ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Июль 1962 Август № 4

О СХОДИМОСТИ И ТОЧНОСТИ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

Однородные разностные схемы, общее определение которых дано в [1], применительно к уравнениям параболического типа с одной пространственной переменной рассматривались в [2]—[5]. Так как вопрос о сходимости разностных схем сводится к вопросу об устойчивости решения линейного уравнения относительно его правой части, граничных и начальных данных, то в [2] и [4] были, прежде всего, получены априорные оценки, из которых и следует устойчивость. Особое внимание, как и в [1], уделялось выбору таких норм для оценки правой части разностного уравнения, которые позволили бы доказать сходимость однородных схем в классе разрывных коэффициентов дифференциального уравнения. В [3] априорные оценки, полученные в [2], использовались при доказательстве равномерной сходимости и оценке порядка точности однородных разностных схем для линейного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. В [5] изучались однородные схемы для нелинейного уравнения (1) параболического типа с краевыми условиями III рода.

В данной статье мы рассматриваем однородные схемы для квазилинейных параболических уравнений с одной или несколькими пространственными переменными. В § 1 изучаются одномерные, а в § 2 — многомерные задачи. В § 1 рассматривается уравнение теплопроводности с коэффициентом теплопроводности $k = k(x, t, u)$. В этом же параграфе уточняются основные априорные оценки [2] и [4] для четырехточечной неявной схемы (схемы с опережением) и шеститочечной симметричной неявной схемы, что позволяет, в частности, получить оценку порядка точности однородных схем для квазилинейных параболических уравнений с коэффициентами, имеющими движущиеся («косые») разрывы на конечном числе кривых $x = \eta_\nu(t)$. При этом уточняются результаты работы [3], полученные для линейного уравнения теплопроводности.

Показано (п. 8, § 1), что *существует однородная разностная схема, имеющая в классе разрывных коэффициентов для параболического уравнения*

$$\mathscr{P}_3 u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} - f\left(x, t, u\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

тот же порядок точности, что и в классе гладких коэффициентов.

Напомним (см. [1], [3], [5]), что мы рассматриваем всюду однородные разностные схемы сквозного счета, которые не меняются при переходе от гладких коэффициентов к разрывным коэффициентам дифференциального уравнения и не предусматривают никаких изменений схемы в окрестности линий разрыва коэффициента теплопроводности. Все исследования проводятся для широкого класса схем, определяемых заданием шаблонных функционалов (см. [1]) весьма общего вида, а также параметра α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (веса строки).

Применяемые в [2]—[5] и здесь методы позволяют доказать сходимость однородных разностных схем для системы параболических уравнений с разрывными коэффициентами. Для этого могут быть использованы полученные в [4] априорные оценки.

В § 2 рассматриваются неявные схемы с опережением, аппроксимирующие многомерное уравнение параболического типа. Проведенное по аналогии с одномерным случаем исследование позволяет доказать *равномерную* сходимость и дать оценку порядка точности однородных схем в классе гладких и разрывных коэффициентов. Схемы частного вида для случая гладких коэффициентов рассматривались рядом авторов (их работы цитировались в [6], см. также [7]). В заключение укажем, что для решения многомерного параболического уравнения использование неявных схем, рассмотренных в § 2, связано с большим объемом вычислений, производимых для решения разностных уравнений. В последние годы был предложен ряд экономичных вычислительных схем для решения многомерных задач. Применяемые нами методы изучения сходимости позволяют дать обоснование (доказать равномерную сходимость), в частности, так называемого метода дробных шагов (см. [8]). Этому вопросу будет посвящена отдельная статья.

