ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 3 Сентябрь 1963 Октябрь № 5

УДК 518 : 517.944/.947

СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

В [1] была предложена экономичная схема, имеющая точность $O(h^4 + \tau^2)$, где h — шаг пространственной сетки, τ — шаг по времени, для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \qquad p \leqslant 4.$$

Эта схема является трехслойной.

В данной работе (§ 2— § 4) рассматриваются двухслойные схемы $O(h^4 + \tau^2)$ (порядка четыре — два), пригодные для $p \leqslant 3$*). Для их реализации используется ряд алгоритмов расщепления или алгоритмов переменных направлений, требующих практически того же числа операций, что и соответствующие алгоритмы $O(h^2 + \tau^2)$ (см. [2] — [6]). Показано, что эти схемы абсолютно устойчивы и при любых значениях $\gamma = \tau/h^2$ сходятся в среднем со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$. В § 5 рассматривается трехслойная схема порядка четыре — два, более экономичная по сравнению со схемой из [1] и пригодная для $p \leqslant 4$. Эта схема абсолютно устойчива и сходится при любых γ (схема из [1] сходится при $\gamma \geqslant \gamma_0 = \text{const} > 0$).

В § 6 предложена схема порядка четыре — два для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \qquad \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant c_1 \sum_{\alpha=1}^{2} \xi_\alpha^2, \qquad a_{\alpha\beta} = \text{const}.$$

В § 7 рассматриваются двухслойные схемы того же порядка точности для уравнения с переменными коэффициентами

$$c(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f(x, t), \qquad x = (x_1, \ldots, x_p), \quad p \leqslant 2.$$

§ 1. Схема повышенного порядка точности для одномерного уравнения теплопроводности

1. Пусть в прямоугольнике $\overline{D} = (0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ дана задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \qquad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad f = f(x, t), \tag{1}$$

*) Примечание при корректуре. После того как работа была сдана в печать, нам удалось доказать, что указанная схема абсолютно устойчива и сходится в $L_2(\omega_h)$ со скоростью $O(|h|)^4 + \tau^2)$. Соответствующее доказательство будет опубликовано отдельно.

$$u(0, t) = u_1(t), \qquad u(l, t) = u_2(t); \qquad u(x, 0) = u_0(x). \tag{2}$$

Введем разностную сетку $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, \ t_j) \in \overline{D}\}$, где $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, \ 0 \leqslant i \leqslant N, \ h = l/N\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_j, \ 0 \leqslant j \leqslant K, \ t_0 = 0, \ t_K = T\}$. Сетка $\overline{\omega}_h$ равномерна, а $\overline{\omega}_\tau$ — произвольная неравномерная сетка по времени с шагом $\tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$. Будем пользоваться обозначениями [7], полагая

$$y = y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1}), \qquad \check{y} = y^j, \quad y^{(\pm 1)} = y(x_i \pm h, t_{j+1}), \qquad \tau = \tau_{j+1},$$
$$y_{\bar{x}} = (y - y^{(-1)})/h, \qquad y_x = (y^{(+1)} - y)/h, \qquad y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau, \qquad \Lambda y = y_{\bar{x}x}.$$

Для написания схемы повышенного порядка точности используем асимптотическое разложение

$$\Lambda u = u_{\bar{x}x} = Lu + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^4) = Lu + \frac{h^2}{12} L\left(\frac{\partial u}{\partial t} - f\right) + O(h^4),$$

где u — решение уравнения (1). Отсюда следует

$$0.5\Lambda(u + \check{u}) = (Lu)^{j+1/2} + \frac{h^2}{12}\Lambda(u_{\bar{t}} - f) + O(h^4) + O(\tau^2),$$

где $u^{j+1/2} = u(x, t_{j+1/2})$, $t_{j+1/2} = 0.5(t_j + t_{j+1})$, т. е. схема

$$y_{\bar{t}} = 0.5\Lambda(y + \check{y}) - \frac{h^2}{12}\Lambda y_{\bar{t}} + \varphi, \tag{3}$$
$$\varphi = \left(f + \frac{h^2}{12}\Lambda f\right)^{j+1/2} = \left\{\frac{1}{12}(f^{(+1)} + f^{(-1)}) + \frac{5}{6} f\right\}^{j+1/2}$$

имеет четвертый порядок аппроксимации по h и второй по τ.

Схему (3) обычно записывают в виде

$$y_{\bar{t}} = \sigma\Lambda y + (1 - \sigma)\Lambda\check{y} + \varphi; \qquad y_0 = u_1, \quad y_N = u_2; \quad y(x, 0) = u_0(x), \tag{4}$$

$$\sigma = 0.5\left(1 - \frac{h^2}{6\tau}\right) = 0.5\left(1 - \frac{1}{6\gamma}\right), \qquad \gamma = \tau/h^2. \tag{5}$$

Для определения $y = y^{j+1}$ получаем задачу:

$\tau\sigma\Lambda y - y = -F, \qquad y_0 = u_1, \quad y_N = u_2; \qquad F = \check{y} + \tau(1 - \sigma)\Lambda\check{y} + \tau\varphi,$

или

$$\sigma\gamma y_{i-1} - (1 - 2\sigma\gamma) y_i + \sigma\gamma y_{i+1} = -F_i, \qquad y_0 = u_1, \qquad y_N = u_2. \tag{6}$$

Решение этой задачи при любых значениях γ, т. е. при $-\infty < \sigma < 0.5$, может быть найдено по известным формулам прогонки [8], [9]:

$$\alpha_{i+1} = \frac{\sigma\gamma}{1 + \sigma\gamma + \sigma\gamma(1 - \alpha_i)}, \qquad \alpha_1 = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N - 1,$$
$$\beta_{i+1} = \frac{\sigma\gamma\beta_i + F_i}{1 + \sigma\gamma + \sigma\gamma(1 - \alpha_i)}, \qquad \beta_1 = u_1, \qquad i = 1, 2, \ldots, N - 1,$$
$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad y_N = u_2, \qquad i = 1, 2, \ldots, N = 1.$$

Счет по этим формулам всегда устойчив, так как

$$\sigma\gamma = 0.5\gamma - \frac{1}{12} > -\frac{1}{12}.$$

Замечание. В книге [9] на стр. 108 и 109 рассматриваются отдельно схемы 6 и 12. Нетрудно убедиться в том, что обе эти схемы алгебраически тождественны схеме (4).

2. Для выяснения порядка точности схемы (4) надо оценить решение задачи

$$z_{\bar t} = \sigma\Lambda z + (1-\sigma)\Lambda\check z + \psi, \qquad z_0 = z_N = 0, \qquad z(x, 0) = 0, \tag{7}$$

где $z = y - u$, u — решение задачи (1) — (2), y — решение задачи (4), $\psi = \sigma\Lambda u + (1-\sigma)\Lambda\check u + \varphi - u_{\bar t}$ — погрешность аппроксимации схемы (4).

Нам не удалось обнаружить в литературе доказательства равномерной сходимости со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$ схемы (4). Поэтому мы сочли возможным привести это доказательство здесь, несмотря на его элементарность. К тому же аналогичный метод применяется нами в § 4 при изучении сходимости многомерных схем такого же порядка точности. В работе [10], где была сделана попытка получить соответствующую оценку, имеется, как сообщил нам В. Б. Андреев, ошибка (в теореме 5 вместо условия $2\eta - 1 > 0$ должно быть $2\eta - 1 < 0$, или $\sigma > 0.5$, так как $\eta = 1 - \sigma$).

3. Рассмотрим более общую задачу

$$z_{\bar t} = \Lambda z - \tau\eta\Lambda z_{\bar t} + \psi, \qquad z_0 = z_N = 0, \qquad z(x, 0) = z^0(x), \tag{8}$$

где η — произвольный параметр, и выясним условия, при которых схема (8) абсолютно устойчива по начальным данным и правой части. Полагая в (8)

$$\eta = 1 - \sigma = 0.5\left(1 + \frac{1}{6\gamma}\right), \tag{9}$$

получим схему (4).

Нам понадобятся обозначения из [7]:

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \qquad (y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h, \qquad \|y\|_0 = \max_{\overline{\omega}_h} |y_i|,$$

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}, \qquad \|v_{\bar x}\| = \sqrt{(1, v_{\bar x}^2]}$$

(y, v — произвольные функции, заданные на $\overline{\omega}_h$), а также разностная формула Грина

$$(y, v_x) = -(v, y_{\bar x}], \qquad \text{если} \quad y_0 = y_N = 0.$$

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\|v_{\bar x}\|^2 \leqslant \frac{4}{h^2}\|v\|^2, \tag{10}$$

где v — произвольная сеточная функция, заданная на $\overline{\omega}_h$, $v_0 = v_N = 0$.

В самом деле, $h^2\|v_{\bar x}\|^2 = (v - v^{(-1)}, v - v^{(-1)}] \leqslant 2(v^2 + (v^{(-1)})^2, 1]$.

Напишем энергетическое тождество для (8). Умножая уравнение (8) скалярно на $\tau z_{\bar t}$ и учитывая, что

$$vv_{\bar t} = 0.5(v^2)_{\bar t} + 0.5\tau v_{\bar t}^2 \qquad (v_{\bar t}^2 = (v_{\bar t})^2), \tag{11}$$

получим

$$\tau\|z_{\bar t}\|^2 + 0.5\tau(\|z_{\bar x}\|^2)_{\bar t} = (\eta - 0.5)\tau\|z_{\bar x\bar t}\|^2 + \tau(\psi, z_{\bar t}).$$

Если $\eta \leqslant 0.5$ ($\sigma \geqslant 0.5$), то $\eta - 0.5 \leqslant 0$ и соответствующее слагаемое можно опустить, заменив знак $=$ на знак $\leqslant$. Этот случай хорошо изу-

чен. Поэтому рассмотрим случай $\eta \geqslant 0.5$ или $\sigma \leqslant 0.5$. Полагая в лемме 1 $v = z_{\bar{t}}$, найдем

$$\tau\,[1 - 4\,(\eta - 0.5)\,\gamma]\,\|z_{\bar{t}}\|^2 + 0.5\tau\,(\|z_{\bar{x}}\|^2)_{\bar{t}} \leqslant \tau\,(\psi,\, z_{\bar{t}}). \tag{12}$$

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$\eta \leqslant 0.5 + \frac{1}{4\gamma}\,(1 - \varepsilon), \qquad \varepsilon = \mathrm{const} > 0, \tag{13}$$

то схема (8) *абсолютно устойчива при любых* h *и* τ:

$$\frac{2}{\sqrt{l}}\,\|z^{j+1}\|_0 \leqslant \|z_{\bar{x}}^{j+1}\| \leqslant \|z_{\bar{x}}\,(x,\,0)\| + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\,\overline{\|\psi^{j+1}\|}, \tag{14}$$

где

$$\overline{\|\psi^{j+1}\|} = \left(\sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'}\,\|\psi^{j'}\|^2\right)^{1/2}. \tag{15}$$

Если

$$\eta \leqslant 0.5 + \frac{1}{4\gamma}, \tag{16}$$

то справедлива оценка

$$\|z_{\bar{x}}^{j+1}\| \leqslant \|z_{\bar{x}}\,(x,\,0)\| + M\,(\|\psi^{j+1}\| + \overline{\|\psi_{\bar{t}}^{j+1}\|}), \tag{17}$$

где M — *постоянная, зависящая только от* T *и* l.

Оценки (14) и (17) следуют из неравенства (12). Для доказательства (14) следует воспользоваться оценкой

$$\tau\,(\psi,\, z_{\bar{t}}) \leqslant \varepsilon\tau\,\|z_{\bar{t}}\|^2 + \frac{\tau}{4\varepsilon}\,\|\psi\|^2$$

и учесть (13). В случае (16) имеем

$$\tau\,(\psi,\, z_{\bar{t}}) = \tau\,(\psi,\, z)_{\bar{t}} - \tau\,(\psi_{\bar{t}},\, \check{z}) \leqslant \tau\,(\psi,\, z)_{\bar{t}} + c_0\tau\,\|\check{z}_{\bar{x}}\|^2 + \frac{\tau l^2}{4c_0}\,\|\psi_{\bar{t}}\|^2,$$

так как

$$\|z\|_0 \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2}\,\|z_{\bar{x}}\|. \tag{18}$$

Дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии с [7].

4. Вернемся к задаче (6). При сравнении (6) и (8) видно, что для схемы (6) $\eta = 0.5 + 1/12\gamma$, т. е. условие (13) выполнено. Теорема 1 дает (при $\varepsilon = \frac{2}{3}$)

$$\|z^{j+1}\|_0 \leqslant \frac{\sqrt{3l}}{4}\,\overline{\|\psi^{j+1}\|}. \tag{19}$$

Тем самым доказана

Теорема 2. *Если решение* $u = u\,(x,\, t)$ *задачи* (1) — (2) *удовлетворяет условиям, при которых схема* (4) *имеет максимальный порядок аппроксимации*

$$\|\psi\| \leqslant M\,(h^4 + \tau^2),$$

то схема (3) *равномерно сходится со скоростью* $O\,(h^4 + \tau^2)$, *так что на произвольной последовательности сеток* $\overline{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\|y\,(x,\, t_{j+1}) - u\,(x,\, t_{j+1})\|_0 \leqslant M'\,(h^4 + \|\tau^2\|_{j+1}), \qquad M' = \frac{\sqrt{3l}}{4}\,M,$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от сетки,

$$\|\tau^2\|_{j+1} = \left(\sum_{j'=1}^{j+1} (\tau_{j'}^2)^2\, \tau_{j'}\right)^{1/2}.$$

§ 2. Схемы повышенного порядка точности для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными

1. Рассмотрим уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \varkappa_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + f(x, t),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_p)$ — точка p-мерного евклидова пространства. Без ограничения общности можно считать $\varkappa_\alpha = 1$, так как этого всегда можно добиться, вводя новые переменные $x'_\alpha = x_\alpha/\sqrt{\varkappa_\alpha}$. Пусть $\overline{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ есть p-мерный параллелепипед, Γ — его граница, так что $\overline{G} = G + \Gamma$. Обозначим $Q_T = G \times (0 < t \leqslant T]$, $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$. В цилиндре $\overline{Q_T}$ ищется решение первой краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \qquad Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \qquad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \qquad (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}. \tag{2}$$

Введем разностные сетки. Пусть $\overline{\omega}_h = \{x_i \in \overline{G}\}$ — пространственная сетка; здесь $x_i = (i_1 h_1, \ldots, i_p h_p)$, $i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, p$, $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$. Сетка $\overline{\omega}_h$ равномерна лишь по каждой из пространственных переменных, но шаги h_α и h_β при $\alpha \neq \beta$, вообще говоря, различны. Обозначим $\omega_h = \{x_i \in G\}$ множество внутренних узлов, $\gamma = \{x_i \in \Gamma\}$ — множество граничных узлов, γ_α^- — множество узлов границы γ, у которых $x_\alpha = 0$, а γ_α^+ — множество узлов γ, у которых $x_\alpha = l_\alpha$.

