определяемое формулами (57) *и* (60), *причем*

$$\mu_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} \mu_{\beta\alpha}, \qquad \psi^*_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} \psi^*_{\alpha\beta}.$$

Заметим, что поскольку III_1 есть частный случай задачи III_2, то теоремы 1 и 2 относятся и к задаче III_1.

Для задачи III_1 справедлив принцип максимума, и потому ее решение непрерывно зависит от граничных данных (см. [10]). Чтобы получить оценку решения задачи III_2 при $\nu^\pm_\alpha \neq 0$, достаточно оценить решение соответствующей задачи III_1 с теми же данными и затем воспользоваться следующей леммой.

Лемма 7. *Пусть z — решение задачи III_2, а v — решение задачи III_1 с теми же коэффициентами и Ψ_α, $\nu^\pm_\alpha$. Тогда при достаточно малом $\|\tau\|_0 < \tau_0$ на любой последовательности сеток $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ справедлива оценка*

$$\|z(x, t_{j+1}) - v(x, t_{j+1})\| \leqslant M\overline{\|v(x, t_{j+1})\|}. \tag{72}$$

В самом деле, $w = z - v$ есть решение задачи III_2^0 с однородными граничными условиями и правой частью $\widetilde{\Psi}_\alpha = Q^*_\alpha(v)$. Применяя к w теорему 1, получим (72).

6. Равномерные оценки для решения задачи III_1

Теорема 3. *Для решения задачи IV_1^0 на произвольной последовательности сеток $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ при $\|\tau\|_0 < \tau_0$ справедлива равномерная оценка*

$$\|z(x, t_{j+1})\|_0 \leqslant M\|\Psi(x, t_{j+1})\|^0 \ln^\delta \frac{1}{H_*} \text{ при } H_* = \min H \leqslant H_0(\delta), \tag{73}$$

где $\delta > 1$ — *произвольное число,*

$$\|\Psi(x, t_{j+1})\|^0 = \max_{0 < j' \leqslant j+1} \|\Psi^{j'}\|,$$

$$\|\Psi\| = \|\psi\|_{4,0} + \sqrt{\tau}\|\mathring{\psi}\|_0,$$

$$\|\psi\|_{4,0} = \sum_{\alpha=1}^{p} \|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,0},$$

$$\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,0} = \|\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,1}\|_0. \tag{74}$$

$\|\overset{\circ}{\psi}\|_0 = \sum_{\alpha=1}^{p} \|\overset{\circ}{\psi}_\alpha\|_0$, *а* $\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,1}$ *дается формулой* (33).

Если ω_τ — *нормальная сетка, то*

$$\|\Psi\| = \|\Psi\|_* = \|\psi\|_{4,0} + \sqrt{\tau}\|\overset{\circ}{\psi}\|_{2,0},$$

$$\|\overset{\circ}{\psi}\|_{2,0} = \sum_{\alpha=1}^{p} \|\overset{\circ}{\psi}_\alpha\|_{2_\alpha,0},$$

$$\|\overset{\circ}{\psi}_\alpha\|_{2_\alpha,0} = \|\|\overset{\circ}{\psi}_\alpha\|_{2_\alpha,1}\|_0. \tag{74'}$$

Подставим (50) в (47) и воспользуемся леммой 4_a из [14]:

$$(\rho, \overset{n}{z})^{j+1} \leqslant \sum_{j'=1}^{j+1} (M2^n\|\Psi^{j'}\|)^{2^n}\tau_{j'} \leqslant T(M2^n\|\Psi^{j+1}\|^0)^{2^n}. \tag{75}$$

Отсюда следует, что $\|z(x, t_{j+1})\|_0 \leqslant M\cdot 2^n\|\Psi(x, t_{j+1})\|^0 H_*^{-1/2^n}$. Учитывая (8) и (10) и выбирая $n = n(H_*)$ так же, как и в [14], получим (73). Для доказательства второй части теоремы надо подставить (52) в (47) и повторить предыдущие рассуждения.

Следствие. Если $\psi_\alpha = 0$, то (73) принимает вид

$$\|z(x, t_{j+1})\|_0 \leqslant M\|\sqrt{\tau_{j+1}}\,\overset{\circ}{\psi}(x, t_{j+1})\|_0^0 \ln^\delta \frac{1}{H_*}$$

$$H_* \leqslant H_0(\delta), \quad \|\tau\|_0 < \tau_0. \tag{76}$$

Если $\psi_\alpha = 0$ и сетка ω_τ нормальна ($\tau \leqslant m^*\check{\tau}$), то

$$\|z(x, t_{j+1})\|_0 \leqslant M\|\sqrt{\tau_{j+1}}\,\overset{\circ}{\psi}(x, t_{j+1})\|_{2,0}^0 \ln^\delta \frac{1}{H_*}$$

$$H_* \leqslant H_0(\delta), \quad \|\tau\|_0 < \tau_0. \tag{76'}$$

Лемма 8. *Пусть* z — *решение задачи* III_1, *а* v — *решение соответствующей задачи* IV_1 *с правой частью* (66). *Тогда на* $\Omega^{(1)}$ *и* $\Omega^{(2)}$ *при* $H_* \leqslant H_0(\delta)$, $\|\tau\|_0 < \tau_0$ *справедлива равномерная оценка*

$$\|z(x, t_{j+1}) - v(x, t_{j+1})\|_0 \leqslant M\|\overline{\mu^0}\|_0(\|\tau\|_0 + \|h\|_0^2)\ln^\delta \frac{1}{H_*},$$

$$\|h\|_0 = \sum_{\alpha=1}^{p} \|h_\alpha\|_0. \tag{77}$$

Для доказательства (77) достаточно оценить решение задачи (69), где $Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)}$, при помощи (76).

Перейдем теперь к задаче III_2^0. Для нее справедливо неравенство (75). Однако при переходе к старой функции $z_{\text{ст}}$ согласно (8) надо умножить $z_{\text{нов}}$, фигурирующее во всех наших рассуждениях, на $e^{\overline{M}_{\nu 2^n} t_{j+1}}$, что дает

$$\|z(x, t_{j+1})\|_0 \leqslant Me^{M2^n}\overline{\|\Psi(x_1 t_{j+1})\|}H_*^{-1/2^n} \tag{78}$$

при достаточно малом $\|\tau\|_0 \leqslant \tau_0(n) = \tau_0/2^n$, которое в данном случае зависит от n. Эта зависимость появляется в связи с тем, что в d_α входит не просто M, а $\overline{M}/(1+\overline{M}\tau)$ (см. [14]).