§ 1. Одномерные параболические уравнения

1. Введение

В [5] рассматривались однородные схемы сквозного счета для нелинейного уравнения

$$\mathcal{P}_1 u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f\left(x, t, u\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{1}$$

в области $\overline{Д} = (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ и краевых условий III рода

$$\left.\begin{aligned} k\frac{\partial u}{\partial x} - \sigma_1(t)\,u &= u_1(t) \qquad \text{при } x = 0,\\ k\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_2(t)\,u &= u_2(t) \qquad \text{при } x = 1.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Полученные в [5] результаты обобщаются на случай краевых условий более общего вида:

$$\left.\begin{aligned} k\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi_1\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \qquad \text{при } x = 0,\\ -k\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi_2\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \qquad \text{при } x = 1,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $\varphi_s(t, u, q)$ $(s = 1,2)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial u} \geqslant 0, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \geqslant c_1 > 0, \qquad \frac{\partial \varphi_s}{\partial q} \geqslant c_2 > 0, \qquad s = 1,2, \tag{4}$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные. Простейшим примером условий подобного типа являются условия:

$$k\frac{\partial u}{\partial x} = C_1(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_1(t)\,u + u_1(t) \qquad \text{при } x = 0, \tag{5}$$

$$-k\frac{\partial u}{\partial x} = C_2(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_2(t)\,u + u_2(t) \qquad \text{при } x = 1. \tag{5'}$$

Физический смысл условия (5) ясен: на границе $x = 0$ имеется сосредоточенная теплоемкость величины $C_1(t)$ и происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, имеющей температуру $-u_1(t)/\sigma_1$.

Мы не имеем возможности здесь останавливаться на изучении задач с условиями (3). Отметим лишь, что построение разностых краевых условий, имеющих второй порядок аппроксимации, проводится по схеме, предложенной в [5]. Оценка влияния погрешности аппроксимации краевых условий на точность решения разностной краевой задачи проводится с помощью априорных оценок, аналогичных оценкам, полученным в [5] (теорема 1).

Поскольку способ учета погрешности за счет аппроксимации краевых условий (2) (и тем самым (3)) указан в [5], то в дальнейшем мы для упрощения изложения ограничимся детальным изучением схем для задач с граничными условиями I рода.

Будем рассматривать в прямоугольнике $\overline{Д}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ следующую задачу:

$$\mathcal{P}_2 u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{6}$$

$$u(0,t) = u_1(t), \qquad u(1,t) = u_2(t), \tag{7}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{8}$$

$$k(x,t,u) \geqslant c_1 > 0, \qquad c(x,t) \geqslant c_2 > 0. \tag{9}$$

Функции $k(x,t,u)$ и $f(x,t,u,p)$ имеют производные $\frac{\partial k}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial p}$, непрерывные относительно аргументов u и p*.

Функции $k(x,t,u)$, $f(x,t,u,p)$ и $c(x,t)$ могут иметь разрывы I рода по переменным (x,t) на конечном числе дифференцируемых и попарно не пересекающихся кривых Γ_ν, задаваемых уравнениями $x = \eta_\nu(t)$, $\nu = 1,2,\ldots,\nu_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, причем $\eta_{\nu_1}(t) < \eta_{\nu_2}(t)$ при $\nu_1 < \nu_2$, $\eta_1(t) > \eta_0(t) = 1$, $\eta_{\nu_0}(t) < \eta_{\nu_0+1}(t) = 1$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Обозначим, как обычно (см. [3], [5]), через Δ_ν и $Д$ области:

$$\Delta_\nu = (\eta_\nu(t) < x < \eta_{\nu+1}(t),\quad 0 < t \leqslant T), \qquad \nu = 0,1,2,\ldots,\nu_0,$$

$$\overline{\Delta}_\nu = (\eta_\nu(t) \leqslant x \leqslant \eta_{\nu+1}(t),\quad 0 \leqslant t \leqslant T), \qquad Д = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \Delta_\nu.$$

Если коэффициент $k(x,t,u)$ разрывен на кривой Γ_ν $(x = \eta_\nu(t))$, то на этой

* При изучении сходимости решения разностных задач к заданному единственному решению $u = u(x,t)$ задачи (6)—(9) используется ограниченность производных $k(x,t,u)$ и $f(x,t,u,p)$ по u, p; при этом мы имеем в виду возможность продолжения надлежащим образом функций k, f вне области изменения аргументов u, $p(u)$, соответствующих заданному решению u.