Сетка $\overline{\omega}_\tau = \{t_j \in [0 \leqslant t \leqslant T],\ t_0 = 0,\ t_K = T,\ 0 \leqslant j \leqslant K\}$ неравномерна, ее шаг $\tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j > 0$ удовлетворяет лишь условию нормировки

$$\sum_{j'=1}^{K} \tau_{j'} = T.$$

Обозначим $\omega_\tau = \{t_j \in (0 < t \leqslant T]\}$, $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, $\Omega = \omega_h \times \omega_\tau$. Следуя [11], [12], будем пользоваться обозначениями $v = v(x_i, t_{j+1}) = v(x, t) = v^{j+1}$, $\check{v} = v^j$, $\tau = \tau_{j+1}$, $\check{\tau} = \tau_j$, $v^{(\pm 1_\alpha)} = v(x^{(\pm 1_\alpha)}, t)$, $x^{(\pm 1_\alpha)} = (i_1 h_1, \ldots, i_{\alpha-1} h_{\alpha-1}, (i_\alpha \pm 1) h_\alpha, i_{\alpha+1} h_{\alpha+1}, \ldots, i_p h_p)$, $v_{\bar{x}_\alpha} = (v - v^{(-1_\alpha)})/h_\alpha$, $v_{x_\alpha} = (v^{(+1_\alpha)} - v)/h_\alpha$, $v_{\bar{t}} = (v - \check{v})/\tau$; $|h| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_p^2}$.

2. Перейдем к выводу схем, имеющих четвертый порядок аппроксимации по $|h|$ и второй по τ (схем четвертого — второго порядка). По аналогии с § 1, п. 1 имеем

$$\Lambda_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = L_\alpha u + \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha L_\alpha u + O(h_\alpha^4).$$

Подставляя сюда из (1)

$$L_\alpha u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\beta \neq \alpha} L_\beta u - f,$$

находим

$$\Lambda_\alpha u = L_\alpha u + \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h_\alpha^2}{12} \sum_{\beta \neq \alpha} L_\alpha L_\beta u - \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha f + O(h_\alpha^4).$$

Отсюда следует, что оператор

$$0.5\,\Lambda(u + \check{u}) - \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \Lambda_\alpha u_{\bar{t}} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \left\{ \sum_{\beta \neq \alpha} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta \check{u} - \Lambda_\alpha f \right\}$$

имеет погрешность аппроксимации $O(|h|^4 + \tau^2)$ в классе достаточно гладких решений $u = u(x, t)$ уравнения (1) относительно оператора $(Lu)^{j+1/2}$. Поэтому разностная схема

$$y_{\bar{t}} = 0.5\Lambda(y + \check{y}) - \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \Lambda_\alpha y_{\bar{t}} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \sum_{\beta \neq \alpha}^{1-p} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta \check{y} + \varphi, \tag{3}$$

$$\varphi = \left(f + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \Lambda_\alpha f\right)^{j+1/2}, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha, \tag{4}$$

имеет на решении $u = u(x, t)$ погрешность аппроксимации

$$\psi = O(|h|^4 + \tau^2).$$

Введем обозначение

$$\sigma_\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - h_\alpha^2/6\tau) \tag{5}$$

и учтем, что $h_\alpha^2/12\tau = 0.5 - \sigma_\alpha$. Тогда схему (3) можно записать в виде

$$y_{\bar{t}} = \sum_{\alpha=1}^{p} [\sigma_\alpha \Lambda_\alpha y + (1 - \sigma_\alpha) \Lambda_\alpha \check{y}] + \tau R_p \check{y} + \varphi, \tag{6}$$

$$y = \mu \quad \text{при } x \in \gamma, \quad t \in \bar{\omega}_\tau; \qquad y(x, 0) = u_0(x) \quad \text{при } x \in \bar{\omega}_h, \tag{7}$$

где

$$R_p y = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta > \alpha} \frac{h_\alpha^2 + h_\beta^2}{12\tau} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} (1 - \sigma_\alpha - \sigma_\beta) \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y, \tag{8}$$

$$R_2 y = (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \Lambda_1 \Lambda_2 y, \qquad R_3 y = (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \Lambda_1 \Lambda_2 y + \tag{9}$$

$$+ (1 - \sigma_1 - \sigma_3) \Lambda_1 \Lambda_3 y + (1 - \sigma_2 - \sigma_3) \Lambda_2 \Lambda_3 y.$$

Полагая формально $\sigma_\alpha = 0.5$, получим из (6) симметричную схему второго порядка, а при $\sigma_\alpha = 1$ — чисто неявную схему.

В дальнейшем (6) будем называть *исходной* схемой.

3. Следуя [2] — [6], составим схему с расщепляющимся оператором на верхней строке, имеющую тот же порядок аппроксимации, как и схема (6). Такую схему будем называть *производящей* схемой. В случае $p = 2$ производящая схема, очевидно, имеет вид

$$(E - \tau\sigma_1\Lambda_1)(E - \tau\sigma_2\Lambda_2)\, y = (E + (1 - \sigma_1)\tau\Lambda_1)(E + \tau(1 - \sigma_2)\Lambda_2)\check{y} + \tau\varphi,$$

где E — единичный оператор, или

$$y_{\bar{t}} = \sum_{\alpha=1}^{2} [\sigma_\alpha \Lambda_\alpha y + (1 - \sigma_\alpha) \Lambda_\alpha \check{y}] + \tau R_2 \check{y} - \tau^2 \sigma_1 \sigma_2 \Lambda_1 \Lambda_2 y_{\bar{t}} + \varphi. \tag{10}$$

Сравнивая (6) и (10), видим, что производящая и исходная схемы имеют

одинаковый порядок аппроксимации в классе достаточно гладких решений уравнения (1).

В случае $p = 3$ выберем производящую схему

$$\prod_{\alpha=1}^{3} (E - \tau\sigma_\alpha\Lambda_\alpha)y = [E + \tau\sum_{\alpha=1}^{3} (1 - \sigma_\alpha)\Lambda_\alpha + \tau^2 R_3 + \tau^2 Q_3 - \tau^3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3]\check{y} + \tau\varphi, \tag{11}$$

где R_3 дается формулой (9), а

$$Q_3 = \sigma_1\sigma_2\Lambda_1\Lambda_2 + \sigma_1\sigma_3\Lambda_1\Lambda_3 + \sigma_2\sigma_3\Lambda_2\Lambda_3 = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta>\alpha}\sigma_\alpha\sigma_\beta\Lambda_\alpha\Lambda_\beta. \tag{12}$$

Перепишем (11) в виде

$$y_{\bar{t}} = \sum_{\alpha=1}^{3} [\sigma_\alpha\Lambda_\alpha y + (1 - \sigma_\alpha)\Lambda_\alpha\check{y}] + \tau R_3\check{y} - \tau^2 Q_3 y_{\bar{t}} + \tau^3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 y_{\bar{t}} + \varphi. \tag{13}$$

Нетрудно убедиться в том, что ее максимальный порядок аппроксимации в классе решений уравнения (1) есть $O(|h|^4 + \tau^2)$. Наряду с (13) будем рассматривать более простую производящую схему

$$y_{\bar{t}} = \sum_{\alpha=1}^{3} [\sigma_\alpha\Lambda_\alpha y + (1 - \sigma_\alpha)\Lambda_\alpha\check{y}] + \tau R_3\check{y} - \tau^2 Q_3 y_{\bar{t}} + \tau^2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 y + \varphi. \tag{14}$$

Итак, исходной задаче (1) — (2) ставится в соответствие разностная задача

$$\mathcal{L}_p[y] = 0 \quad \text{при} \quad (x, t)\in\Omega, \tag{15}$$

$$y = \mu(x, t) \text{ при } x\in\gamma, \quad t\in\bar{\omega}_\tau; \quad y(x, 0) = u_0(x) \text{ при } x\in\bar{\omega}_h, \tag{16}$$

где $\mathcal{L}_2[y] = 0$ — уравнение (10), $\mathcal{L}_3[y] = 0$ — уравнение (13) или (14).

§ 3. Вычислительные алгоритмы переменных направлений

1. Решение многомерной задачи (2.15) — (2.16) может быть сведено к последовательному решению одномерных алгебраических задач по направлениям $x_1, \ldots, x_p$ (см. [2] — [6], [15]). Обычно эту редукцию называют расщеплением (факторизацией) многомерного оператора на одномерные или просто расщеплением. Одной и той же производящей схеме соответствует несколько вычислительных алгоритмов переменных направлений. Так, например, нетрудно заметить, что алгоритмы [3] и [5] соответствуют одной и той же производящей схеме, которая является частным случаем схемы (2.13) при $\sigma_\alpha = 0.5$, и, следовательно, $R_p = 0$. Укажем еще один алгоритм для этой схемы. Полагая $y = \check{y} + \tau y_{\bar{t}}$, запишем эту производящую схему в виде

$$\prod_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y_{\bar{t}} = \Lambda\check{y} + \varphi, \qquad A_\alpha = E - 0.5\tau\Lambda_\alpha. \tag{1}$$

Отсюда следует алгоритм

$$\text{Б}'. \qquad A_1 v_{(1)} = \Lambda\check{y} + \varphi, \quad A_\alpha v_{(\alpha)} = v_{(\alpha-1)}, \quad \alpha > 1, \quad v_{(p)} = y_{\bar{t}}, \quad y = \check{y} + \tau v_{(p)}. \tag{2}$$

В соответствии с [5] для определения $v_{(\alpha)}$ при $x\in\gamma_\alpha$, $1 \leqslant \alpha < p$, следует

использовать формулы

$$v_{(\alpha)} = A_{\alpha+1} \ldots A_p y_{\bar{t}}, \qquad y_{\bar{t}} = (y^{j+1} - y^j)/\tau = (\mu_\alpha)_{\bar{t}}^{j+1},$$
$$\mu_\alpha = \mu \quad \text{при} \quad x \in \gamma_\alpha. \tag{3}$$

Этот алгоритм является более экономичным по сравнению с алгоритмом [2], [15]. В частности, он удобен для решения методом итераций стационарного уравнения

$$\Lambda y + \varphi = 0,$$

так как в этом случае $y_{\bar{t}} = 0$ при $x \in \gamma$ и для $v_{(\alpha)}$ получаем всегда однородные граничные условия $v_{(\alpha)} = 0$ при $x \in \gamma_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, p$.

2. Для производящей схемы (2.15) мы используем алгоритмы, предложенные в [2] — [6].

Рассмотрим сначала двумерную задачу ($p = 2$). Введем дробный шаг $t_{j+1/2}$ и обозначим $y_{(1)} = y^{j+1/2}$ соответствующее значение искомой функции y. Построим три одномерных алгоритма (см. [2], [3], [5]).

А.
$$y_{\bar{t}_1} = \frac{y_{(1)} - \check{y}}{\tau} = \sigma_1 \Lambda_1 y_{(1)} + F[\check{y}], \qquad y_{\bar{t}_2} = \frac{y_{(2)} - y_{(1)}}{\tau} = \sigma_2 \Lambda_2 y_{(2)}, \tag{4}$$

$$F[\check{y}] = \sum_{\alpha=1}^{2} (1 - \sigma_\alpha) \Lambda_\alpha \check{y} + (1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \tau \Lambda_1 \Lambda_2 \check{y}. \tag{5}$$

Краевые условия (2.16) заданы только для $\check{y}$ и y. Краевые значения для $y_{(1)}$, согласно [5], находим по формуле

$$y_{(1)} = A_2 y \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \qquad x_1 = l_1. \tag{6}$$

Порядок счета: из (6) определяются $y_{(1)}$ при $x \in \gamma_1$, по (5) вычисляется $F[\check{y}]$ и по одномерным формулам прогонки (см. § 1) решаются последовательно уравнения (4).

Б.
$$y_{\bar{t}_1} = \sigma_1 \Lambda_1 y_{(1)} + (1 - \sigma_1) \Lambda_1 \check{y} + \frac{1 - \sigma_2}{\sigma_1} \Lambda_2 \check{y} + \varphi, \tag{7}$$

$$y_{\bar{t}_2} = \sigma_2 \Lambda_2 y_{(2)} - \frac{(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)}{\sigma_1} \Lambda_2 \check{y}, \qquad y_{(2)} = y = y^{j+1}, \tag{8}$$

$$y_{(1)} = A_2 y + \frac{(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)}{\sigma_1} \tau \Lambda_2 \check{y} \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = l_1 \quad (x \in \gamma_1). \tag{9}$$

Порядок счета тот же, что и для А. Из (7) — (9) видно, что схема теряет смысл при $\sigma_1 = 0$. При определении y, в отличие от А, требуется помнить два слоя ($\check{y}$ и $y_{(1)}$). Полагая в (7) — (9) формально $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$, получаем схему $O(|h|^2 + \tau^2)$, а при $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ — схему $O(|h|^2 + \tau)$ (см. [2], [3]).