Требуя, чтобы $\overline{M}/(1+\overline{M}\tau) > M^* 2^n$, и выбирая $\overline{M} = \overline{M}_0 2^n$, мы получим $\overline{M}_0 > (1+\overline{M}_0 2^n \tau) M^*$, т. е. $\overline{M}_0 > M^*/(1 - M^* 2^n \tau)$. Отсюда следует, что $\tau < \tau_0/2^n$, $\tau_0 < 1/M^*$. Из (78) видно, что наименьшее значение $e^{M2^n} H_*^{-1/2n}$ принимает, если выбрать $2^n \sim \sqrt{\ln(1/H_*)}$. Это приводит к равномерной оценке

$$\|z(x, t_{j+1})\|_0 \leqslant M \overline{\|\Psi(x, t_{j+1})\|} \exp\left(M \sqrt{\ln \frac{1}{H_*}}\right), \tag{79}$$

которая верна при достаточно малом $H_* \leqslant H_0$ и дополнительном условии $\sqrt{\ln(1/H_*)}\,\tau \leqslant \tau_0^*$, где τ_0^* — положительная постоянная, не зависящая от n, т. е. от H_*. В [17], § 2, для многомерной схемы была получена оценка (79), однако не указано, что между τ и H_* существует связь $\sqrt{\ln(1/H_*)}\,\tau \leqslant \tau_0^*$. В [14] для одномерной задачи III_2 ($p = 1$) найдена оценка (73). Метод из [14], к сожалению, непригоден для многомерного случая. Отметим, что для частной задачи III_2 при $g_{\alpha 1}^{\pm} = 0$, $b_\alpha^{\pm} = 0$ на сетке $\Omega^{(2)}$ указанное дополнительное условие снимается.

7. Априорные оценки для других задач

Теорема 4. *Для решения задач* $\mathrm{III}_k^0, k = 1', 2', 3$ *на любой последовательности сеток* $\Omega^{(1)}$ *и* $\Omega^{(2)}$ *при достаточно малом* $\|\tau\|_0 < \tau_0$ *справедлива оценка* (59).

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 1. При этом надо воспользоваться для задачи III_3 оценкой

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \left(b_{\alpha}^{+} z_{\hat{x}_\alpha}^{j+\alpha/p} + b_\alpha^{-} z_{\check{x}_\alpha}^{j+\alpha/p}, z^{j+1}\right) \leqslant M \|z^{j+1}\|^2 + c_0 I_1,$$

где c_0 — произвольное число, а для $\mathrm{III}_{1'}$ и $\mathrm{III}_{2'}$ — оценкой

$$\left(b_{\alpha-1}^{+} z_{\check{x}_{\alpha-1}} + b_{\alpha-1}^{-} z_{\check{x}_{\alpha-1}}, z\right) \leqslant M \|z^{j+\alpha/p}\|^2 + c_0 I_1^{(\alpha-1)}.$$

Лемма 5 не связана с видом Q_α и потому верна и в данном случае.

Из (59) следует оценка (61), при помощи которой доказывается лемма 6 для данных задач.

Задачи III_3 и $\mathrm{III}_{2'}$ сводятся к задаче III_2, а $\mathrm{III}_{1'}$ — к задаче III_1.

Лемма 9. *Пусть* z — *решение задачи* III_3, *а* v — *решение соответствующей* (*т. е. имеющей те же коэффициенты и правые части*) *задачи* III_2. *Тогда при* $\|\tau\|_0 < \tau_0$ *справедлива оценка*

$$\|z(x, t_{j+1}) - v(x, t_{j+1})\| + \tag{80}$$
$$+ \sqrt{\tau}\,\|z_{\bar{x}}(x, t_{j+1}) - v(x, t_{j+1})\| \leqslant M \|\sqrt{\tau}\, v_{\bar{x}}(x, t_{j+1})\|,$$

где

$$\|v_{\bar{x}}(x, t_{j+1})\| = \sum_{\alpha=1}^{p} \|v_{\bar{x}_\alpha}(x, t_{j+\alpha/p})\|.$$

В самом деле, функция $w = z - v$ является решением задачи III_3^0 с правой час-

тью

$$\widetilde{\psi}_\alpha = -\left(b_\alpha^+ v_{\hat{x}_\alpha} + b_\alpha^- v_{\check{x}_\alpha}\right) + \delta_{\alpha,p} \sum_{k=1}^{p} \left(b_k^+ v_{\hat{x}_k} + b_k^- v_{\check{x}_k}\right), \qquad \delta_{\alpha,p} = \begin{cases} 1, & \alpha = p, \\ 0, & \alpha \neq p, \end{cases}$$

которая удовлетворяет условию (70), что позволяет воспользоваться оценкой (61).

Лемма 10. *Пусть z — решение III_2', а v — решение соответствующей задачи III_2, при $g_{\alpha 1}^{\pm} = 0$. Если сетка ω_τ является квазиравномерной ($|\tau_{\bar{t}}| \leqslant m^* \check{\tau}$), то при $\|\tau\|_0 \leqslant \tau_0$ справедлива оценка*

$$\|z - v\|^{j+1} + \sqrt{\tau_{j+1}}\, \|z_{\bar{x}} - v_{\bar{x}}\|^{j+1} \leqslant M \overline{\|\sqrt{\tau_{j+1}}\, v_{\bar{x}}(x, t_{j+1})\|}. \tag{81}$$

Для разности $w = z - v$ получаем задачу III_2' с правой частью

$$\widetilde{\psi}_\alpha = \left(b_{\alpha-1}^+ v_{\hat{x}_{\alpha-1}} - b_\alpha^+ v_{\hat{x}_\alpha}\right) + \left(b_{\alpha-1}^- v_{\check{x}_{\alpha-1}} - b_\alpha^- v_{\check{x}_\alpha}\right), \qquad \alpha = 2, \ldots, p,$$

$$\widetilde{\psi}_1 = \left[\left(b_p^+ v_{\hat{x}_p}\right)^j - b_1^+ v_{\hat{x}_1}\right] + \left[\left(b_p^- v_{\check{x}_p}\right)^j - b_1^- v_{\check{x}_1}\right], \qquad \alpha = 1,$$

которая удовлетворяет условию

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \widetilde{\psi}_\alpha = -\tau q_{\bar{t}}, \qquad q = b_p^+ v_{\hat{x}_p} + b_p^- v_{\check{x}_p}, \qquad q_{\bar{t}} = (q^{j+1} - q^j)/\tau. \tag{82}$$

В правой части неравенства (46) для функции w последнее слагаемое будет иметь вид

$$2 \sum_{\alpha=1}^{p} (\widetilde{\psi}_\alpha, w^{j+\alpha/p})\, \tau = -2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} (\widetilde{\psi}_\alpha, w^{j+1} - w^{j+\alpha/p})\, \tau - 2\tau\, (q_{\bar{t}}, (\tau w)^{j+1}). \tag{83}$$

Проводя рассуждения по аналогии с п. 4, найдем

$$2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} (\widetilde{\psi}_\alpha, w^{j+1} - w^{j+\alpha/p})\, \tau \leqslant \tfrac{1}{2} \tau P_1 + M\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} \|\widetilde{\psi}_\alpha\|^2.$$

Преобразуем последнее слагаемое в правой части (83):

$$-2\tau\, (q_{\bar{t}}, (\tau w)^{j+1}) = -2\tau\, (\tau q, w)_{\bar{t}} + 2\tau\check{\tau}\, (q^j, w_{\bar{t}}) + 2\tau\tau_{\bar{t}}\, (w^{j+1}, q^j) \leqslant$$
$$\leqslant -2\tau\, (\tau q, w)_{\bar{t}} + \tfrac{1}{2}\tau P_1 + M\tau\, \|w^{j+1}\|^2 + M\tau\, \|\sqrt{\check{\tau}}\, q^j\|^2 \qquad (\tau = \tau_{j+1}, \check{\tau} = \tau_j).$$