кривой выполняются условия сопряжения

$$[u]_\nu = 0, \qquad \left[k\frac{\partial u}{\partial x}\right]_\nu = 0 \text{ при } x = \eta_\nu(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{10}$$

где $[u]_\nu = u(\eta_\nu(t)+0, t) - u(\eta_\nu(t)-0, t) = u_{\text{п},\nu} - u_{\text{л},\nu}$ и т. д.

Если $\eta'_\nu(t) \equiv 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$, т. е. $\eta_\nu(t) = \text{const}$, то мы говорим, что $k(x, t, u)$ имеет неподвижный разрыв. В общем случае при $\eta'_\nu(t) \neq 0$ мы говорим, что k имеет движущийся («косой») разрыв.

2. Однородные разностные схемы

Пусть $\bar\Omega = (x_i = ih,\ t_j = j\tau,\ i = 0,1,\ldots,N,\ j = 0,1,\ldots,K,\ h = 1/N,\ \tau = T/K)$ — разностная сетка, Ω — совокупность ее внутренних точек (x_i, t_j), $1 \leqslant i \leqslant N-1$, $1 \leqslant j \leqslant K$; $\bar\omega_h = (x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots,N)$, $\omega_h = (x_i = ih, i = 1,2,\ldots,N-1)$ — сетка по x; $\bar\omega_\tau = (t_j = j\cdot\tau,\ j = 0,1,\ldots,T)$, $\omega_\tau = (t_j = j\tau, j = 1,2,\ldots,K)$ — сетка по t. Сеточную функцию y_i^j, заданную на $\bar\Omega$ или ее части, будем обозначать $y(x, t)$ или просто y. В дальнейшем используются обозначения

$$y = y(x, t_{j+1}) = y^{j+1}, \qquad \check y = y(x, t_j) = y^j, \qquad y^{\pm 1} = y(x \pm h, t),$$
$$y_{\bar x} = (y - y^{(-1)})/h, \quad y_x = (y^{(+1)} - y)/h, \quad y_{\bar t} = (y - \check y)/\tau, \qquad y_{\overset{\circ}{x}} = 0.5(y_{\bar x} + y_x),$$

так что $(ay_{\bar x})_x = [a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})]/h^2$,

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \qquad (y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h.$$

Дифференциальному уравнению (6) поставим в соответствие разностную схему

$$\mathcal{P}^\alpha_{h\tau} y = (ay_{\bar x})^{(\alpha)}_x + \varphi(x, t^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, \lambda^{(\alpha)}(y)) - \rho^{(\alpha)} y_{\bar t}, \tag{11}$$

где $v^{(\alpha)} = \alpha v + (1-\alpha)\check v$, α — произвольный параметр, принимающий значения на отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$a = a(x, t, y^*), \qquad y^* = 0.5(y + y^{(-1)}), \qquad t^{(\alpha)} = \alpha t + (1-\alpha)\check t, \qquad \check t = t - \tau,$$
$$\rho = \rho(x, t), \qquad \lambda(y) = y_{\overset{\circ}{x}}.$$

Если $\alpha = 1$, то $\mathcal{P}^{(1)}_{h\tau} y$ есть четырехточечная схема с опережением; при $\alpha = 0.5$ получаем шеститочечную неявную схему $\mathcal{P}^{(0.5)}_{h\tau} y$. Схема $\mathcal{P}^{(\alpha)}_{h\tau} y$ определяется заданием параметра α и закона для вычисления коэффициентов a, φ и ρ через коэффициенты дифференциального уравнения. Нам потребуются в дальнейшем следующие свойства коэффициентов a, φ и ρ:

1) $0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_1'$, $0 \leqslant c_2 \leqslant \rho \leqslant c_2'$, если $0 < c_1 < k < c_1'$, $0 < c_2 \leqslant c(x, t) \leqslant c_2'$;
2) $a(x, t, u) - k(x, t, u) = 0.5hk'(x, t, u) + O(h^2)$, $a_x(x, t, u) = k'(x, t, u) + O(h^2)$,

где штрих означает дифференцирование по x;