Предположим, что $u \equiv 0$ при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$. Этого всегда можно добиться, вычитая из $u(x, t)$ линейную по x_1 и совпадающую с $u(x, t)$ при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$ функцию. В этом случае задача (15) — (16) при $p = 2$ эквивалентна задаче

В.
$$y_{\bar{t}_1} = \sigma_1 \Lambda_1 y_{(1)} + (1 - \sigma_1) \Lambda_1 \check{y}, \qquad y_{(1)} = 0 \text{ при } x_1 = 0, \quad x_1 = l_1, \tag{10}$$
$$y_{\bar{t}_2} = \sigma_2 \Lambda_2 y_{(2)} + (1 - \sigma_2) \Lambda_2 y_{(1)} + \Phi, \qquad y_{(2)} = \mu^{j+1} \tag{11}$$
$$\text{при} \quad x_2 = 0, \quad x_2 = l_2,$$

$$A_1\Phi = \Phi - \sigma_1\tau\Lambda_1\Phi = \varphi, \qquad \Phi = 0 \text{ при } x_1 = 0, \quad x_1 = l_1. \tag{12}$$

Уравнение (11) решается в области ($0 < x_1 < l_1$, $0 \leqslant x \leqslant l_2$), причем найденное значение $y_{(1)}$ при $x_2 = 0$, $x_2 = l_2$ используется для решения задачи (26). Порядок счета: задача (10) на всей сетке $\overline{\omega}_h \to$ задача (12) на сетке $\omega_h \to$ задача (11) на $\omega_{\tilde{h}}$.

Исключая $y_{(1)}$, нетрудно убедиться, что все алгоритмы А, Б, В эквивалентны производящей схеме (2.15) — (2.16) при $p = 2$. Полагая $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$, получим известные алгоритмы для схем точности $O(|h|^2 + \tau^2)$. В нашем случае $\sigma_\alpha = 0.5\,(1 - h_\alpha^2/6\tau)$. Объем вычислений для схем порядка $O(|h|^2 + \tau^2)$ и $O(|h|^4 + \tau^2)$ практически один и тот же. Повышение порядка точности достигается лишь соответствующим выбором параметров σ_1 и σ_2.

3. Аналогично строятся одномерные алгоритмы переменных направлений и для трехмерной производящей схемы ($p = 3$). Напишем только алгоритмы А и Б′. Введем два дробных шага $t_{j+1/3}$ и $t_{j+2/3}$ и соответствующие значения $y_{(1)}$ и $y_{(2)}$, полагая $y_{(3)} = y = y^{j+1}$, $\check{y} = y^j$.

А.

$$y_{\bar{t}_1} = \sigma_1\Lambda_1 y_{(1)} + F[\check{y}], \qquad y_{\bar{t}\alpha} = \frac{y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)}}{\tau} = \sigma_\alpha\Lambda_\alpha y_{(\alpha)}, \qquad \alpha > 1, \tag{13}$$

$$F[\check{y}] = F_1[\check{y}] = \sum_{\alpha=1}^{3}(1 - \sigma_\alpha)\Lambda_\alpha\check{y} + \tau(R_3 + Q_3)\check{y} + \varphi \text{ для схемы (2.14)}, \tag{14}$$

$$F[\check{y}] = F_2[\check{y}] = F_1[\check{y}] - \tau^2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\check{y} \quad \text{для схемы (2.13)}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} y_{(1)} &= A_2A_3y \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = l_1, \\ y_{(2)} &= A_3y \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad x_2 = l_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Б′.

$$A_1v_{(1)} = \Lambda\check{y} + \tau R_3\check{y} + \varphi, \tag{17}$$

$$A_\alpha v_\alpha = v_{(\alpha-1)} \text{ или } v_{\bar{t}_\alpha} = \sigma_\alpha\Lambda_\alpha v_{(\alpha)}, \quad \alpha = 2,3; \quad v_{(3)} = y_{\bar{t}}, \tag{18}$$

$$y = \check{y} + \tau v_{(3)}. \tag{19}$$

К этим формулам следует присоединить краевые условия (16). Исключая из (17) — (18) $v_{(1)}$ и $v_{(2)}$, получим для $v_{(3)} = y_{\bar{t}}$ схему

$$A_1A_2A_3y_{\bar{t}} = \Lambda\check{y} + \tau R_3\check{y} + \varphi, \qquad A_\alpha = E - \tau\sigma_\alpha\Lambda_\alpha,$$

которая совпадает с производящей схемой (2.13), в чем можно убедиться, проведя очевидные преобразования.

Алгоритм Б′ является трехслойным. При определении $v_{(\alpha)}$ надо помнить не только $v_{(\alpha-1)}$, но и значения $\check{y}$. Однако алгоритм (17) — (19) является более экономичным по числу операций, чем трехслойная схема, полученная в [1] для $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$. При $\sigma_\alpha = 0.5$, $\alpha = 1, 2, 3$ ($R_3 = 0$), мы получаем из (17) — (19) алгоритм, дающий точность $O(|h|^2 + \tau^2)$ (ср. [2], [15], [12]).

§ 4. Устойчивость и сходимость

1. Покажем, что все указанные в § 3 алгоритмы являются абсолютно устойчивыми на произвольной сетке $\overline{\Omega}$ и в самом деле имеют точность

$O(|h|^4+\tau^2)$. Для исследования надо обратиться к производящей схеме (2.15) — (2.16). Отметим, что в [1] устойчивость и сходимость проведены для исходной схемы. Этого недостаточно для обоснования метода. Пусть y — решение задачи (2.15) — (2.16), а $u=u(x,t)$ — решение задачи (2.1) — (2.2). Подставляя $y=z+u$ в (2.15) — (2.16), получим для сеточной функции $z=y-u$ условия

$$z_{\bar t}=\sum_{\alpha=1}^{p}[\sigma_\alpha\Lambda_\alpha z+(1-\sigma_\alpha)\Lambda_\alpha\check z]+\tau R_p\check z-\tau^2 Q_p z_{\bar t}+\delta_{p,3}\tau^3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 z_{\bar t}+\Psi, \tag{1}$$

$$z=0 \text{ при } x\in\gamma,\quad t\in\bar\omega_\tau;\qquad z(x,0)=0 \text{ при } x\in\bar\omega_h, \tag{2}$$

$$R_p=\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha}(1-\sigma_\alpha-\sigma_\beta)\Lambda_\alpha\Lambda_\beta, \tag{3}$$

$$Q_p=\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha}\sigma_\alpha\sigma_\beta\Lambda_\alpha\Lambda_\beta. \tag{4}$$

Здесь $\delta_{p,3}$ — символ Кронекера, а Ψ — погрешность аппроксимации производящей схемы

$$\Psi=\psi-\tau^2 Q_p u_{\bar t}+\delta_{p,3}\tau^3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 u_{\bar t}, \tag{5}$$

где ψ — погрешность аппроксимации исходной схемы.

Пусть $C_{(n)}^{(m)}$ — класс функций, имеющих ограниченные в $\bar Q_t$ производные по x_α, $\alpha=1,\ldots,p$, до m-го порядка и по t до n-го порядка включительно.

Если $u=u(x,t)\in C_{(3)}^{(6)}$, то производящая схема (2.15) имеет четвертый — второй порядки аппроксимации

$$\Psi=O(|h|^4+\tau^2) \tag{6}$$

на решении $u=u(x,t)$ уравнения (2.1).

В самом деле, при любых h и τ имеем $\psi=O(|h|^4+\tau^2)$. Если $0\leqslant\sigma_\alpha<1/2$, то $Q_p u_{\bar t}$ и $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3(u-\check u)$ ограничены; поэтому $\Psi=\psi+O(\tau^2)$. Пусть, например, $\sigma_2\geqslant 0$, $\sigma_3\geqslant 0$, а $\sigma_1<0$, т. е. $(h_1^2/6\tau)>1$ и, следовательно, $|\sigma_1|\leqslant h_1^2/12\tau$. В этом случае

$$\tau^2|\sigma_1\sigma_\alpha\Lambda_1\Lambda_\alpha u_{\bar t}|\leqslant\frac{\tau h_1^2}{24}|\Lambda_1\Lambda_\alpha u_{\bar t}|\leqslant M(\tau^2+h_1^4),\qquad \alpha=2,3,$$

и т. д. Нетрудно убедиться в том, что $\Psi=\psi+O(|h|^4)$, если все $\sigma_\alpha<0$. Тем самым справедливость оценки (6) доказана. Отметим лишь, что при $\sigma_\alpha<0$, $\alpha=1,2,3$, требуется, чтобы производная $\partial^6u/\partial x_1^2\partial x_2^2\partial x_3^2$ удовлетворяла условию Липшица по t, так как $\tau^3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\leqslant 12^{-3}h_1^2h_2^2h_3^2$, а $h_\alpha^2>6\tau$.

В дальнейшем мы будем всюду подразумевать, что условия, при которых производящая схема (2.15) имеет максимальный порядок аппроксимации (6), выполнены.

2. Исследование устойчивости и точности, по аналогии со случаем $p=1$, § 1, проведем методом энергетических неравенств. Введем скаляр-

ные произведения

$$(y, v) = \sum_{\omega_h} yvH, \qquad (y, v]_\alpha = \sum_{\omega_h^{+\alpha}} yvH, \qquad H = h_1 \ldots h_p,$$

где $\omega_h^{+\alpha} = \omega_h + \gamma_\alpha^+$, и связанную с ними норму

$$\| v \| = \sqrt{(v, v)}, \qquad \| v_{\bar{x}_\alpha} \| = \sqrt{(v_{\bar{x}_\alpha}, v_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha}.$$

Лемма 2. *Пусть v — сеточная функция, заданная на $\bar{\omega}_h$ и равная нулю на границе γ сетки $\bar{\omega}_h$ ($v = 0$ при $x \in \gamma$). Тогда справедливы соотношения*

$$\| v \|^2 \leqslant \frac{l_\alpha^2}{4} \| v_{\bar{x}_\alpha} \|^2, \qquad \| v \|^2 \leqslant M_0 I, \qquad I = \sum_{\alpha=1}^{p} \| v_{\bar{x}_\alpha} \|^2,$$

$$M_0 = \frac{1}{4} \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{l_\alpha^2} \right)^{-1}, \tag{7}$$

$$(v, \Lambda_\alpha v) = - \| v_{\bar{x}_\alpha} \|^2, \qquad (v, \Lambda_\alpha \Lambda_\beta v) = - (v_{\bar{x}_\alpha}, \Lambda_\beta v_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha = \| v_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta} \|^2, \quad \alpha \neq \beta. \tag{8}$$

На доказательстве леммы, ввиду его элементарности, не останавливаемся.

Лемма 3. *Пусть z — сеточная функция, заданная на $\bar{\omega}_h$, причем $z|_\gamma = 0$. Тогда справедливы соотношения*

$$2 (\Lambda_\alpha \Lambda_\beta \check{z}, z_{\bar{t}}) = (\| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta} \|^2)_{\bar{t}} - \tau \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta \bar{t}} \|^2, \quad \alpha \neq \beta, \tag{9}$$

$$h_1^2 \| z_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3} \|^2 \leqslant 4 \| z_{\bar{x}_2 \bar{x}_3} \|^2, \tag{10}$$

$$h_1^2 h_2^2 \| z_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3} \|^2 \geqslant 16 \| z_{\bar{x}_3} \|^2. \tag{11}$$

Тождество (9) следует из (8) и формулы $2\check{v} v_{\bar{t}} = (v^2)_{\bar{t}} - \tau v_{\bar{t}}^2$. В силу леммы 1 имеем $h_\alpha^2 \| v_{\bar{x}_\alpha} \|^2 \leqslant 4 \| v \|^2$. Полагая $v = z_{\bar{x}_2 \bar{x}_3}$, получаем (10). Двукратное применение леммы 1 дает $h_1^2 h_2^2 \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|^2 \leqslant 4^2 \| v \|^2$, где $v = z_{\bar{x}_3}$.

3. Перейдем к выводу априорных оценок для решения уравнения (1) с нулевыми граничными условиями

$$z = 0 \quad \text{при } x \in \gamma. \tag{12}$$

Перепишем уравнение (1) в виде

$$z_{\bar{t}} = 0.5 \Lambda (z + \check{z}) - \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \Lambda_\alpha z_{\bar{t}} + \tau R_p \check{z} - \tau^2 Q_p z_{\bar{t}} + \tag{13}$$

$$+ \delta_{p,3} \tau^3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 z_{\bar{t}} + \Psi, \qquad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha.$$

Умножая (13) скалярно на $2 z_{\bar{t}}$, пользуясь формулой Грина и учитывая, что $z|_\gamma = 0$, получим основное энергетическое тождество

$$2\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + I + 2\tau^3 (Q_p z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}) + 2\delta_{p,3} \tau^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \| z_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{t}} \|^2 = \tag{14}$$

$$= \check{I} + \frac{\tau}{6} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{t}} \|^2 + 2\tau^2 (R_p \check{z}, z_{\bar{t}}) + 2\tau (\Psi, z_{\bar{t}}).$$

В силу леммы 3 имеем

$$2\tau^2 (R_p\check{z}, z_{\bar{t}}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta>\alpha} (1-\sigma_\alpha-\sigma_\beta) [\tau^2 (\| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta} \|^2)_{\bar{t}} - \tau^3 \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta \bar{t}} \|^2], \quad (15)$$

$$2\tau^3 (Q_p z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}) = 2\tau^3 \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta>\alpha} \sigma_\alpha\sigma_\beta \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta \bar{t}} \|^2. \quad (16)$$

Учитывая затем, что

$$1-\sigma_\alpha-\sigma_\beta+2\sigma_\alpha\sigma_\beta=0.5\,[1+(1-2\sigma_\alpha)(1-2\sigma_\beta)] \geqslant 0.5, \text{ так как } \sigma_\alpha \leqslant 0.5, \quad (17)$$

находим

$$2\tau^3 (Q_p z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}) - 2\tau^2 (R_p\check{z}, z_{\bar{t}}) = 0.5\tau^3 \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta>\alpha} [1 + \quad (18)$$

$$+(1-2\sigma_\alpha)(1-2\sigma_\beta)] \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta \bar{t}} \|^2 - \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta>\alpha} \frac{h_\alpha^2+h_\beta^2}{12} (\| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta} \|^2)_{\bar{t}}.$$