В результате вместо (46) получим

$$(\rho, w^2)^{j+1} + \tau I_1 \leqslant (1 + M\tau)\, (\rho, w^2)^j + M\tau\, \{\|\sqrt{\check{\tau}}\, q^j\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \|\sqrt{\tau}\, \widetilde{\psi}_\alpha\|^2\} - 2\tau\, (\tau q, w)_{\bar{t}}, \tag{84}$$

$$I_1^{(\alpha)} = (a_\alpha, w_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha, \qquad I_1 = \sum_{\alpha=1}^{p} I_1^{(\alpha)}.$$

Суммируя это неравенство по всем $j' = 0, 1, 2, \ldots, j$, а затем пользуясь леммой 4*а* [14], получим

$$(\rho, w^2)^{j+1} + \tau I_1^{j+1} \leqslant M\overline{R(t_{j+1})} + M' \,|(\tau q, w)^{j+1}|, \tag{85}$$

где R — выражение, стоящее в (84) в фигурных скобках. Оценивая $M' |(\tau q, w)^{j+1}| \leqslant$ $\leqslant 0.5\, (\rho, w^2)^{j+1} + M\tau^2 \|q^{j+1}\|^2$, приходим к (81).

Если известна оценка для $\|v\| + \sqrt{\tau}\, \|v_{\bar{x}}\|$, то лемма 10 позволяет найти оценку для $\|z\| + \sqrt{\tau}\, \|z_{\bar{x}}\|$.

Лемма 11. *Пусть z есть решение задачи III_1 с правой частью $\Psi_\alpha^z = 0$. Тогда*

при достаточно малом $\|\tau\|_0 < \tau_0$ *на произвольной сетке* $\Omega^{(1)}$ *выполняется неравенство*

$$\sqrt{\tau_{j+1}}\,\|z_{\bar{x}_\alpha}(x, t_{j+\alpha/p})\|_{2_\alpha,0} \leqslant M\,\|\sqrt{\tau}\,\nu\|^0_{0,s}\,h^{-1/2}_{*,\gamma}, \tag{86}$$

где

$$h_{*,\gamma} = \min_{x\in\gamma_\alpha,\alpha=1,2,\ldots,p} (h_\alpha, h_{\alpha+}).$$

В силу теоремы 1 из [10], имеем $\|z(x, t_{j+1})\|_0 \leqslant M\,\|\nu\|_{0,s}$. Напишем для цепочки $Ц_\alpha$ неравенство 1-го ранга, предполагая, что краевые условия неоднородны ($z = \beta^\pm_\alpha z^{(\mp 1_\alpha)} + \nu^\pm_\alpha, \quad x\in\gamma^\pm_\alpha$):

$$(\rho, z^2)^*_{u_\alpha} + \tau(\rho, z^2_{\bar{t}_\alpha})^*_{u_\alpha} + \tau(a_\alpha, z^2_{\bar{x}_\alpha}]_{u_\alpha} \leqslant (1 + M\tau)(\check{\rho}, \check{z}^2)^2_{u_\alpha} + A_\alpha,$$

где

$$A_\alpha = 2\tau a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha} z\Big|_{x=x^{(+\alpha)}} - 2\tau a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha} z\Big|_{x=x^{(-\alpha)}}.$$

Поставим сюда z из краевых условий $z = h_{\alpha+}\varkappa^-_\alpha z_{x_\alpha} + \nu^-_\alpha$, $z = h_\alpha \varkappa^+_\alpha z_{\bar{x}_\alpha} + \nu^+_\alpha$. Тогда

$$A_\alpha = -2\tau\left\{a_\alpha^{(+1_\alpha)} h_{\alpha+} z^2_{x_\alpha}\varkappa^-_\alpha + a_\alpha h_\alpha z^2_{\bar{x}}\varkappa^+_\alpha\right\} + 2\tau\left(a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha}\nu^+_\alpha - a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha}\nu^-_\alpha\right).$$

Учитывая, что $2\tau a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha}\nu^+_\alpha \leqslant \frac{1}{2}\tau a_\alpha z^2_{\bar{x}_\alpha} h_\alpha + a_\alpha(\nu^+_\alpha h_\alpha^{-1/2})^2\tau\cdot 2$, получим

$$\sqrt{\tau}(a_\alpha, z^2_{x_\alpha}]^{1/2} \leqslant (1 + M\tau)\|\check{z}\|_{0,u_\alpha} + M\sqrt{\tau}\,[|\nu^+_\alpha|\,h_\alpha^{-1/2} + |\nu^-_\alpha|\,h_{\alpha+}]^{+1/2}. \tag{87}$$

Если, например, $\nu^-_\alpha = O(h^2_{\alpha+})$, $\nu^+_\alpha = O(h^2_\alpha)$, то из (87) следует, что $\sqrt{\tau}\,\|z_{\bar{x}_\alpha}\|_{2_\alpha,0} \leqslant$ $\leqslant M\,\|h\|^2_{0,\gamma} + M\tau$.

Замечая, что

$$\|z_{\bar{x}}\| \leqslant M\sum_{\alpha=1}^{p}\|z_{\bar{x}_\alpha}\|^2_{2_\alpha,0},$$

убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть* z*—решение задачи* III_1' *при* $\Psi_\alpha = 0$ *и граничных условиях* $z = \beta^\pm_\alpha z^{(\mp 1_\alpha)} + \nu^\pm_\alpha$, $x\in\gamma^\pm_\alpha$. *Если* ω_τ *— квазиравномерная сетка, то*

$$\|z\|^{j+1} + \sqrt{\tau_{j+1}}\,\|z_{\bar{x}}\|^{j+1} \leqslant M\,\|\nu\|_{0,s} + M\sqrt{\|\tau\|_0}\sum_{\alpha=1}^{p}\max_{\gamma^+_\alpha\times\omega_\tau}|\nu^+_\alpha|\,h_\alpha^{-1/2} + \max_{\gamma^+_\alpha\times\omega_\tau}|\nu^-_\alpha|\,h_{\alpha+}^{-1/2}]. \tag{88}$$

§ 3. О сходимости и точности на неравномерных сетках

1. Введение

Для выяснения вопроса о сходимости и точности рассмотренных в § 1 схем II_k ($k = 1, 2, 3, 1', 2'$) воспользуемся полученными в § 2 априорными оценками для решения z задачи III_k, являющегося погрешностью решения y задачи II_k ($z = y - u$). Эти оценки учитывают структуру погрешности аппроксимации, которая для всех схем имеет вид

$$\Psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \psi_\alpha, \qquad \sum_{\alpha=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0, \qquad \overset{\circ}{\psi}_\alpha = O(1), \tag{1}$$

$$\psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p}[(\mu_{\alpha\beta})_{\hat{x}_\beta} + \psi^*_{\alpha\beta}], \tag{2}$$

$$\mu_{\alpha\beta} = O(h_\beta^2), \qquad \psi^*_{\alpha\beta} = O(\hbar_\beta^2) + O(\tau). \tag{3}$$

На равномерной сетке $\omega_h^{(1)}$ следует положить $\mu_{\alpha\beta} = 0$, $\psi^*_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\psi^*_{\alpha\alpha}$, $\psi^*_{\alpha\alpha} = O(\hbar_\alpha^2) + O(\tau)$. При этом $\psi^*_{\alpha\alpha} = O(\hbar_\alpha) + O(\tau)$ в случае сетки $\omega_h^{(2)}$ в соседних с границей γ_α узлах. Тем не менее, как будет показано ниже, это не приводит к понижению порядка точности схем.

Формулируем условия, накладываемые на решение $u = u(x, t)$ задачи I_k и коэффициенты дифференциального уравнения (§ 1, 1_k, $k = 1, 2$).

В дальнейшем всюду подразумевается, что выполнено условие:

$c(x, t)$ в $\overline{Q_T}$ удовлетворяет условию Липшица по t, так что

$$|c_{\bar t}| \leqslant c_5, \qquad c_5 = \mathrm{const} > 0. \tag{a}$$

Все априорные оценки § 2 получены при этом условии, т. е. при $|\rho_{\bar t}| \leqslant c_5$.

Условие А. Решение $u=u(x, t)$ задач I_k ($k = 1, 2, 3$) и функции $c(x, t)$, $k_\alpha(x, t, u)$, $f(x, t, u, q_1, \ldots, q_p)$ обладают всеми производными, достаточными для того, чтобы формулы (1) — (3) для Ψ_α имели место в любой точке сетки $\Omega^{(1)}$ или $\Omega^{(2)}$.

Условие В. Функции $\overset{\circ}{\psi}_\alpha/c(x, t)$ удовлетворяют в $\overline{Q}_T$ условиям Липшица по переменным x_β, где $\beta \leqslant \alpha$ при $\alpha \leqslant [p/2]$ или $\beta > \alpha$ при $\alpha > [p/2]$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p$.

Условие С. Выражение $\Lambda_\beta(\overset{\circ}{\psi}_\alpha/c(x, t))$ равномерно ограничено на любой сетке $\Omega^{(1)}$ или $\Omega^{(2)}$ для всех $\beta \leqslant \alpha$ при $\alpha \leqslant [p/2]$ или $\beta > \alpha$ при $\alpha > [p/2]$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Поясним условие А на примере задачи I_0. Для выполнения условия А достаточно, например, потребовать, чтобы $\partial u/\partial t$, u, k_α, f, r_α, $\partial^3 u/\partial x_\alpha^3$, $\partial c/\partial x_\alpha$, $\partial r_\alpha/\partial x_\alpha$, $\partial^2 k_\alpha/\partial x_\alpha^2$, $\partial f/\partial x_\alpha$ удовлетворяли условиям Липшица по x_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, а $c(x, t)$, $\partial u/\partial t$ — условию Липшица по t.

Так как мы условились брать все коэффициенты $\rho = \rho(x, t_{j+1})$, $a_\alpha = a_\alpha(x, t_{j+1})$, $b_\alpha^\pm = b_\alpha(x, t_{j+1})$, $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t_{j+1})$ в момент $t = t_{j+1}$, то не требуется, чтобы коэффициенты $k_\alpha(x, t)$, $r_\alpha(x, t)$, $q(x, t)$, $f(x, t)$ удовлетворяли условию Липшица по t (в [10] это было необходимо требовать при выделении главной части $\overset{\circ}{\psi}_\alpha$ погрешности аппроксимации Ψ_α).

Результаты работы [10], очевидно, справедливы для задачи II_0, если выполнены условия А и С.

Условия А при дополнительном требовании, чтобы $\partial u/\partial t$ удовлетворяла условиям Липшица по x_α, эквивалентны условиям, при которых каждая одномерная схема Π_α имеет максимальный порядок аппроксимации $O(h_\alpha^2) + O(\tau)$ на равномерной сетке.

Мы проведем последующее изложение для схемы II_1, ограничиваясь лишь кратким указанием результатов для других схем.

2. О сходимости схемы II_1

Из [10] следует, что схемы II_0 и II_1 имеют точность $O(h^2) + O(\tau)$ на равномерной сетке $\Omega^{(1)}$, если выполнены условия А и С. Метод [10] не позволял выяснить вопрос о сходимости при более слабых требованиях относительно u, c, k_α, r_α, f даже в случае равномерной сетки $\Omega^{(1)}$. Это можно сделать теперь, опираясь на априорные оценки § 2.

Нам понадобятся условия $A^{(0)}$ и $A^{(\sigma)}$:

$A^{(0)}$. Функции k_α, c, f, $\partial k_\alpha/\partial x_\alpha$, $\partial r_\alpha/\partial u$, r_α, $\partial u/\partial x_\alpha$, $\partial^2 u/\partial x_\alpha^2$, $\partial u/\partial t$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, равномерно непрерывны в $\overline{Q}_T$.

$A^{(\sigma)}$. Функции, указанные в $A^{(0)}$, удовлетворяют в $\overline{Q}_T$ условиям Гёльдера порядка $\sigma_1 > 0$ по x_α, $\alpha = 1, \ldots, p$, а $\partial u/\partial t$, кроме того,—условию Гёльдера порядка $\sigma_2 > 0$ по t.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\Psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \psi_\alpha, \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0, \tag{4}$$

$$\psi_\alpha = \rho(\hbar) + \rho(\tau), \text{ если выполнены условия } A^{(0)} \tag{5}$$

($\rho(\varepsilon) \Rightarrow 0$ при $\varepsilon \to 0$),

$$\psi_\alpha = O(\hbar^{\sigma_1}) + O(\tau^{\sigma_2}), \text{ если выполнены условия } A^{(\sigma)}, \qquad \hbar = \sum_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha \tag{5'}$$

на произвольных сетках $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$.

Теорема 6. *Если выполнены условия* $A^{(0)}$, *то схема* II_1 *сходится в среднем на произвольной последовательности сеток* $\Omega^{(1)}$ *и* $\Omega^{(2)}$:

$$\| y - u \| = \rho_1(\| h \|_0) + \rho_2(\| \tau \|_0) \text{ при } \| \tau \|_0 \leqslant \tau_0, \tag{6}$$

где $\rho_k(\xi) \to$ *при* $\xi \to 0$, $k = 1, 2$.

Доказательство. Для погрешности $z = y - u$ схемы II_1 получаем задачу III_1, где Ψ_α дается формулами (4) и (5). Представим z в виде суммы $z = \bar{z} + v$, где $\bar{z}$ — решение этой задачи III_1 при $\Psi_\alpha = 0$, а v — решение той же задачи с однородными граничными условиями ($v_\alpha^\pm = 0$); $z \equiv 0$ на сетке $\Omega^{(2)}$. В силу условий $A^{(0)}$ имеем $v_\alpha^\pm = O(h_\alpha)$ и теорема 1 из [10] дает $\| \bar{z} \|_0 = O(\| h \|_{0,\gamma}^2)$. Для оценки v воспользуемся теоремой 1. Учитывая, что $\| \Psi \| = \rho(\hbar) + O(\sqrt{\tau}) + \rho(\tau)$, находим $\| v \| = \rho_1(\| \hbar \|)_0 + \rho_2(\| \tau \|_0)$. Для задач II_k, $k = 2, 3, 1', 2'$, имеет место аналогичная теорема.