После подстановки (18) в (14) получим

$$2\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + I + 0.5\tau^3 \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} [1 + (1-2\sigma_\alpha)(1-2\sigma_\beta)] \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta \bar{t}} \|^2 + \quad (19)$$

$$+ 2\delta_{p,3}\tau^4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{t}} \|^2 = \check{I} + \frac{\tau}{6} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{t}} \|^2 +$$

$$+ \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} \frac{h_\alpha^2+h_\beta^2}{12} (\| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta} \|^2)_{\bar{t}} + 2\tau (\Psi, z_{\bar{t}}).$$

Лемма 1 дает

$$\frac{\tau}{6} \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{t}} \|^2 \leqslant \frac{2}{3} p\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 \leqslant 2\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 \text{ при } p \leqslant 3. \quad (20)$$

4. Рассмотрим отдельно случаи $p = 2$ и $p = 3$. Пусть $p = 2$. Оценивая

$$2\tau (\Psi, z_{\bar{t}}) \leqslant \tfrac{2}{3}\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + \tfrac{3}{2}\tau \| \Psi \|^2,$$

получим из (19) и (20) энергетическое неравенство

$$I^{j'+1} + 0.5\tau_{j'+1}^3 \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}}^{j'+1} \|^2 \leqslant I^{j'} + \frac{h_1^2+h_2^2}{12} \tau_{j'+1} (\| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^{j'+1} \|^2)_{\bar{t}} + \frac{3}{2} \tau_{j'+1} \| \Psi^{j'+1} \|^2.$$

Просуммируем по $j' = 0, 1, \ldots, j$:

$$I^{j+1} \leqslant I^0 + \frac{h_1^2+h_2^2}{12} \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^{j+1} \|^2 + \frac{3}{2} \left(\overline{\| \Psi^{j+1} \|} \right)^2, \quad (21)$$

где

$$\overline{\| \Psi^{j+1} \|} = \left(\sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} \| \Psi^{j'} \|^2 \right)^{1/2}. \quad (22)$$

Воспользуемся теперь леммой 1, в силу которой

$$(h_1^2 + h_2^2) \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2} \|^2 \leqslant 4I.$$

Отсюда и из (21) следует

$$I^{j+1} \leqslant \tfrac{3}{2} I^0 + \tfrac{9}{4} \left(\overline{\| \Psi^{j+1} \|} \right)^2.$$

Пользуясь леммой 2, находим

$$\| z^{j+1} \| \leqslant \sqrt{\tfrac{3}{2} M_0} \left(\| z_{\bar{x}_1}(x, 0) \| + \| z_{\bar{x}_2}(x, 0) \| \right) + \tfrac{3}{2} \sqrt{M_0} \, \| \overline{\Psi^{j+1}} \|, \quad (23)$$

где

$$M_0 = \frac{1}{4} \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{l_\alpha^2} \right)^{-1} = \frac{l_1^2 l_2^2}{4 (l_1^2 + l_2^2)}.$$

Тем самым доказана

Теорема 3. *Производящая схема* (1) *при* $p = 2$ *всегда устойчива по начальным данным и по правой части на любой последовательности сеток* $\overline{\Omega}$, *так что для решения уравнения* (1) *с краевыми условиями* $z|_\gamma = 0$ *справедлива оценка* (23). *Для решения задачи* (1) — (2) *при* $p = 2$ *всегда справедлива оценка*

$$\| z^{j+1} \| \leqslant \tfrac{3}{2} \sqrt{M_0} \, \| \overline{\Psi^{j+1}} \|. \quad (24)$$

5. Пусть $p = 3$. В этом случае слагаемое $2\tau (\Psi, z_{\bar{t}})$ оценивается по другому (ср. § 1):

$$2\tau (\Psi, z_{\bar{t}}) = 2\tau (\Psi, z)_{\bar{t}} - 2\tau (\Psi_{\bar{t}}, \check{z}) \leqslant 2\tau (\Psi, z)_{\bar{t}} + c_0 \tau \check{I} + \frac{M_0}{c} \tau \| \Psi_{\bar{t}} \|^2, \quad (25)$$

где c_0 — произвольная положительная постоянная, $\Psi(x, 0) = \Psi(x, \tau_1)$. Нам понадобятся очевидные оценки:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} \frac{h_\alpha^2 + h_\beta^2}{12} \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta} \|^2 \leqslant \frac{p-1}{3} I, \\ &\tau \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{h_\alpha^2}{6} \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{t}} \|^2 \leqslant 2\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 \qquad \text{(см. (20))}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Перепишем (19) в виде

$$I^{j'+1} + \tau_{j'+1}^3 Q^{j'+1} + 2\tau_{j'+1}^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \| z_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{t}}^{j'+1} \|^2 \leqslant (1 + c_0 \tau_{j'+1}) I^{j'} + \quad (27)$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=\alpha+1}^{3} \frac{h_\alpha^2 + h_\beta^2}{12} \tau_{j'+1} \left(\| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta} \|^2 \right)_{\bar{t}}^{j'+1} + \frac{M_0}{c_0} \tau_{j'+1} \| \Psi_{\bar{t}}^{j'+1} \|^2 + 2\tau_{j'+1} (\Psi, z)_{\bar{t}}^{j'+1},$$

где

$$Q = 0.5 \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=\alpha+1}^{3} [1 + (1 - 2\sigma_\alpha)(1 - 2\sigma_\beta)] \| z_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta \bar{t}} \|^2 > 0.$$

Коэффициент $\sigma_\alpha = 0.5 (1 - h_\alpha^2/6\tau)$ может иметь любой знак, в частности $\sigma_\alpha < 0$, что соответствует условию $\tau/h_\alpha^2 < 1/6$ или $h_\alpha^2/\tau > 6$. Поэтому произведение $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ может иметь любой знак и третье слагаемое в левой части (27) нельзя отбросить, не нарушая неравенства. Преобразуем это слагаемое. Рассмотрим множитель

$$2\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \tau^4 = \frac{\tau^4}{4} + \frac{h_1^2 h_2^2 + h_1^2 h_3^2 + h_2^2 h_3^2}{144} \tau^2 - D_1^0 - D_2^0 \geqslant - D_1^0 - D_2^0,$$

где

$$D_1^0 = \frac{\tau^3}{24} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2), \qquad D_2^0 = \frac{\tau}{4 \cdot 216} h_1^2 h_2^2 h_3^2.$$

Оценим выражения

$$D_k = D_k^0 \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{t}} \|^2, \qquad k = 1, 2.$$

Применяя лемму 1, получим

$$D_1 \leqslant \frac{\tau^3}{6} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=\alpha+1}^{3} \| z_{\bar{x}_\alpha\bar{x}_\beta\bar{t}} \|^2 \leqslant \frac{\tau^3}{3} Q,$$

$$D_2 \leqslant \frac{\tau}{4\cdot 216\cdot 3} \{h_1^2 h_2^2 (h_3^2 \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{t}} \|^2) + h_1^2 h_3^2 (h_2^2 \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{t}} \|^2) +$$

$$+ h_2^2 h_3^2 (h_1^2 \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{t}} \|^2)\} \leqslant \frac{\tau^2 \cdot 36}{216\cdot 3} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=\alpha+1}^{3} \frac{h_\alpha^2 h_\beta^2}{6^2\tau^2} \| z_{\bar{x}_\alpha\bar{x}_\beta\bar{t}} \|^2 =$$

$$= \frac{\tau^3}{18} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=\alpha+1}^{3} (1 - 2\sigma_\alpha)(1 - 2\sigma_\beta) \| z_{\bar{x}_\alpha\bar{x}_\beta\bar{t}} \|^2 \leqslant \frac{\tau^3}{9} Q.$$

Таким образом, при любых $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

$$\tau^3 Q + 2\tau^4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{t}} \|^2 \geqslant \tau^3 Q - D_1 - D_2 \geqslant \tfrac{5}{9}\tau^3 Q > 0 \qquad (28)$$

и, следовательно, всегда выполняется неравенство

$$I^{j+1} \leqslant c_0 \sum_{j'=1}^{j+1} \tau_{j'} I^{j'-1} + I^0 + 2\,[(\Psi, z)^{j+1} - (\Psi, z)^0] + \frac{2}{3} I^{j+1} + \qquad (29)$$

$$+ \frac{M_0}{c_0} \left(\overline{\| \Psi_{\bar{t}}^{j+1} \|}\right)^2,$$

которое получается из (27), (28) и (26). Полагая $z(x, 0) = 0$, пользуясь оценкой

$$2(\Psi, z) \leqslant c_0' I + \frac{M_0}{c_0'} \| \Psi \|^2, \qquad c_0' = \text{const} > 0,$$

и выбирая $c_0 = 1/6t_{j+1}$, $c_0' = 1/6$, находим

$$I^{j+1} \leqslant \frac{1}{t_{j+1}} \sum_{j'=2}^{j+1} \tau_{j'} I^{j'-1} + 12M_0 \left[\max_{1\leqslant j'\leqslant j+1} \| \Psi^{j'} \|^2 + t_{j+1} \left(\overline{\| \Psi_{\bar{t}}^{j+1} \|}\right)^2\right]. \qquad (30)$$

Применяя теперь лемму 4 из [7], получаем

$$I^{j+1} \leqslant 12M_0 e \left[\max_{1\leqslant j'\leqslant j+1} \| \Psi^{j'} \|^2 + t_{j+1} \left(\overline{\| \Psi_{\bar{t}}^{j+1} \|}\right)^2\right]$$

и, следовательно,

$$\| z^{j+1} \| \leqslant M_1 \left(\max_{1\leqslant j'\leqslant j+1} \| \Psi^{j'} \| + \sqrt{t_{j+1}} \overline{\| \Psi_{\bar{t}}^{j+1} \|}\right), \qquad (31)$$

где

$$M_0 = \frac{1}{4}\left(\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{l_\alpha^2}\right)^{-1}, \qquad M_1 = 2\sqrt{3e}\, M_0.$$

Теорема 4. *На любой последовательности сеток $\overline{\Omega}$ производящая схема* (1) *абсолютно устойчива по начальным данным и по правой части. Для решения задачи* (1) — (2) *при* $p = 3$ *справедлива априорная оценка* (31). *Для решения однородного* ($\Psi = 0$) *уравнения* (1) *с граничным усло-*

вием $z = 0$ *при* $x \in \gamma$ *справедлива оценка*

$$\frac{1}{\sqrt{M_0}} \| z^{j+1} \| \leqslant \| z_{\bar{x}}^{j+1} \| \leqslant \sqrt{3} \| z_{\bar{x}}(x, 0) \|, \qquad \| z_{\bar{x}} \| = \sum_{\alpha=1}^{3} \| z_{\bar{x}_\alpha} \|. \tag{32}$$

Априорная оценка (32) следует из (26) и неравенства (29), которое дает $I^{j+1} \leqslant 3I^0$. Таким образом, схема (2.13) абсолютно устойчива по начальным данным в норме $\| z_{\bar{x}} \|$.

Замечание. Для второй производящей схемы (2.14) оценку (31) удалось доказать лишь при дополнительном условии $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \geqslant 0$, в случае квазиравномерной сетки $\overline{\omega}_\tau$ ($|\tau_{\bar{t}}| \leqslant m^*\tau$, см. [7]).

6. После того как установлены априорные оценки (23) и (31) нетрудно показать, что производящая схема и, следовательно, все алгоритмы из § 3 имеют четвертый по $|h|$ и второй по τ порядки точности.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия, при которых схема* (2.15) *имеет максимальный порядок аппроксимации:* $\| \Psi \| = O(|h|^4 + \tau^2)$ *при* $p = 2, 3$ *и, кроме того,* $\| \Psi_{\bar{t}} \| = O(|h|^4 + \tau^2)$ *при* $p = 3$. *Тогда схема* (2.15) *на любой последовательности сеток* $\overline{\Omega}$ *сходится в среднем со скоростью* $O(|h|^4 + \tau^2)$, *так что при любых* h_α *и* τ *справедливы оценки*

$$\| y^{j+1} - u^{j+1} \| \leqslant M (|h|^4 + \| \tau^2 \|_{j+1}) \qquad \text{для } p = 2,$$

$$\| y^{j+1} - u^{j+1} \| \leqslant M (|h|^4 + \| \tau \|_{0,\, j+1}^2) \qquad \text{для } p = 3,$$

где $\| \tau \|_{0,\, j+1} = \max\limits_{1 \leqslant j' \leqslant j+1} \tau_{j'}$, u — *решение задачи* (2.1) — (2.2), y — *решение разностной задачи* (2.15) — (2.16), M — *положительные постоянные, не зависящие от выбора сеток.*

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться априорными оценками (24), (31) и условиями теоремы для $\| \Psi \|$ и $\| \Psi_{\bar{t}} \|$.

Замечание. Теорема 5 сохраняет силу для схемы (2.14), если $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \geqslant 0$, а сетка $\overline{\omega}_\tau$ квазиравномерна.

§ 5. Трехслойные схемы повышенного порядка точности

1. Двухслойные схемы повышенного порядка точности нам удалось обосновать (доказать их безусловную устойчивость и сходимость) лишь для $p \leqslant 3$. В этом параграфе мы рассмотрим трехслойную схему (связывающую значения y^{j+1}, y^j и y^{j-1} на трех слоях по времени), которая при $p \leqslant 4$ безусловно устойчива и имеет точность $O(|h|^4 + \tau^2)$.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \qquad u|_\Gamma = \mu, \qquad u(x, 0) = u_0(x) \tag{1}$$

в кубе $0 \leqslant x_\alpha \leqslant 1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Пусть $\overline{\omega}_h$ — квадратная сетка, т. е. $h_\alpha = h_\beta = h = \text{const}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p$, а сетка $\overline{\omega}_\tau$ равномерна.

В [1] для этой задачи были предложены исходные схемы

$$y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{1}{3} \Lambda (y + \check{y} + \check{\check{y}}) - \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}t} + \frac{h^2}{6} \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta > \alpha} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta \check{y}, \qquad p \leqslant 4, \tag{2}$$

$$y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{1}{3}\Lambda(y + \check{y} + \check{\check{y}}) - \frac{h^2}{12}\Lambda y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{h^2}{6}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta\check{y}, \qquad p \leqslant 3, \tag{3}$$

где

$$y = y^{j+1}, \quad \check{y} = y^j, \quad \check{\check{y}} = y^{j-1}, \quad y_{\overset{\circ}{t}} = (y - \check{\check{y}})/2\tau = 0.5\,(y_{\bar{t}} + \check{y}_{\bar{t}}). \tag{4}$$

Показано, что исходная схема (3) имеет нужную точность $\| y - n \| = O(h^4 + \tau^2)$ при дополнительном условии

$$\gamma \geqslant \gamma_0 = \text{const} > 0.$$

Вычислительный алгоритм переменных направлений для схемы (2) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&(E - A_1)\,y_{(1)} = \left\{\frac{1}{6\gamma}E + \frac{\tau}{3}(\Lambda - 2\Lambda_1) + \frac{\tau h^2}{3}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta\right\}\check{y} + \\
&\qquad + \left[\left(1 - \frac{1}{6\gamma}\right)E + \frac{2\tau}{3}\Lambda\right]\check{\check{y}}, \\
&(E - A_\alpha)\,y_{(\alpha)} = y_{(\alpha-1)} - A_{\alpha-1}\check{y}, \quad \alpha > 1, \qquad y_{(p)} = y = y^{j+1}, \\
&A_1 = \frac{2}{3}\tau\Lambda_1 - \frac{1}{6\gamma}E, \qquad A_\alpha = \frac{2\tau}{3}\Lambda_\alpha, \qquad \alpha > 1.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Производящая схема не написана. Ее сходимость авторы обещают доказать позже. Вопрос о краевых условиях при $\alpha < p$ (см. [5]) не обсуждается.

2. Нашей целью является построение трехслойной схемы для уравнения (1), безусловно (при любых γ) устойчивой и сходящейся со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$ для $p \leqslant 4$. Вводится, по аналогии с § 2, параметр

$$\sigma = \frac{0.5}{1 + 1/12\gamma}. \tag{6}$$

Если в предлагаемой ниже схеме положить формально $\sigma = 0.5$, то она переходит в двухслойную схему $O(h^2 + \tau^2)$.

Итак, рассмотрим задачу (1) на той же сетке, что и в [1]. В схеме (2.3) положим $h_\alpha = h$ и заменим $\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha y_{\bar{t}} = \Lambda y_{\bar{t}}$ выражением $y_{\bar{t}\bar{t}}$. Тогда получим следующую исходную схему*):

$$y_{\bar{t}} = 0.5\,\Lambda(y + \check{y}) - \frac{h^2}{12}y_{\bar{t}\bar{t}} + \frac{h^2}{6}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta\check{y}. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться в том, что она имеет погрешность аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$.

Для схемы (7) надо задать начальные данные не только при $t = 0$, но и при $t = \tau$. Для определения $y(x, \tau)$ нужна двухслойная схема точности $O(h^4 + \tau^2)$ (см. п. 4). Будем исходить из (7). Учитывая, что $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^{j+1/2} = \frac{2}{\tau}(u_{\bar{t}} - \check{u}_{\bar{t}}) + O(\tau)$, заменим $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, \tau)$ выражением

$$\frac{1}{\tau}\,y_{\bar{t}} - \frac{1}{\tau}\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x; 0) = \frac{1}{\tau}\,y_{\bar{t}} - \frac{1}{\tau}Lu_0(x) + \frac{1}{2}\,LL\,u_0(x).$$

*) Схему (7) можно рассматривать и как двухслойную, если считать, что на предыдущем слое (при $t = t_j$) заданы не только $\check{y}$, но и $\check{y}_{\bar{t}}$.

В результате для $y(x, \tau)$ получим исходную схему

$$y_{\bar t} = 0.5\,\Lambda(y + \check y) - \frac{h^2}{12\tau} y_{\bar t} + \varphi, \qquad y|_\gamma = \mu,\ y(x, 0) = u_0(x), \qquad t = \tau, \tag{8}$$

$$\varphi = \frac{h^2}{12}\left[\frac{1}{\tau} Lu_0 - \frac{1}{2} LLu_0 + 2 \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} L_\alpha L_\beta u_0\right].$$

3. Перепишем (7) и (8) в виде

$$(E - \sigma\tau\Lambda)\, y_{\bar t} = \Phi[\check y], \qquad y|_\gamma = \mu, \qquad y(x, 0) = u_0(x), \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi[\check y] &= F[\check y] = 2\sigma\Lambda\check y + (1 - 2\sigma)\,\check y_{\bar t} + \\ &\quad + 2(1 - 2\sigma)\,\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta>\alpha} \Lambda_\alpha\Lambda_\beta \check y, \qquad t > \tau, \\ \Phi[\check y] &= F_1[u_0] = 2\sigma\,[\Lambda u_0 + \varphi] \qquad \text{при } t = \tau. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

После замены оператора $E - \sigma\tau\Lambda$ произведением одномерных операторов $A_1 \ldots A_p = A$ получим производящую схему

$$Ay_{\bar t} = \prod_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y_{\bar t} = \Phi[\check y], \qquad y|_\gamma = \mu, \qquad y(x, 0) = u_0(x), \tag{11}$$

где

$$A_\alpha = E - \sigma\tau\Lambda_\alpha. \tag{12}$$

Отсюда сразу следует счетный алгоритм переменных направлений

$$A_1 v_{(1)} = \Phi[\check y],\ A_\alpha v_{(\alpha)} = v_{(\alpha-1)} \text{ при } \alpha > 1, \qquad y = \check y + \tau v_{(p)}, \qquad t \geqslant \tau, \tag{13}$$

$$v_{(\alpha)} = A_{\alpha+1}, \ldots A_p\, (\mu_\alpha)_{\bar t}^{j+1} \text{ при } x \in \gamma_\alpha \qquad (x_\alpha = 0,\ \ x_\alpha = 1). \tag{14}$$

где $\Phi[\check y]$ определяется по формулам (10).

4. Пусть u — решение задачи (1), y — решение задачи (11). Для погрешности $z = y - u$ получим:

$$\left.\begin{aligned} &Az_{\bar t} = F[\check z] + 2\sigma\Psi \text{ при } t > \tau, \qquad Az_{\bar t} = 2\sigma\psi \text{ при } t = \tau, \\ &z|_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad t \in \bar\omega_\tau; \qquad z(x, 0) = 0, \qquad x \in \bar\omega_h, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где Ψ и ψ — погрешность аппроксимации схемы при $t > \tau$ и, соответственно, при $t = \tau$ на решении $u = u(x, t)$ уравнения (1). Из построения схемы ясно, что

$$\Psi = O(h^4 + \tau^2), \qquad \psi = O(h^4 + \tau^2),$$

если решение $u = u(x, t)$ уравнения (1) является достаточно гладким.

Перейдем к выводу априорных оценок, из которых будет следовать устойчивость и сходимость нашей схемы. Рассуждения проводятся по аналогии с § 4. При этом следует иметь в виду, что $\sigma > 0$ всегда. Умножая (15) скалярно на $\tau z_{\bar t}$ и учитывая, что

$$\tau(Az_{\bar t}, z_{\bar t}) = \tau \| z_{\bar t} \|^2 + \sigma\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p} \| z_{\bar x_\alpha \bar t} \|^2 + \sigma^2\tau^3 \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta>\alpha} \| z_{\bar x_\alpha \bar x_\beta \bar t} \|^2 + \cdots$$
$$\cdots + \sigma^p \tau^{p+1} \| z_{\bar x_1 \bar x_2 \ldots \bar x_p \bar t} \|^2,$$

$$\tau\,[\,\|z_{\bar t}\|^2-(1-2\sigma)\,(\check z_{\bar t},\,z_{\bar t})]=2\sigma\tau\,\|z_{\bar t}\|^2+(0.5-\sigma)\,\tau^2(\|z_{\bar t}\|^2)_{\bar t}+$$
$$+(0.5-\sigma)\,\tau^3\,\|z_{\bar t t}\|^2,$$

$$2\sigma\tau\,(\Lambda\check z,\,z_{\bar t})=-\sigma\tau I_{\bar t}+\sigma\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|z_{\bar x_\alpha\bar t}\|^2,\qquad I=\sum_{\alpha=1}^{p}\|z_{\bar x_\alpha}\|^2,$$

$$2\tau\,(z_{\bar t\bar t},\,z_{\bar t})=\tau\,(\|z_{\bar t}\|^2)_{\bar t}+\tau^2\,\|z_{\bar t t}\|^2,\qquad 2\tau\,(\Psi,\,z_{\bar t})\leqslant\tau\,\|z_{\bar t}\|^2+\tau\,\|\Psi\|^2,$$

получим энергетическое неравенство, решая которое после обычных рассуждений приходим к следующим оценкам:

$$\tau\,\|z_{\bar t}\,(x,\,\tau)\|^2+\frac{h^2}{12}\,\|z_{\bar t}\,(x,\,\tau)\|^2+\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|z_{\bar x_\alpha\bar t}\,(x,\,\tau)\|^2\leqslant\|\psi\|^2,\tag{16}$$

$$\sum_{j'=2}^{j+1}\tau\,\|z_{\bar t}^{j'}\|^2+\frac{h^2}{12}\,\|z_{\bar t}^{j+1}\|^2+I^{j+1}\leqslant I\,(\tau)+\frac{h^2}{12}\,\|z_{\bar t}\,(x,\,\tau)\|^2+\tag{17}$$
$$+\frac{h^2}{6}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha}\|z_{\bar x_\alpha\bar x_\beta}^{j+1}\|^2+(\overline{\|\Psi^{j+1}\|})^2,$$

$$\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|z_{\bar x_\alpha\bar t}\,(x,\,\tau)\|^2=I\,(\tau)\quad\text{при}\qquad z\,(x,\,0)=0.$$

Из (16), (17), (4.26) и условия $z\,(x,\,0)=0$ следует

$$\sum_{j'=1}^{j+1}\tau\,\|z_{\bar t}^{j'}\|^2+\frac{h^2}{12}\,\|z_{\bar t}^{j+1}\|^2+\frac{4-p}{3}\,I^{j+1}\leqslant\|\psi\|^2+(\overline{\|\Psi^{j+1}\|})^2.\tag{18}$$

Для оценки $\|z^{j+1}\|$ при $p=4$ нам понадобится очевидная

Лемма 4. *Если* $z\,(x,\,0)=0$, *то*

$$\|z^{j+1}\|^2\leqslant t_{j+1}\sum_{j'=1}^{j+1}\tau\,\|z_{\bar t}^{j'}\|^2.\tag{19}$$

5. Пользуясь (17), (18) и леммой 4, убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 6. *Производящая схема* (15) *абсолютно устойчива при* $p\leqslant 4$, *так что для решения задачи* (15) *при любых* h *и* τ *выполняется неравенство*

$$\|z^{j+1}\|\leqslant\sqrt{t_{j+1}}\,(\|\psi\|+\overline{\|\Psi^{j+1}\|}).\tag{20}$$

Теорема 7. *Если выполнены условия, при которых схема* (11) *имеет максимальный порядок аппроксимации на решении* $u=u\,(x,\,t)$ *задачи* (1), *т. е.*

$$\|\Psi\|=O\,(h^4+\tau^2),\qquad\|\psi\|=O\,(h^4+\tau^2),\tag{21}$$

то она сходится со скоростью $O\,(h^4+\tau^2)$:

$$\|y-u\|=O\,(h^4+\tau^2)\tag{22}$$

при любых значениях γ *для* $p\leqslant 4$.

Доказательство теоремы 7 непосредственно следует из теоремы 6 и условий (21).

Замечание. В [1] для исходной схемы (2) получена оценка вида

$$\|z^{j+1}\|\leqslant C\,(\gamma)\,\|z\,(x,\,\tau)\|,\tag{23}$$

где $C\,(\gamma)$ — постоянная, зависящая от $\gamma=\tau/h^2$.

6. Для простоты и удобства сравнения с [1] мы рассматривали схему на квадратной сетке $\bar{\omega}_h$. Если $\bar{\omega}_h$ — сетка из § 2, так что $h_\alpha \neq h_\beta$, то вместо (7) получим схему

$$y_{\bar{t}} = 0.5\,\Lambda\,(y + \check{y}) - \frac{|h|^2}{12} y_{\bar{t}t} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p} (|h|^2 - h_\alpha^2)\,\Lambda_\alpha y_{\bar{t}} + \tag{24}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta>\alpha} \frac{h_\alpha^2 + h_\beta^2}{12}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta \check{y}, \qquad |h|^2 = h_1^2 + \cdots + h_p^2.$$

Нетрудно построить производящую схему

$$A_1 \ldots A_p y_{\bar{t}} = F\,[\check{y}], \qquad A_\alpha = E - \tau\sigma_\alpha\Lambda_\alpha,$$

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|h|^2 - h_\alpha^2}{6\tau}\right)\Big/\left(1 + \frac{|h|^2}{6\tau}\right), \tag{25}$$

и убедиться в том, что теоремы 6 и 7 сохраняют силу и в этом случае при $p \leqslant 4$.

Схема для неоднородного уравнения (1) пишется по аналогии с § 2. Представляет интерес вопрос об отыскании схем точности $O\,(|h|^4 + \tau^2)$, абсолютно устойчивых при $p > 4$.

§ 6. Схема повышенного порядка точности для уравнения со смешанными производными

1. Для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant c_1 \sum_{\alpha=1}^{p}\xi_\alpha^2, \qquad c_1 = \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

в [14], [6], [11] были предложены экономичные схемы, имеющие точность $O\,(h^2 + \tau)$.

Покажем, что для случая $p = 2$ можно построить схему, имеющую точность $O\,(h^4 + \tau^2)$ при $a_{\alpha\beta} = \mathrm{const}$.