Для доказательства равномерной сходимости условий $A^{(0)}$ недостаточно из-за множителя $\ln^\delta (1/H_*)$ в оценке (2.73). Из-за этого множителя в случае неравномерной сетки ω_h необходимо ввести дополнительное ограничение на величину H_*:

$$H_* > \exp(-c/\| H \|_0^\varepsilon), \quad H_* = \min_{x \in \omega_h} H, \quad H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha, \tag{7}$$

где ε — любое сколь угодно малое положительное число, а c — произвольная положительная постоянная. Из условия (7) следует, что

$$\ln \frac{1}{H_*} < \frac{c}{\| H \|_0^\varepsilon}.$$

Нетрудно заметить, что это требование не является обременительным и слабо ограничивает произвол в выборе сеток ω_h. В дальнейшем при формулировке теорем о равномерной сходимости подразумевается, что условие (7) выполнено.

При доказательстве равномерной сходимости мы будем пользоваться

теоремой 3. Оценка (73) содержит нормы $\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,0} = \|\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,1}\|_0$, где $\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,1}$ — норма вдоль цепочки $Ц_\alpha$, определяемая по формуле (2.33). Введем понятие среднего квадратичного шага по данному направлению α. Возьмем некоторую цепочку $Ц_\alpha$ длины l_α. Очевидно, что l_α есть сеточная функция на ω_h, принимающая постоянные значения вдоль каждой из цепочек $Ц_\alpha$. Пусть $Ц^*_\alpha$ — цепочка направления α, имеющая наибольшую длину $l^*_\alpha = \| l_\alpha \|_0$. Назовем средним квадратичным шагом по направлению α величину

$$\|h_\alpha\|^*_{2_\alpha} = \frac{1}{l^*_\alpha}(1, h^2_\alpha]^{1/2}_{*u_\alpha}. \tag{8}$$

Напомним, что

$$\|h_\alpha\|_{0,\gamma_\alpha} = \max\left(\max_{x\in\gamma^-_\alpha} h_{\alpha+},\ \max_{x\in\gamma^+_\alpha} h_\alpha\right),$$

$$\|h\|_{0,\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{p} \|h_\alpha\|_{0,\gamma_\alpha}.$$

Теорема 7. *Если выполнены условия* $A^{(\sigma)}$, *то схема* II_1 *при* $\rho(x,t) = c(x,t)$ *равномерно сходится на неравномерных сетках* $\Omega^{(1)}$ *и* $\Omega^{(2)}$:

$$\|y-u\|_0 \leqslant M\left(\|h^{\sigma_1}\|^* + \varepsilon_k\|h\|^2_{0,\gamma} + \|\tau\|_0^{\sigma'_2}\right)\ln^\delta\frac{1}{H_*}$$

$$\text{при } \|\tau\|_0 \leqslant \tau_0,\ H_* \leqslant H_0(\delta), \tag{9}$$

где $\sigma'_2 = \min(0.5, \sigma_2) \leqslant 0.5$, $\delta > 1$ — *произвольное число*,

$$\|h\|^* = \sum_{\alpha=1}^{p}\|h_\alpha\|^*_{2_\alpha}, \qquad \varepsilon_k = \delta_{k,1} \text{ на сетке } \Omega^{(k)}, \quad k=1,2. \tag{10}$$

Доказательство также основано на представлении $z = y - u$ в виде суммы $z = \bar z + v$; для $\bar z$ имеем оценку $\|\bar z\|_0 = O(\|h\|^2_{0,\gamma})$. Для оценки v используется теорема 3. При этом надо учесть, что $\mu_{\alpha\beta} \equiv 0$ и $\|\psi_\alpha\|_{4_\alpha,1} = O(\|h^{\sigma_1}_\alpha\|^*_{2_\alpha})$.

3. О порядке точности на неравномерной сетке

Теорема 8. *Если выполнены условия* A *и* B, *то схема* II_1 *на произвольной последовательности неравномерных сеток* $\Omega^{(1)}$ *и* $\Omega^{(2)}$ *имеет первый порядок точности по* τ *и второй по* h, *так что при* $\|\tau\|_0 < \tau_0$ *справедливы оценки*

$$\|y-u\| \leqslant M(\|h^2\|_2 + \varepsilon_k\|h^2\|_{0,\gamma} + \|\tau\|_0), \tag{11}$$

$$\|y-u\|_0 \leqslant M(\|h\|^2_0 + \|\tau\|_0)\ln^\delta\frac{1}{H_*} \quad \text{при } H_* \leqslant H_0(\delta), \tag{12}$$

$$\varepsilon_k = \delta_{k,1} = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 0, & k=2 \end{cases} \text{ на сетке } \Omega^{(k)}.$$

Доказательство. Представим $z = y - u$ в виде суммы $z =$

$= \eta + \bar{z} + v$, где η — функция, определенная в [10], § 2, п. 2 ($\rho\eta_{\bar{t}_\alpha} = \mathring{\psi}_\alpha$), $\bar{z}$ — решение задачи III_1 с правой частью $\Psi_\alpha = 0$ и неоднородными граничными условиями $\bar{z} = \beta_\alpha^{\pm}\bar{z}^{(\mp 1_\alpha)} + \tilde{\nu}_\alpha^{\pm}$ при $x \in \gamma_\alpha^{\pm}$, где $\tilde{\nu}_\alpha^{\pm} = \beta_\alpha \nu_\alpha^{\pm} - \eta + \beta_\alpha^{\pm}\eta^{(\mp 1_\alpha)}$, причем $\beta_\alpha^{\pm} = 0$ на $\Omega^{(2)}$, а v — решение задачи III_1 с однородными граничными условиями и правой частью $\Psi_\alpha = \psi_\alpha + \Lambda_\alpha\eta + Q_\alpha^{(1)}(\eta)$. По аналогии с [10] находим $\|\eta\|_0 = O(\tau)$. Теорема 1 из [10] дает $\|\bar{z}\|_0 = O(\|\tau\|_0 + \|h^2\|_{0,\gamma})$ на $\Omega^{(1)}$ и $\|\bar{z}\|_0 = O(\|\tau\|_0)$ на $\Omega^{(2)}$. Для оценки v воспользуемся теоремами 2 и 3, учитывая, что

$$\psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} [(\mu_{\alpha\beta})_{\hat{x}_\beta} + \psi_{\alpha\beta}^*].$$

Вычислим сначала $\|\Psi\|$ по формуле (57) и (60), где положим

$$\mu_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} \mu_{\beta\alpha} = \sum_{\beta=1}^{p} \mathring{\mu}_{\beta\alpha} h_\alpha^2.$$

Вычисления дают

$$\|\Lambda_\alpha\eta\|_{4_\alpha} = O(\|\eta_{\bar{x}_\alpha}\|_{2_\alpha}) = O(\tau), \qquad \|Q_\alpha^{(1)}(\eta)\|_{4_\alpha} = O(\tau), \quad \|\mu_\alpha\|_{2_\alpha} = O(\|h_\alpha^2\|_{2_\alpha}).$$

Собирая оценки для η, $\bar{z}$ и v, получим (11). Обратимся теперь к теореме 3 и лемме 8.

Замечая, что $\|\Psi\| = O(\|h\|_0^2) + O(\tau)$, получим (12).