Без ограничения общности можно считать $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21}$, так что

$$|a_{12}| \leqslant 1 - c_1. \tag{2}$$

Итак, рассмотрим в области $0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \qquad u\,|_\Gamma = \mu\,(x, t), \qquad u\,(x, 0) = u_0\,(x), \\ &Lu = (L_1 + L_2 + 2a_{12}L_{12})\,u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2; \quad L_{12}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

2. Пусть $\bar{\omega}_h$ — квадратная сетка с шагом h, $\bar{\omega}_\tau$ — равномерная сетка с шагом τ. Для аппроксимации $L_{12}u$ воспользуемся двумя разностными операторами:

$$\Lambda_{12}^- u = 0.5\,(u_{\bar{x}_1 x_2} + u_{x_1 \bar{x}_2}), \qquad \Lambda_{12}^+ u = 0.5\,(u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + u_{x_1 x_2}).$$

Вычисления дают

$$\Lambda_{12}^- u = L_2 u - \frac{h^2}{4} L_{12}^2 u + \frac{h^2}{6} L_{12}\,(L_1 + L_2) u + O\,(h^4),$$

$$\Lambda_{12}^+ u = L_{12} + \frac{h^2}{4} L_{12}^2 u + \frac{h^2}{6} L_{12}\,(L_1 + L_2)\,u + O\,(h^4).$$

Обозначая

$$\Lambda y = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + 2a_{12}\Lambda_{12}^{\mp})\, y, \qquad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},$$

находим

$$\Lambda u = Lu + \frac{h^2}{12}\,[L_1^2 + L_2^2 + 4a_{12}L_{12}\,(L_1 + L_2) \mp 6a_{12}L_{12}^2]\, u + O\,(h^4).$$

Пользуясь уравнением (2), после ряда вычислений получим

$$0.5\,(\Lambda_1 + \Lambda_2)\,(u + \check{\check{u}}) + 2a_{12}\Lambda_{12}^{\mp}\check{u} - \frac{h^2}{12}u_{\bar{t}\bar{t}} + \frac{h^2}{6}(1 + 2a_{12}^2 \pm 3a_{12})\,\Lambda_1\Lambda_2\check{u} =$$
$$= L\check{u} + O\,(h^4 + \tau^2).$$

Оператор $\Lambda_{12}^{\mp}$ будем выбирать в зависимости от знака a_{12}:

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= \Lambda_{12}^{-}, \qquad \text{если} \quad a_{12} < 0, \\ \Lambda_{12} &= \Lambda_{12}^{+}, \qquad \text{если} \quad a_{12} > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Напишем теперь исходную схему четвертого — второго порядка аппроксимации:

$$y_{\bar{t}}^{\circ} = 0.5\,(\Lambda_1 + \Lambda_2)\,(y + \check{\check{y}}) + 2a_{12}\Lambda_{12}\check{y} - \frac{h^2}{12}y_{\bar{t}\bar{t}} + \frac{h^2}{6}b\Lambda_1\Lambda_2\check{y}, \tag{6}$$

где

$$b = 1 + 2a_{12}^2 - 3\,|a_{12}|, \qquad y_{\bar{t}}^{\circ} = (y - \check{\check{y}})/2\tau = 0.5\,(y_{\bar{t}} + \check{y}_{\bar{t}}). \tag{7}$$

Производящая схема, очевидно, будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &Ay_{\bar{t}} = A_1A_2y_{\bar{t}} = F\,[\check{y}, \check{\check{y}}], \qquad y|_\gamma = \mu \quad \text{при } t > \tau, \\ &Ay_{\bar{t}} = F_1\,[u_0], \qquad y|_\gamma = \mu\,(x_1, \tau), \qquad y\,(x, 0) = u_0\,(x) \quad \text{при } t = \tau, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$A_\alpha = E - \sigma\tau\Lambda_\alpha, \qquad \sigma = 1\Big/\left(1 + \frac{h^2}{6\tau}\right), \tag{9}$$

$$F\,[\check{y}, \check{\check{y}}] = (1 - 2\sigma)\,\check{y}_{\bar{t}} + \sigma\Lambda\,(\check{y} + \check{\check{y}}) + 4\sigma a_{12}\Lambda_{12}\check{y} + 2\,(1 - \sigma)\,\tau b\Lambda_1\Lambda_2\check{y}. \tag{10}$$

Выражение для $F_1\,[u_0]$ не будем выписывать (см. § 5).

Алгоритм переменных направлений пишется по аналогии с § 5. Пусть u — решение задачи (3), а y — решение задачи (8); для их разности получаем

$$\left.\begin{aligned} &Az_{\bar{t}} = F\,[\check{z}, \check{\check{z}}] + 2\sigma\Psi, \quad t > \tau; \quad Az_{\bar{t}} = 2\sigma\psi, \quad t = \tau, \\ &z|_\gamma = 0, \qquad z\,(x, 0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $\Psi = O\,(h^4 + \tau^2)$, $\psi = O\,(h^4 + \tau^2)$, если $u = u\,(x, t) \in C_3^{(6)}$.

4. Умножая (11) скалярно на $2\,(z_{\bar{t}} + \check{z}_{\bar{t}})\,\tau$, получим энергетическое тождество

$$\tau\,\|z_{\bar{t}} + \check{z}_{\bar{t}}\|^2 + \tau\,(I + \check{I})_{\bar{t}} + 0.5\,\sigma\tau^4\,(\|z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}}\|^2)_{\bar{t}} + 0.5\,\sigma\tau^3\,\|z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}} + \check{z}_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}}\|^2 -$$
$$- 4a_{12}\,(\Lambda_{12}\check{z}, z - \check{\check{z}}) = -\frac{h^2}{6}\,\tau\,(\|z_{\bar{t}}\|^2)_{\bar{t}} + \frac{h^2}{3}\,b\tau\,(z_{\bar{x}_1\bar{x}_2}, \check{z}_{\bar{x}_1\bar{x}_2})_{\bar{t}} + 2\tau\,(\Psi, z_{\bar{t}} + \check{z}_{\bar{t}}).$$

Нетрудно заметить, что

$$(\Lambda_{12}^{-}\check{z},\ z-\check{\check{z}}) = -0.5\,\tau\,(Q_{12}^{-})_{\bar t},\quad Q_{12}^{-} = (\check{z}_{\bar x_1},\ z_{\bar x_2}) + (z_{\bar x_1},\ \check{z}_{\bar x_2}),$$

$$(\Lambda_{12}^{+}\check{z},\ z-\check{\check{z}}) = -\ 0.5\ \tau\ (Q_{12}^{+})_{\bar t},\quad Q_{12}^{+} = (\check{z}_{x_1},\ z_{\bar x_2}) + (z_{x_1},\ \check{z}_{\bar x_2}).$$

Следуя § 5, находим

$$\frac{h^2}{6}\|z_{\bar t}^{j+1}\|^2 + I^{j+1} + I^j + 0.5\sigma\tau^3\|z_{\bar x_1\bar x_2\bar t}^{j+1}\|^2 + 2a_{12}Q_{12}(t_{j+1}) \leqslant \frac{h^2}{6}\|z_{\bar t}(x,\tau)\|^2 + \tag{12}$$

$$+ I(\tau) + I(0) + \left(\overline{\|\Psi^{j+1}\|}\right)^2 + \frac{h^2}{3}\,b\left(z_{\bar x_1\bar x_2}^{j+1},\ z_{\bar x_1\bar x_2}^{j}\right) + 0.5\sigma\tau^3\|z_{\bar x_1\bar x_2\bar t}(x,\tau)\|^2.$$

Воспользуемся тождеством $(v,\check{v}) = 0.5(\|v\|^2 + \|\check{v}\|^2) - 0.5\tau^2\|v_{\bar t}\|^2,\quad v = z_{\bar x_1\bar x_2}.$

Пусть $b > 0$. Тогда член $-\ 0.5\ \tau^2\frac{h^2}{3}b\|z_{\bar x_1\bar x_2\bar t}^{j+1}\|^2$ можно отбросить, а для оценки $h^2\|z_{\bar x_1\bar x_2}\|^2$ применить лемму 1. В результате получим слева выражение $\left(1-\frac{1}{3}b\right)(I^{j+1}+I^j) = [|a_{12}| + \frac{2}{3}(1-a_{12}^2)](I^{j+1}+I^j)$. Для определенности рассмотрим случай $\Lambda_{12} = \Lambda_{12}^{-}$, т. е. $a_{12} < 0$. Обозначая $\xi_\alpha = z_{\bar x_\alpha}^{j+1}$, $\check{\xi}_\alpha = z_{\bar x_\alpha}^{j}$, находим $[|a_{12}| + \frac{2}{3}(1-a_{12}^2)](\xi_1^2 + \check{\xi}_2^2) + 2a_{12}\xi_1\check{\xi}_2 \geqslant \frac{2}{3}(1-a_{12}^2)(\xi_1^2+\check{\xi}_2^2) \geqslant \frac{2}{3}c_1^2(\xi_1^2+\check{\xi}_2^2)$, так как $1-a_{12}^2 \geqslant c_1^2$.

В результате неравенство (12) примет вид

$$\frac{2}{3}c_1^2(I^{j+1}+I^j) \leqslant I(\tau) + \frac{h^2}{6}\|z_{\bar t}(x,\tau)\|^2 + \left(\overline{\|\Psi^{j+1}\|}\right)^2. \tag{13}$$

По аналогии с § 5 находим

$$0.5\,\sigma\tau^3\|z_{\bar x_1\bar x_2\bar t}(x,\tau)\|^2 + I(\tau) + \frac{h^2}{6}\|z_{\bar t}(x,\tau)\|^2 \leqslant \|\psi\|^2 \tag{14}$$

и, следовательно,

$$I^{j+1} + I^j \leqslant \frac{3}{2c_1^2}[\|\psi\|^2 + (\overline{\|\Psi^{j+1}\|})^2] \quad \text{при любых } \gamma = \frac{\tau}{h^2}. \tag{15}$$

Так как $b > 0$ при $|a_{12}| < 0.5$, то оценка (15) верна при $c_1 = 0.5$.

Пусть $b < 0$. Тогда в (12) можно отбросить член

$$0.5\,\frac{h^2}{3}\,b\,(\|z_{\bar x_1\bar x_2}^{j+1}\|^2 + \|z_{\bar x_1\bar x_2}^{j}\|^2),$$

а член с $\|z_{\bar x_1\bar x_2\bar t}^{j+1}\|^2$ перенести в левую часть неравенства. Тогда слева получим выражение

$$\left(0.5\sigma - \frac{h^2}{6\tau}|b|\right)\tau^3\|z_{\bar x_1\bar x_2\bar t}\|^2.$$

Коэффициент $0.5\sigma - h^2|b|/6\tau \geqslant 0$, если выполнено условие

$$\gamma \geqslant \gamma_0 = \frac{1}{6}|b|\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2}{|b|}}\right] \quad \text{при} \quad b = 1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}| < 0 \tag{16}$$

(т. е. при $|a_{12}| > 0.5$).

Так как $\max|b| = \frac{1}{8}$, то $\max\gamma_0 = [1+\sqrt{17}]/48$. Учитывая (16), снова приходим к (15).

5. Тем самым доказана

Теорема 8. *Для решения задачи* (11) *справедлива априорная оценка*

$$\|z^{j+1}\| \leqslant M(\|\psi\| + \overline{\|\Psi^{j+1}\|}), \qquad M = \frac{\sqrt{6}}{2c_1} M_0, \tag{17}$$

если выполнено условие (16). *Если* $|a_{12}| \leqslant 0.5$ *то оценка* (17) *верна при любых* $\gamma = \tau/h^2$.

Теорема 9. *Если выполнено условие* (16) *и*

$$\|\psi\| = O(h^4 + \tau^2), \qquad \|\Psi\| = O(h^4 + \tau^2), \tag{18}$$

то схема (8) *сходится со скоростью* $O(h^4 + \tau^2)$, *так что*

$$\|y - u\| \leqslant M(h^4 + \tau^2), \tag{19}$$

где M — *положительная постоянная, не зависящая от* h *и* τ.

Теорема 9 следует из (17) и (18).

Замечание 1. Если ввести новые переменные $x'_\alpha = x_\alpha/\sqrt{a_{\alpha\alpha}}$, то в уравнении (1) получим $a'_{\alpha\alpha} = 1$, $a'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}/\sqrt{a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta}}$. Квадратная сетка $\overline{\omega}_h$, которой мы пользовались, соответствует переменным x'_α. Так как $\Delta x'_\alpha = \Delta x_\alpha/\sqrt{a_{\alpha\alpha}}$, то в старых переменных шаги h_α должны удовлетворять условию $h_\alpha/\sqrt{a_{\alpha\alpha}} = h = \text{const}$. Все результаты этого параграфа сохраняют силу, если шаги h_α выбраны так, что

$$\frac{h_\alpha^2}{a_{\alpha\alpha}} = \frac{h_\beta^2}{a_{\beta\beta}}\left(1 + O\left(h_\beta^2\right)\right).$$

Замечание 2. Если $c_1 = 0$, т. е. $|a_{12}| \leqslant 1$, то помимо (18) и (19), получаются оценки

$$\|z^{j+1} + z^j\| \leqslant \sqrt{t_{j+1}}\left(\sqrt{2}\|\psi\| + 2\overline{\|\Psi^{j+1}\|}\right). \tag{18'}$$

$$\|(y^{j+1} + y^j) - (u^{j+1} + u^j)\| \leqslant M(h^4 + \tau^2). \tag{19'}$$

При выводе (18′) в п. 4 для $2\tau(\Psi, z_{\bar t} + \check z_{\bar t})$ нужно воспользоваться оценкой

$$2\tau(\Psi, z_{\bar t} + \check z_{\bar t}) \leqslant 0.5\tau\|z_{\bar t} + \check z_{\bar t}\|^2 + 2\tau\|\Psi\|^2.$$

§ 7. Схемы повышенного порядка точности для уравнений с переменными коэффициентами

1. Начнем с построения схемы порядка четыре — два для уравнения теплопроводности в случае одной пространственной переменной. Пусть требуется в $\overline{Д} = (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ решить задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u(0, t) = u_1(t), \qquad u(1, t) = u_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad k \geqslant c_1 > 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим однородную разностную схему (см. [13])

$$\Lambda y = (a y_{\bar x})_x, \quad a = a(x, t) = 1/A[p(x + sh, t)], \quad -1 \leqslant s \leqslant 0, \quad p = \frac{1}{k}, \tag{3}$$

аппроксимирующую оператор Lu. Здесь $A[\mu(s)]$ — линейный шаблонный функционал, удовлетворяющий требованиям

$$A[1]=1, \quad A[s]=-0.5, \quad A[s^2]=\frac{1}{3}, \quad A[f]\geqslant 0 \quad \text{при } f\geqslant 0. \tag{4}$$

Схема (3) имеет второй порядок аппроксимации по h. После ряда вычислений находим

$$\Lambda u=(au_{\bar{x}})_x=Lu+\frac{h^2}{12}L(pLu)+O(h^4), \quad p(x,t)=\frac{1}{k(x,t)}. \tag{5}$$

Если $u=u(x,t)$ — решение уравнения (1), то Lu можно выразить из (1): $Lu=\partial u/\partial t-f$ и подставить в (5):

$$\Lambda u=Lu+\frac{h^2}{12}L\left(p\frac{\partial u}{\partial t}-pf\right)+O(h^4).$$

Отсюда следует, что схема (обозначения см. § 1)

$$y_{\bar{t}}=0.5\Lambda(y+\check{y})-\frac{h^2}{12}\Lambda(py_{\bar{t}})+\varphi; \quad y_0=u_1, \quad y_N=u_2; \quad y(x,0)=u_0(x), \tag{6}$$

где

$$\varphi=\left[f+\frac{h^2}{12}\Lambda(pf)\right]^{j+1/2}, \quad \Lambda y=(a(x,t_{j+1/2})\,y_{\bar{x}})_x, \tag{7}$$

имеет четвертый по h и второй по τ порядок аппроксимации на решении $u=u(x,t)$ уравнения (1).

Уравнение (6) можно записать в виде

$$y_{\bar{t}}=\Lambda\sigma y+\Lambda(1-\sigma)\,y+\varphi, \qquad \sigma=\frac{1}{2}\left(1-\frac{h^2}{6\tau}p\right). \tag{8}$$

Для определения y на новой строке $t=t_{j+1}$ получаем задачу:

$$A_iy_{i-1}-C_iy_i+B_iy_{i+1}=-F_i, \qquad y_0=u_1,\ y_N=u_2 \tag{9}$$

где

$$A_i=a_i\gamma\sigma_{i-1}=0.5a_i\left(\gamma-\frac{p_{i-1}}{6}\right), \qquad B_i=0.5a_{i+1}\left(\gamma-\frac{p_{i+1}}{6}\right),$$

$$C_i=1+0.5(a_i+a_{i+1})\left(\gamma-\frac{p_i}{6}\right), \qquad \gamma=\tau/h^2.$$

Отсюда видно, что $C_i=A_i+B_i+D_i$, $D_i=1-\frac{h}{12}(a_{i+1}p_{x,i}+a_ip_{\bar{x},i})>0$, если $h\leqslant h_0$ достаточно мало, точнее, $h\,|p'/p|\leqslant c^*<6$. При этом можно для решения задачи (9) пользоваться формулами прогонки.

2. Для погрешности $z=y-u$, где u — решение задачи (1) — (2), а y — решение задачи (6), получаем условия

$$z_{\bar{t}}=0.5\Lambda(z+\check{z})-\frac{h^2}{12}\Lambda(pz_{\bar{t}})+\psi, \qquad z_0=z_N=0, \tag{10}$$

$$z(x,0)=0, \tag{11}$$

где ψ — погрешность аппроксимации схемы (6):

$$\psi=O(h^4+\tau^2). \tag{12}$$

Выясним вопрос об устойчивости схемы (10). Напишем, по аналогии

с § 1, основное энергетическое тождество

$$\tau \| z_{\bar t} \|^2 + 0.5\,(a,\ z_{\bar x}^2] = 0.5\,(a,\ \check z_x^2] + \frac{h^2}{12}\tau\,((p z_{\bar t})_{\bar x},\ a z_{\bar x \bar t}] + \tau\,(\psi,\ z_{\bar t}). \qquad (13)$$

Преобразуем сумму

$$((p z_{\bar t})_{\bar x},\ a z_{\bar x \bar t}] = (ap,\ z_{\bar x \bar t}^2] + (a p_{\bar t},\ z_{\bar t}^{(-1)} z_{\bar x \bar t}]. \qquad (14)$$

Будем предполагать, что выполнены условия

$$0 < c_1' \leqslant p \leqslant c_1, \qquad \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| \leqslant c_2, \qquad \left|\frac{\partial p}{\partial t}\right| \leqslant c_3, \qquad (15)$$

c_1', c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные. Тогда будем иметь

$$0 < c_1' \leqslant \frac{1}{a} \leqslant c_1, \qquad \left|\left(\frac{1}{a}\right)_{\bar x}\right| \leqslant c_2, \qquad \left|\left(\frac{1}{a}\right)_{\bar t}\right| \leqslant c_3. \qquad (16)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\check a}\,|a_{\bar t}| \leqslant a c_3 \leqslant c_3/c_1', \qquad p \leqslant 1 + Mh, \qquad M = M\,(c_2,\ c_1') > 0,$$

и пользуясь леммой 1, получим

$$\tau \| z_{\bar t} \|^2 + 0.5\, I \leqslant 0.5\,(1 + \tau c_3/c_1')\,\check I + (c_0 + M_1 \tau) \| z_{\bar t} \|^2 + \frac{\tau}{4c_0} \| \psi \|^2, \qquad (17)$$

$$I = (a,\ z_{\bar x}^2], \qquad a\,(x,\ t_{-1/2}) = a\,(x, 0), \qquad M_1 = M\,(c_1',\ c_2,\ c_3),$$

где c_0 — произвольная положительная постоянная. При этом мы воспользовались оценкой

$$h\,(a p_{\bar t},\ z_{\bar t}^{(-1)} z_{\bar x \bar t}] \leqslant \frac{2c_3}{c_1'} \| z_{\bar t} \|^2.$$

Если h достаточно мало:

$$h \leqslant h_0, \qquad \text{где } h_0 = h_0\,(c_0,\ c_1',\ c_2,\ c_3) > 0, \qquad (18)$$

то из (17) получим

$$I \leqslant (1 + c^* \tau)\,\check I + \frac{1}{2c_0} \tau \| \psi \|^2, \qquad c^* = c_3/c_1'. \qquad (19)$$

Отсюда находим (при $z\,(x, 0) = 0$)

$$I \leqslant M'\,\overline{(\| \psi \|)^2}, \qquad \| z^{j+1} \|_0 \leqslant M\,\overline{\| \psi^{j+1} \|}, \qquad M = M\,(c_1',\ c_2,\ c_3,\ c_0). \qquad (20)$$

По аналогии с § 1 для $\tau\,(\psi,\ z_{\bar t})$ можно воспользоваться оценкой

$$\tau\,(\psi,\ z_{\bar t}) = \tau\,(\psi,\ z)_{\bar t} - \tau\,(\psi_{\bar t},\ \check z) \leqslant \tau\,(\psi,\ z)_{\bar t} + 0.5 \tau c_0 \check I + \frac{l^2}{8c_0 c'_1} \tau \| \psi_{\bar t} \|^2. \qquad (21)$$

Тогда вместо (19) будем иметь

$$I \leqslant (1 + (c^* + c_0)\,\tau)\,\check I + 2\tau\,(\psi,\ z)_{\bar t} + \frac{l^2}{4c_0 c'_1} \tau \| \psi_{\bar t} \|^2 \qquad (22)$$

при условии

$$h \leqslant h_0, \qquad h_0 = h_0\,(c_1',\ c_2,\ c_3). \qquad (23)$$

Из (22), как обычно, находим

$$\| z^{j+1} \|_0 \leqslant M\,\left(\max_{1 \leqslant j' \leqslant j+1} \| \psi^{j'} \| + \overline{\| \psi_{\bar t}^{j+1} \|}\right) \text{ при } z\,(x, 0) = 0, \qquad (24)$$

$$\| z_x^{j+1} \| \leqslant M \| z_{\bar x}\,(x, 0) \| \quad \text{при } \psi = 0. \qquad (25)$$

Тем самым доказана

Теорема 10. *Если выполнены условия* (15), *то при достаточно малом* $h \leqslant h_0$ *и любых* τ *схема* (10) *абсолютно устойчива по начальным данным и по правой части* ψ, *так что справедливы оценки* (20), (24), (25).

Теорема 11. *Пусть выполнены условия, при которых схема* (6) *имеет максимальный порядок аппроксимации* (12). *Тогда схема* (6) *равномерно сходится при независимом стремлении* h *и* $\|\tau\|_0 = \max\limits_{\overline{\omega}_\tau} \tau_j$ *к нулю, так что при достаточно малом* $h \leqslant h_0$ *справедлива оценка*

$$\|y - u\|_0^{j+1} \leqslant M\,(h^4 + \|\tau\|_0^2), \tag{26}$$

где M — *положительная постоянная, не зависящая от сетки.*

4. До сих пор мы предполагали, что функционал $A\,[\mu\,(s)]$ удовлетворяет лишь условиям (4), а в остальном совершенно произволен. Нетрудно заметить, что шаблонный функционал

$$A\,[\mu\,(s)] = \int\limits_{-1}^{0} \mu\,(s)\,ds = \int\limits_{-0.5}^{0,5} \mu(s-0.5)ds \tag{27}$$

удовлетворяет условиям (4). Однако этот функционал не всегда удобен для практических целей. Наиболее удобны для вычислений так называемые дискретные функционалы [13], зависящие от значений функции в конечном числе точек. В частности, функционал

$$A\,[\mu\,(s)] = \tfrac{1}{6}\,[\mu\,(-1) + \mu\,(0)] + \tfrac{2}{3}\,\mu(-0.5) \tag{28}$$

удовлетворяет условиям (4). Коэффициент $1/a$ в этом случае равен

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{6}\,(p_{i-1} + p_i) + \frac{2}{3}\,p_{i-1/2}, \qquad p_{i-1/2} = p\,(x_{i-1/2},\, t), \tag{29}$$

где $x_{i-1/2} = x_i - 0.5\,h$. Для схемы (6), в которой коэффициент a вычисляется по формуле (29), справедливы теоремы 10 и 11.

Мы ограничились изучением схемы четвертого — второго порядка для простейшего уравнения (1). Пользуясь (5), нетрудно показать, что для уравнения

$$c\,(x,\,t)\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,(x,\,t)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q\,(x,\,t)\,u + f\,(x,\,t) \tag{30}$$

схема повышенного порядка точности имеет вид

$$c\,(x,\,t_{j+1/2})\,y_{\bar t} = 0.5\,\Lambda\,(y + \check y) - \frac{h^2}{12}\Lambda\,(cp\,y_{\bar t} + pqy) - q^{j+1/2}y + \varphi, \tag{31}$$

где φ и Λy определяются по формулам (7). Для этой схемы при соответствующих условиях теоремы 10 и 11 сохраняют силу.

5. Аналогично можно построить схему повышенной точности для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными. Мы ограничимся здесь случаем двух измерений ($p = 2$), см. § 2.

Мы будем рассматривать задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u + f\,(x,\,t), \qquad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{p_\alpha(x,t)}\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \qquad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{32}$$

$$u(x, t) = \mu(x, t) \text{ при } x_\alpha = 0, \quad x_\alpha = l_\alpha, \ \alpha = 1,2; \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (33)$$

Для упрощения изложения, без ограничения общности, будем считать сетку $\bar{\omega}_h = \{(i_1h_1;\ i_2h_2) \in \bar{G}\}$ квадратной, т. е. $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha = h = \text{const}$, $\alpha = 1,2$. Сетка $\bar{\omega}_\tau$ произвольна. Определим сеточные функции a_α при помощи функционала $A[\mu(s)]$ из п. 1, полагая

$$a_1 = a_1(x, \bar{t}) = 1/A\ [p_1(x_1 + sh, x_2, \bar{t})], \qquad \bar{t} = t - 0{,}5\tau,$$
$$a_2 = a_2(x, \bar{t}) = 1/A\ [p_2(x_1, x_2 + sh, \bar{t})],$$
$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \qquad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha.$$

Проводя рассуждения по аналогии с п. 1, убеждаемся в том, что исходная схема четвертого — второго порядка аппроксимации имеет вид

$$y_{\bar{t}} = 0.5\,\Lambda(y + \check{y}) - \frac{h^2}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha(p_\alpha y_{\bar{t}}) + \frac{h^2}{12}[\Lambda_1(p_1\Lambda_2\check{y}) + \Lambda_2(p_2\Lambda_1\check{y})] + \varphi, \quad (34)$$

$$\varphi = f^{j+1/2} + \frac{h^2}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}(\Lambda_\alpha p_\alpha f)^{j+1/2}. \quad (35)$$

6. Найдем производящую схему. Вводя обозначение

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{6\tau}p_\alpha\right) \quad (36)$$

и заменяя $E - \tau\sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha\sigma_\alpha$ произведением A_1A_2, где $A_\alpha = E - \tau\Lambda_\alpha\sigma_\alpha$, получим производящую схему

$$y_{\bar{t}} = \sum_{\alpha=1}^{2}[\Lambda_\alpha\sigma_\alpha y + \Lambda_\alpha(1 - \sigma_\alpha)\check{y}] - \tau^2\Lambda_1\sigma_1\Lambda_2\sigma_2 y_{\bar{t}} + \tau\Lambda_1\left(\frac{1}{2} - \sigma_1\right)\Lambda_2\check{y} + \quad (37)$$
$$+ \tau\Lambda_2\left(\frac{1}{2} - \sigma_2\right)\Lambda_1\check{y} + \varphi,$$

$$y = \mu \text{ при } x \in \gamma,\ t \in \bar{\omega}_\tau; \quad y(x, 0) = u_0(x) \text{ при } x \in \bar{\omega}_h. \quad (38)$$