Теорема 9. *Если выполнены условия* А, *то для решения задачи* II_1 *на* $\Omega^{(1)}$ *и* $\Omega^{(2)}$ *при* $\|\tau\|_0 \leqslant \tau_0$ *выполняются неравенства*

$$\|y - u\| \leqslant M(\|h^2\| + \varepsilon_k\|h^2\|_{0,\gamma} + \|\tau\|_2^{1/2}), \tag{13}$$

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(\|h^2\|_0 + \|\tau\|_0^{1/2}) \ln^\delta \frac{1}{H_*}, \qquad H_* \leqslant H_0(\delta). \tag{14}$$

Эти оценки непосредственно следуют из теорем 2, 3 и леммы 8.

Оценка (13) справедлива для схем II_2, II_3, $\mathrm{II}_{1'}$, $\mathrm{II}_{2'}$. Сравнение теорем 8 и 9 показывает, что, ослабив требование на решение и коэффициенты дифференциального уравнения, мы получили более грубую оценку (13) вместо (11).

Предполагая, что выполнены условия А и В, и пользуясь теоремой 5, можно получить для схемы II_1 следующую оценку скорости сходимости (в среднем) на сетке $\Omega_{**}^{(1)}$ (ω_τ — квазиравномерная сетка):

$$\|y - u\| \leqslant M\left(\|h^2\| + \|\tau\|_0 + \|\tau\|_0^{3/2} / h_{*,\gamma}^{1/2}\right), \ \|\tau\|_0 \leqslant \tau_0,$$

где

$$h_{*,\gamma} = \min_{x \in \gamma_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p} h_\alpha.$$

В случае системы N уравнений параболического типа, по аналогии с [14], § 4, п. 5, может быть написана абсолютно устойчивая локально-одномерная схема. При решении получающихся разностных уравнений относительно вектора $\mathbf{y}^{j+\alpha/p}$ требуется $2N$-кратное применение одномерной прогонки. Эта схема сходится в среднем со скоростью $O(h^2) + O(\sqrt{\tau})$ (ср. с теоремой 9).

§ 4. Добавление

1. Третья краевая задача для параллелепипеда

Пусть $\overline{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, p\}$ — параллелепипед, на границе которого заданы условия III рода $\left(k_\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \sigma_\alpha^- u + u_{1\alpha}^- \text{ при } x_\alpha = 0,\ -k_\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \sigma_\alpha^+ u + u_{1\alpha}^+ \text{ при } x_\alpha = l_\alpha \right)$. Соответствующие задачи I_1' и II_1' были рассмотрены в [10], причем для II_1' брались простейшие разностные краевые условия первого порядка аппроксимации:

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} = \sigma_\alpha^- y + u_{1\alpha}^- \text{ при } x_\alpha = 0, \quad -a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} = \sigma_\alpha^+ y + u_{1\alpha}^+ \text{ при } x_\alpha = l_\alpha.$$

Для погрешности $z = y - u$ схема II_1' на неравномерной сетке* $\overline{\Omega}_0$ получим задачу III_1' краевыми условиями

$$a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha} = \sigma_\alpha^- z + \nu_\alpha^- \text{ при } x_\alpha = 0, \quad -a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha} = \sigma_\alpha^+ z + \nu_\alpha^+ \text{ при } x_\alpha = l_\alpha, \tag{1}$$

где $\nu_\alpha^- = O(h_{\alpha+})$, $\nu_\alpha^+ = O(h_\alpha)$. По аналогии с § 2 и [10] найдем априорную оценку

$$\| z(x, t) \| \leqslant M \left[\overline{\| \psi(x, t) \|} + \overline{\| \nu(x, t) \|}_{0, \gamma} \right) \text{ при } \| \tau \|_0 \leqslant \tau_0, \tag{2}$$

$$\| \nu \|_{0, \gamma} = \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\| \nu_\alpha^- \|_{0, \gamma_\alpha^-} + \| \nu_\alpha^+ \|_{0, \gamma_\alpha^+} \right), \| \nu_\alpha^\pm \|_{0, \gamma_\alpha^\pm} = \max_{x \in \gamma_\alpha^\pm} | \nu_\alpha^\pm | \left(\| \tau \|_0 = \max_{0 < tj' \leqslant t} \tau_{j'} \right),$$

которая имеет место, если $\sigma_\alpha^\pm \geqslant c_1 > 0$. Здесь $\overline{\| \Psi(x, t) \|}$ — выражение (2.40). Верна следующая оценка порядка точности (при условиях A и B из § 3) схемы II_1':

$$\| y - u \| \leqslant M \left(\| \tau \|_0 + \| \hbar^2 \| + \| h \|_{0, \gamma} \right), \tag{3}$$

т. е. схема II_1' имеет, вообще говоря, первый порядок точности по h. Сгущая сетку вблизи границы, точнее, выбирая $\| h \|_{0, \gamma} = O(\| \hbar^2 \|)$, можно повысить на неравномерной сетке точность до второго порядка $(\| y - u \| = O(\| \hbar^2 \|) + O(\| \tau \|_0))$.

Нетрудно, по аналогии с § 2, п. 5, и § 3, п. 3, получить и равномерные оценки. Указанные результаты (2) и (3) сохраняют силу и для схемы II_2.

2. Разрывные коэффициенты

Полученные в § 2 априорные оценки позволяют дать детальное исследование вопроса о точности схем II_k в классе коэффициентов дифференциального уравнения (1.1_k), имеющих разрывы I рода на конечном числе гиперплоскостей $x_\alpha = \xi_\alpha = \text{const}$, параллельных координатным гиперплоскостям. Все результаты можно формулировать по аналогии с одномерным случаем [14]. Если сетка ω_h произвольна, то в оценку для $z = y - u$ будут входить первые степени шагов h_α в соседних с разрывом точках (см. [13]). Сгущая сетку вблизи разрыва $x_\alpha = \xi_\alpha$, т. е. выбирая в указанных точках $h_\alpha = O(\| \hbar^2 \|)$, получим на такой сетке второй порядок точности по h. Более экономичным является применение сеток $\omega_h(k)$, введенных в [14], которые выбираются так, чтобы узлы сетки лежали на гиперплоскости $x_\alpha = \xi_\alpha$. В этом случае, как показано в § 1, выражение (2.5), для ψ_α справедливо во всех точках сетки $\omega_h(k)$ и, следовательно, наши схемы имеют такой же порядок точности, как и в классе непрерывных коэффициентов.

---

* Если область G — параллелепипед, то сетку $\overline{\Omega}^1$ будем в дальнейшем обозначать $\overline{\Omega}_0$.

3. Эллиптические уравнения

Методы [14] — [17] и данной статьи применимы также для изучения сходимости и точности однородных разностных схем для многомерных уравнений эллиптического типа.

Пусть в области $\overline{G}$ задана краевая задача

$$Lu - q(x)u = -f(x), \qquad u|_\Gamma = u_1(x), \qquad Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \qquad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \tag{4}$$

$$k_\alpha \geqslant c_1 > 0, \qquad q(x) \geqslant 0.$$

Соответствующая многомерная однородная разностная схема на неравномерной сетке $\omega_h^{(2)}$ имеет вид

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y = d(x)y - \varphi(x) \text{ при } x \in \omega_h^{(2)}, \quad u|_\gamma = u_1(x); \qquad \Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x) y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}. \tag{5}$$

Коэффициенты a_α, d и φ вычисляются по формулам § 1, п. 3.