Редукция производящей схемы к одномерным алгоритмам переменных направлений проводится по аналогии со случаем постоянных коэффициентов. Приведем здесь лишь алгоритм А (см. § 3):

$$\frac{y_{(1)} - \check{y}}{\tau} = \Lambda_1\sigma_1 y_{(1)} + \Phi, \qquad \frac{y_{(2)} - y_{(1)}}{\tau} = \Lambda_2\sigma_2 y_{(2)}, \qquad y^{j+1} = y_{(2)}, \quad (39)$$

$$\Phi = \sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha(1 - \sigma_\alpha)\check{y} + \tau[\Lambda_1(0.5 - \sigma_1)\Lambda_2\check{y} + \Lambda_2(0.5 - \sigma_2)\Lambda_1\check{y}] + \varphi.$$

7. Перейдем к выяснению основного вопроса теории — устойчивости и сходимости производящей схемы. Пусть u — решение исходной задачи (32) — (33), y — решение разностной задачи (37) — (38). Для разности $z = y - u$ получим

$$z_{\bar{t}} - 0.5\,\Lambda z + \tau^2\Lambda_1\sigma_1\Lambda_2\sigma_2 z_{\bar{t}} = 0.5\,\Lambda\check{z} - \frac{h^2}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha(p_\alpha z_{\bar{t}}) + \quad (40)$$
$$+ \tau\Lambda_1(0.5 - \sigma_1)\Lambda_2\check{z} + \tau\Lambda_2(0.5 - \sigma_2)\Lambda_1\check{z} + \Psi, \qquad (x, t) \in Q_T,$$

$$z = 0 \text{ при } x \in \gamma, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad z(x, 0) = 0 \text{ при } x \in \bar{\omega}_h. \tag{41}$$

Умножая (40) скалярно на $2\tau z_{\bar{t}}$, получим основное энергетическое тождество

$$2\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha, z^2_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha + 2\tau^3 (\Lambda_1\sigma_1\Lambda_2\sigma_2 z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}) = \sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha, \check{z}^2_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha + \tag{42}$$

$$+ \frac{h^2}{6}\tau \sum_{\alpha=1}^{2} ((p_\alpha z_{\bar{t}})_{\bar{x}_\alpha}, a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha \bar{t}}]_\alpha + \frac{\tau h^2}{6} (\Lambda_1 p_1 \Lambda_2 \check{z}, z_{\bar{t}}) + 2\tau (\Psi, z_{\bar{t}}).$$

Будем предполагать, что

$$0 < c_1' \leqslant p_\alpha \leqslant c_1, \quad \left|\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_\beta}\right| \leqslant c_2, \quad \left|\frac{\partial p_\alpha}{\partial t}\right| \leqslant c_3, \quad \left|\frac{\partial^2 p_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right| \leqslant c_4, \quad \alpha, \beta = 1,2. \tag{43}$$

Постоянные, зависящие только от c_1', c_1, c_2, c_3, c_4, обозначаем M.

8. По аналогии с одномерным случаем находим

$$A_1 = \frac{h^2\tau}{6} ((p_\alpha z_{\bar{t}})_{\bar{x}_\alpha}, a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha \bar{t}}]_\alpha \leqslant \frac{2}{3}\tau (1 + M_1 h) \| z_{\bar{t}} \|^2. \tag{44}$$

Перейдем к оценке других слагаемых, входящих в (42).

Рассмотрим выражение

$$A_2 = \frac{\tau h^2}{6} (\Lambda_1 p_1 \Lambda_2 \check{z}, z_{\bar{t}}) = -\frac{\tau h^2}{6} ((p_1 \Lambda_2 \check{z})_{\bar{x}_1}, a_1 z_{\bar{x}_1 \bar{t}}). \tag{45}$$

Лемма 5. *Справедливы оценки*

$$A_2 \leqslant \frac{\tau h^2}{12} \left[(a_1 a_2 p_1^{(-1_1)}, z^2_{\bar{x}_1\bar{x}_2})_{\bar{t}} - \tau (a_1 a_2 p_1^{(-1_1)}, z^2_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}}) \right] + M_2 \tau h^2 \| \check{z}_{\bar{x}_2} \| \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}} \|,$$

$$M_2 \tau h^2 \| \check{z}_{\bar{x}_2} \| \| z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}} \| \leqslant 4 M_2 \tau \| \check{z}_{\bar{x}_2} \| \| z_{\bar{t}} \| \leqslant c_0 \tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + \frac{4M_2^2}{c_0} \tau (\check{a}_2, \check{z}^2_{\bar{x}_2}]_2, \tag{46}$$

если выполнены условия (43).

Оценка (46) следует из выражения

$$A_2 = \frac{\tau h^2}{6} \Big\{ (a_2 \check{z}_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + a_{2\bar{x}_1} \check{z}^{(-1_1)}_{\bar{x}_2}, a_1 p_1^{(-1_1)} z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}} + (a_1 p_1^{(-1_1)})_{\bar{x}_2} z^{(-1_2)}_{\bar{x}_1\bar{t}}) +$$

$$+ (a_2 \check{z}_{\bar{x}_2}, p_{1\bar{x}_1} a_1 z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}} + (a_1 p_{1\bar{x}_1})_{\bar{x}_2} z^{(-1_2)}_{\bar{x}_1\bar{t}}) \Big\},$$

которое получается из (45) после применения формулы Грина по переменному x_2.

9. Лемма 6. *При любых* σ_α, $\alpha = 1,2$, *справедлива оценка*

$$A_3 = 2\tau^3 (\Lambda_1\sigma_1\Lambda_2\sigma_2 z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}) \geqslant 2\tau^3 (a_1 a_2 \sigma_1^{(-1_1)} \sigma_2, z^2_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}}) - \tag{47}$$

$$- c_0 \tau^3 (a_1 a_2, z^2_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}}) - M_3 \tau h \| z_{\bar{t}} \|^2 - M_4 \tau (I + \check{I}),$$

где

$$I = \sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha, z^2_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha.$$

Пользуясь формулой Грина по x_1 и x_2, после ряда преобразований находим ($v = z_{\bar{t}}$)

$$A_3 = 2\tau^3 \{ (a_2 (\sigma_2 v)_{\bar{x}_2}, (a_1 \sigma_{1\bar{x}_1})_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_1}) + (a_2 (\sigma_2 v)_{\bar{x}_1}, (a_1 \sigma_{1\bar{x}_1})^{(-1_2)} v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) + \tag{48}$$

$$+ ((a_2 \sigma_2 v_{\bar{x}_2} + a_2 \sigma_{2\bar{x}_2} v^{(-1_2)})_{\bar{x}_1}, a_1 \sigma_1^{(-1_1)} v_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + (a_1 \sigma_1^{(-1_1)})_{\bar{x}_2} v^{(-1_2)}_{\bar{x}_1}) \geqslant$$

$$\geqslant 2\tau^3 (a_1 a_2 \sigma_1^{(-1_1)} \sigma_2, v^2_{\bar{x}_1\bar{x}_2}) - M_5 \tau^3 \| \sigma_1 \|_0 \| \sigma_2 \|_0 \| v_{\bar{x}_1} \| \| v_{\bar{x}_2} \| -$$

$$- M_6 h^2 \tau^2 (\| \sigma_1 \|_0 + \| \sigma_2 \|_0) \| v_{\bar{x}_1\bar{x}_2} \| (\| v_{\bar{x}_1} \| + \| v_{\bar{x}_2} \|) - M_7 \tau h^4 \| v \| \| v_{\bar{x}_1\bar{x}_2} \|.$$

Подчеркнутое выражение мажорируется так:

$$\text{а)} \quad \leqslant M_4\tau\,(I+\check{I}) \text{ при } \sigma_\alpha > 0, \quad \alpha = 1,2; \tag{49}$$

$$\text{б)} \quad \leqslant M_3'\,\tau h\,\|z_{\bar{t}}\|^2 \text{ при } \sigma_\alpha < 0. \tag{50}$$

При оценке двух последних слагаемых в (48) надо отдельно рассматривать случаи: а) $0 \leqslant \sigma_\alpha \leqslant 0.5$, б) $\sigma_\alpha < 0$ и, следовательно, $\|\sigma_\alpha\|_0 \leqslant \leqslant h^2c_1/12\tau$.

Нам понадобятся также оценки

$$2\sigma_1^{(-1_1)}\sigma_2 + 1 - \sigma_1^{(-1_1)} - \sigma_2^{(-1_2)} = 0.5\,[1 + (1-2\sigma_1^{(-1_1)})(1-2\sigma_2)] + (\sigma_2 - \sigma_2^{(-1_2)}) \geqslant \geqslant 0.5 - M_7h^3/\tau, \tag{51}$$

$$Mh^3\tau^2\,\|z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}}\|^2 \leqslant M\tau^2\,h\,\|z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}}\|\,\|z_{\bar{t}}\| \leqslant c_0\tau^3\,\|z_{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}}\|^2 + M_8\tau h^2\,\|z_{\bar{t}}\|^2. \tag{52}$$

10. Собирая теперь все оценки (44), (46), (47), (51), (52) и выбирая c_0, получим из (42) при достаточно малых h и τ,

$$h \leqslant h_0, \quad \tau \leqslant \tau_0, \tag{53}$$

следующее энергетическое неравенство:

$$(1 - M_9\tau_{j+1})\,I^{j+1} \leqslant M_{10}\sum_{j'=2}^{j+1}\tau_{j'}I^{j'-1} + \frac{h^2}{12}(a_1a_2\,(p_1^{(-1_1)} + p_2^{(-1_2)}),\, z^2_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^{j+1} + \tag{54}$$
$$+ (1 + M_{10}\tau_1)\,I(0) + M_{11}\,(\overline{\|\Psi^{j+1}\|})^2.$$

При достаточно малом $h \leqslant h_0$ имеем $a_\alpha p_\alpha^{(-1_\alpha)} \leqslant 1 + M_{12}h$. Воспользуемся неравенством

$$h^2\,\|z_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2 \leqslant \frac{2}{c_1'}I.$$

В результате приходим к следующему неравенству:

$$\|z^{j+1}\| \leqslant M_{12}\,\|z_{\bar{x}}(x,0)\| + M_{13}\overline{\|\Psi^{j+1}\|} \text{ при } h \leqslant h_0, \quad \tau \leqslant \tau_0,$$

где M_{12}, M_{13} — положительные постоянные, зависящие только от c_1', c_1, . . ., c_4, l_1, l_2.

11. Тем самым доказаны теоремы:

Теорема 12. *Если выполнены условия* (45), *то производящая схема* (34) *безусловно устойчива по правой части* Ψ *и по начальным данным, так что при достаточно малых* h *и* τ *справедлива оценка*

$$\|z^{j+1}\| + \|z_{\bar{x}}\|^{j+1} \leqslant M\,\|z_{\bar{x}}(x,0)\| + M'\,\overline{\|\Psi^{j+1}\|}, \quad h \leqslant h_0, \quad \|\tau\|_0 \leqslant \tau_0, \tag{55}$$

где h_0, τ_0, M *и* M' — *положительные постоянные, зависящие только от* c_1', c_1, c_2, c_3, c_4, l_1, l_2.

Теорема 13. *Если выполнены условия, при которых*

$$\|\Psi\| = O\,(|h|^4 + \tau^2), \tag{56}$$

и условия (43), *то схема* (34) *сходится при независимом стремлении* h *и* τ *к нулю так, что при достаточно малых* h *и* τ *имеет место оценка*

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\| \leqslant M\,(|h|^4 + \|\tau^2\|_{j+1}) \text{ при } h \leqslant h_0, \quad \tau \leqslant \tau_0$$

где M — *положительные постоянные, не зависящие от выбора сетки.*

Для уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_\alpha}$$

также могут быть написаны экономические схемы повышенной точности.

Изложенными выше методами доказывается, что производящие схемы

$$Ay = 2\check{y} - (E + 0.5\,\tau^2)\Lambda\check{\check{y}}, \qquad A = \prod_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \qquad A_\alpha = E - \sigma_\alpha \tau^2 \Lambda_\alpha,$$

$$Ay_{\bar{t}} = (E - 0.5\,\tau^2\Lambda)\,\check{y}_{\bar{t}} + \tau\Lambda\check{y}$$

абсолютно устойчивы и сходятся в среднем со скоростью $O(\tau^2 + |h|^4)$. Вопрос об экономичных схемах для многомерных гиперболических уравнений будет рассмотрен отдельно.

Поступила в редакцию
21.06.1963

Цитированная литература

1. J. Douglas, J. E. Gunn. Two high-order correct difference analogues for the equation of multidimensional heat flow. Math. Comput., 1963, **17**, № 81, 71—80.
2. J. Douglas, H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc., 1956. **82**, 421—439.
3. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1207—1210.
4. Н. Н. Яненко. О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности. Изв. высш. учебн. заведений. Сер. матем., 1961, 4(23), 148—157.
5. Е. Г. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. Ж. вычисл. матем. и матем физ., 1962, **2**, № 4, 549—568.
6. Е. Г. Дьяконов. Решение некоторых многомерных задач математической физики при помощи метода сеток. Дисс. канд. физ.-мат. н., МИАН СССР, М., 1962.
7. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 2, 266—298.
8. С. К. Годунов, В. С. Рябенький. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
9. Р. Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во ин. лит., 1960.
10. M. Lees. A priori estimates for the solutions of difference approximations to parabolic partial differential equations. Duke Maht. J., 1960, **27**, № 3, 297—312.
11. А. А. Самарский. Об одном экономическом разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 5, 549—568.
12. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем физ., 1963, **3**, № 3, 431—466.
13. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 5—63.
14. Н. Н. Яненко, В. А. Сучков, Ю. Я. Погодин. О решении уравнения теплопроводности в криволинейных координатах. Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 5, 903—905.
15. J. Douglas. Alternating direction methods for three space variables. Numer. Math., 1962, **4**, 41—63.