Для $z = y - u$ получим задачу

$$\Lambda z - dz = \Psi, \quad x \in \omega_h^2; \quad z|_\gamma = 0; \quad \Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} [(\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi_\alpha^*], \quad \mu_\alpha = O(\hbar_\alpha^2), \quad \psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2). \tag{6}$$

Априорные оценки для z строятся, по аналогии с § 2, при помощи энергетических неравенств n-го ранга. При этом $2^n(\Psi, z^{\sigma_n})$ при $n > 1$ мажорируется так:

$$2^n(\Psi, z^{\sigma_n}) \leqslant I_n + (M \cdot 2^n \sum_{\alpha=1}^{p} \|\Psi_\alpha\|_{3_{\alpha,0}})^{2^n}, \qquad I_n = \sum_{\alpha=1}^{p} \cdot I_n^{(\alpha)}, \qquad \Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \Psi_\alpha.$$

При $n = 1$ справедлива оценка

$$\|z\| \leqslant M \sum_{\alpha=1}^{p} (\|\mu_\alpha\|_{2_\alpha} + \|\psi_\alpha^*\|_{3_\alpha}) \quad \|\psi_\alpha^*\|_{3_\alpha} = \|\eta_\alpha\|_{3_\alpha}, \quad (\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} = \psi_\alpha^*, \quad \eta_\alpha^{(+1)_\alpha} = 0, \qquad x \in \gamma_\alpha^-, \tag{7}$$

Разностная схема (5) на произвольной неравномерной сетке $\omega_h^{(2)}$ имеет второй порядок точности:

$$\|y - u\| \leqslant M \|\hbar^2\| \text{ и } \|y - u\|_0 \leqslant M \|h\|_0^2 \ln^\delta \frac{1}{H_*}, \quad H_* \leqslant H_0(\delta). \tag{8}$$

Сетка $\omega_h^{(2)}$, очевидно, удобнее сетки $\omega_h^{(1)}$, так как процедура сноса граничных условий с Γ на γ в данном случае менее удобна, чем для локально-одномерного метода.

Из предыдущего ясно, что эти схемы сходятся в классе коэффициентов, имеющих разрывы указанного в п. 2 типа.

Метод представления Ψ в «дивергентном» виде с последующим применением энергетического тождества первого ранга применялся в [15], [19], [20]. Более тонкие оценки, основанные на использовании функции Грина, получены в [18].

4. Явные схемы

Преимущество локально-одномерных схем по сравнению с многомерными схемами легко заметить даже в случае чисто явных схем. Проиллюстрируем это на примере уравнения (1. 1_0) с постоянными коэффициентами, положив для простоты $r_\alpha = q = f = 0$, $k_\alpha = c = 1$ и считая сетку ω_h равномерной и „квадратной“ ($h_\alpha = h = \text{const}$).

Напишем явную многомерную схему и соответствующую локально-одномерную

схему (см. [3]):

$$y_{\bar{t}} = (y^{j+1} - y^j)/\tau = \Lambda y^j, \qquad \Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y, \qquad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \tag{9}$$

$$y_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha \check{y}, \quad \alpha = 1,2,\ldots, p; \qquad y = y^{j+\alpha/p}, \qquad \check{y} = y^{j+(\alpha-1)/p}. \tag{10}$$

Условия устойчивости для них имеют вид

$$\frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2p} \quad \text{для (9)}, \qquad \frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{для (10)}.$$

Таким образом, локально-одномерный явный метод позволяет увеличить шаг по времени в p раз без увеличения объема вычислений.

5. О методах расщепления

В [3]—[5], [7]—[9], [11] вопрос о точности экономичных схем, называемых авторами методами расщепления, сводится к исследованию многомерного разностного уравнения, связывающего значения y^j и y^{j+1} на целых шагах, что резко сужает как класс уравнений, так и класс областей G, для которых применимы эти методы. Если для схем [7]—[9] этот путь естествен, то для схем [3]—[5], по нашему мнению, более естественным является метод, указанный в [10] и [12]. Дело в том, что в простейших случаях, рассмотренных в [3]—[5], алгоритмы [3] и [10] совпадают. В связи с этим следует отметить, что работы [3]—[5] стимулировали работы [10], [12] автора.

В [3], [11] используются шеститочечные схемы

$$y_{\bar{t}\alpha} = \Lambda_\alpha (\sigma y^{j+\alpha/p} + (1-\sigma) y^{j+(\alpha-1)/p}), \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1.$$

В [12] для $p=2$, $\sigma = 0.5$ показано, что эти схемы сходятся в среднем со скоростью $O(\|h^2\|) + O(\|\tau\|_2)$ на произвольной последовательности неравномерных сеток $\omega_h^{(2)}$. При $p > 2$ указанная оценка имеет место, если выполнен принцип максимума.

Покажем, что метод расщепления [7]—[9] сохраняет максимальный порядок точности $O(h^2) + O(\tau^2)$ на произвольных неравномерных сетках Ω_0. Не ставя своей целью давать обобщение этого метода для общего уравнения (1.1_0) и произвольного p, проведем изложение для случая $c=1$, $r_\alpha = 0$, $q=0$, $f=0$ и $p=2$. Тогда схему [7] можно записать в виде

$$y_{t_1} = 0.5\,[\Lambda_1 (y^j + y^{j+1/2}) + \Lambda_2 y^j] + \frac{1}{4}\tau \Lambda_1 \Lambda_2 y^j, \qquad y_{\bar{t}_2} = 0.5 \Lambda_2 y^{j+1}, \tag{11}$$

где $\Lambda_\alpha y = (a_\alpha (x, t_{j+1/2})\, y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}$, a_α определяется по формулам § 1, п. 3, причем в данном случае k_α непрерывен и $\widetilde{k}_\alpha = k_\alpha$ (в [7] $a_\alpha = k_\alpha^{(-0.5\alpha)}$ и сетка ω_h равномерна).

Метод применим для параллелепипеда $\overline{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha\}$ и может быть обобщен (см. [7]) на случай областей, составленных из параллелепипедов. Второе уравнение пишется также при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$ и используется для определения граничных значений $y^{j+1/2}$ при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$. Исключая из (11) $y^{j+1/2}$, получим

$$y_{\bar{t}} = 0.5\,\Lambda (y^{j+1} + y^j) - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 y_{\bar{t}}. \tag{12}$$

Отсюда для z находим

$$z_{\bar{t}} = 0.5\,\Lambda (z^{j+1} + z^j) - \frac{1}{4}\tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 z_{\bar{t}} + \Psi; \qquad z|_\gamma = 0, \quad z(x, 0) = 0, \tag{13}$$

где $\Psi = 0.5\,\Lambda (u^{j+1} + u^j) - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 u_{\bar{t}} - u_{\bar{t}}$. На равномерной сетке $\Psi = O(h^2) + O(\tau^2)$. На неравномерной сетке Ω_0

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{2} (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi^*, \qquad \psi^* = \widetilde{\psi} + O(\tau^2) + O(h^2), \qquad \widetilde{\psi} = -\frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 u_{\bar{t}}. \tag{14}$$

Нетрудно убедиться в том, что $\widetilde{\psi} = O(\tau^2)$ на любой сетке $\overline{\Omega}_0$. Методы [14] и [17] позволяют без труда получить нужную априорную оценку для z при условии, что $|(a_\alpha)_{\bar t}| \leqslant c_1^*$, $c_1^* = \mathrm{const} > 0$. Умножая, как обычно, скалярно уравнение (12) на $2\tau z_{\bar t} H$, получим

$$2\tau \| z_{\bar t} \|^2 + I + 0.5\tau^3 (\Lambda_1\Lambda_2 z_{\bar t}, z_{\bar t}) = I^* + 2\tau (\Psi, z_{\bar t}) \tag{15}$$

$$I = I^{j+1} = \sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha^{j+1/2}, (z_{\bar x_\alpha}^{j+1})^2]_\alpha, \qquad I^* = \sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha^{j+1/2}, (z_{\bar x_\alpha}^{j})^2]_\alpha, \quad \check{I} = I^j \text{ (см. ниже)},$$

которое отличается от обычных тождеств, рассматривавшихся нами ранее, появлением члена $0.5\tau^3(\Lambda_1\Lambda_2 z_{\bar t}, z_{\bar t})$. В [22], где была получена априорная оценка для задачи (13) на равномерной сетке, этот член преобразуется двукратным применением формулы Грина по направлениям x_1 и x_2. (Подстановки обращаются в нуль, так как $z_{\bar x_\alpha} = 0$ при $x_\beta = 0$, $x_\beta = l_\beta$ для $\beta \neq \alpha$.) Оценка [22] справедлива и в нашем случае

$$\tau^3 (\Lambda_1\Lambda_2 z_{\bar t}, z_{\bar t}) \geqslant 0.5 c_1^2 \tau^3 \| z_{\bar x_1 \bar x_2 \bar t} \|^2 - M\tau(I + \check{I}),$$

если $|(a_\alpha)_{\bar x_\beta}| \leqslant \mathrm{const}$ при $\alpha \neq \beta$.

Преобразуем теперь $2\tau(\psi, z_{\bar t})$, учитывая, что, где $\psi = \psi_1 + \psi_2$, $\psi_\alpha = (\mu_\alpha)_{\hat x_\alpha}$,

$$\tau((\mu_\alpha)_{\hat x_\alpha}, z_{\bar t}) = -\tau((\mu_\alpha, z_{\bar x_\alpha}]_\alpha)_{\bar t} + \tau((\mu_\alpha)_{\bar t}, \check{z}_{\bar x_\alpha}]_\alpha,$$

$$2\tau(\psi^*, z_{\bar t}) \leqslant \tau \| \psi^* \|^2 + \tau \| z_{\bar t} \|^2.$$

В результате получим энергетическое неравенство при $\| \tau \|_0 < \tau_0$:

$$(1 - M)\ I \leqslant (1 + M\tau)\check{I} - \sum_{\alpha=1}^{2} ((\mu_\alpha, z_{\bar x_\alpha})_\alpha)_{\bar t}\tau + M\tau(\| \mu_{\bar t} \|^2 + \| \psi^* \|^2 + \tau^4 \| \Lambda_1\Lambda_2 u_{\bar t} \| \tag{16}$$

где

$$\| \mu \| = \sum_{\alpha=1}^{2} \| \mu_\alpha \|_{2\alpha}.$$

Отсюда, по аналогии с [12] и § 2, находим

$$\| z(x, t) \| \leqslant M \{ \overline{\| \mu(x, t) \|} + \overline{\| \mu_{\bar t}(x, t) \|} + \overline{\| \psi^*(x, t) \|} + \overline{\tau^2 \| \Lambda_1\Lambda_2 u_{\bar t} \|} \} \tag{17}$$

при достаточно малом $\| \tau \|_0 < \tau_0$.

Тем самым доказано, что схема (11) сохраняет второй порядок точности на произвольной неравномерной сетке $\overline{\Omega}_0$:

$$\| y - u \| \leqslant M (\| \hbar^2 \| + \| \tau^2 \|_2) \quad \text{при} \quad \| \tau \| < \tau_0. \tag{18}$$

Отметим, что требования гладкости, предъявляемых к решению $u = u(x, t)$ и коэффициентам дифференциального уравнения, при которых справедливы оценки (17) и (18), возрастают с ростом числа измерений (см. [7]—[9], ср. с п. 1, § 3). Представляет интерес вопрос о возможности снять ограничение $|(a_\alpha)_{\bar x_\beta}| < \mathrm{const}$, при наличии которого возникают сомнения по поводу применимости этого метода в случае разрывных коэффициентов и квазилинейных уравнений, когда $k_\alpha = k_\alpha(x, t, u)$.

Замечание. В [2] предложена схема

$$y_{\bar t_1} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j, \qquad y_{\bar t_2} = \Lambda_2 y^{j+1} - \Lambda_2 y^j = \tau\Lambda_2 y_{\bar t}$$

первого порядка аппроксимации. Нетрудно показать, что схема

$$y_{\bar t_1} = 0.5\Lambda_1 y^{j+1/2} + y^j) + \Lambda_2 y^j, \qquad y_{\bar t_2} = 0.5\tau\Lambda_2 y_{\bar t}$$

приводит к уравнению (12) и, следовательно, имеет второй порядок точности. Для этой схемы справедливы оценки (17) и (18).

Поступила в редакцию
26.01.1963

Цитированная литература

1. J. Douglas. On the numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ by implicit methods. J. Soc. Ind. und Appl. Math., 1955, **3**, 42—65.
2. J. Douglas, H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three variables. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **82**, № 2, 421—439.
3. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1207—1210.
4. Н. Н. Яненко. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов). Докл. АН СССР, 1960, **134**, № 5, 1034—1036.
5. Н. Н. Яненко. О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности. Изв. высш. учебных заведений. Сер. матем., 1961, **4**(23), 148—157.
6. G. A. Baker, T. A. Oliphant. An implicit numerical method of solving the two-dimensional heat equation. Quart. Appl. Math., 1960, **17**, № 4, 361—373.
7. Е. Г. Дьяконов. О некоторых разностных схемах для решения краевых задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 1, 57—79; № 3, 512.
8. Е. Г. Дьяконов. О построении разностных схем с расщепляющимся оператором для нестационарных задач. Успехи матем. наук, 1962, **17**, вып. 4.
9. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 4, 549—568.
10. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. матем. и физ., 1962, **2**, № 5, 787—811.
11. Н. Н. Яненко. О сходимости метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 5, 933—937.
12. А. А. Самарский. О сходимости метода дробных шагов для уравнения теплопроводности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 6, 1117—1121.
13. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 5, 812—832.
14. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 2, 266—298.
15. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 3, 441—460.
16. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 1, 25—56.
17. А. А. Самарский. О сходимости и точности однородных разностных схем для одномерных и многомерных параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 4, 603—634.
18. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 5—63.
19. В. И. Лебедев. О задаче Дирихле и Неймана на треугольных и шестиугольных сетках. Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 1, 39—36.
20. В. И. Лебедев. К вопросу об оценке погрешности метода сеток для полигармонических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 4, 593—602.
21. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 2. М., Физматгиз, 1960.
22. Е. Г. Дьяконов. Решение некоторых многомерных задач математической физики при помощи метода сеток. Дисс. канд. физ.-матем. н., МИАН СССР, М., 1962.