3) $\varphi(x, t, u, \lambda(u)) - f(x, t, u, u') = O(h^2)$;
4) $\rho(x, t) - c(x, t) = O(h^2)$,

если $k(x, t, u)$, $f(x, t, u, u')$, $c(x, t)$ и решение $u(x, t)$ уравнения (6) дифференцируемы достаточное число раз, например k имеет три производные, f и c — по две производные, а $u(x, t)$ — четыре производные по x. Условия 1) — 4) оказываются достаточными, чтобы схема (11) имела второй порядок аппроксимации по x. Конкретное представление a, φ и ρ через k, f и c фактически не используется. Кроме того, мы требуем, чтобы схема $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}y$ была однородной схемой, т. е. ее коэффициенты вычислялись по одному и тому же закону через коэффициенты дифференциального уравнения во всех точках произвольной сетки для всего класса кусочно-непрерывных функций. В работе [1] был указан способ вычисления коэффициентов схемы при помощи так называемых шаблонных функционалов

$$A^h[\mu(s)] \quad (-1 \leqslant s \leqslant 0), \qquad F^h[\mu(s)] \quad (-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5)$$

по закону

$$a(x, t, y^*) = A^h[k(x + sh, t, y^*)], \qquad \rho(x, t) = F^h[c(x + sh, t^*)],$$
$$\varphi(x, t, y, \lambda) = F^h[f(x + sh, t, y, \lambda)].$$

Без ограничения общности будем считать A^h и F^h каноническими функционалами, не зависящими от h, и обозначать их через A и F. Условия 1) — 4) будут выполнены, если предположить:

а) $A[\mu(s)]$ — однородный неубывающий функционал первой степени имеющий дифференциалы до третьего порядка $A_m[\mu, f]$ $(m = 1, 2, 3)$ и удовлетворяющий условиям

$$A[1] = 1, \qquad A_1[s] = -0.5 \qquad (A_1[1, s] = A_1[s]);$$

б) $F[\mu(s)]$ — линейный неотрицательный функционал и

$$F[1] = 1, \qquad F[s] = 0.$$

Таким образом, семейство исходных схем $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ будет определяться заданием параметра $\alpha \in [0,1]$ и класса шаблонных функционалов A и F, удовлетворяющих условиям а) и б). Все последующие исследования относятся ко всему семейству исходных схем при $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Фактически нас интересуют лишь два значения параметра α: $\alpha = 0.5$ и $\alpha = 1$ Явные схемы $(\alpha = 0)$ мы не рассматриваем.

Разностная схема с шаблонными функционалами (см. [1])

$$A[\mu(s)] = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{\mu(s)}\right]^{-1}, \qquad F[\mu(s)] = \int_{-0.5}^{0.5} \mu(s)\, ds \tag{12}$$

обеспечивает, как будет показано ниже, наиболее высокий порядок точности в классе разрывных коэффициентов. При этом функцию f в (6) следует преобразовать к виду

$$f\left(x, t, u, 2k\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

что всегда возможно, так как $k \geqslant c_1 > 0$, и в формуле (11) вместо λ пользоваться аппроксимацией

$$\lambda(y) = a^{(+1)}y_{x} + ay_{\bar{x}}. \tag{13}$$

В дальнейшем, говоря о схеме (12), мы будем иметь в виду и формулу (13).

Формулируем теперь разностную задачу, соответствующую задаче (6) — (9):

$$\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)} y = 0 \text{ в } \Omega, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0,t) = u_1(t), \quad y(1,t) = u_2(t) \quad &\text{при } t \in \omega_\tau, \\ y(x,0) = u_0(x) \quad &\text{при } x \in \omega_h. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Из а), б) и (9) получаем

$$0 < c_1 \leqslant a, \qquad 0 < c_2 \leqslant \rho. \tag{16}$$

3. Разностная задача для погрешности

Решая задачу (14) — (16) вместо задачи (6) — (9), мы допускаем ошибку $z = y - u$. Найдем условия для определения z. Подставляя $y = z + u$ в (14) и учитывая (6), (7), (8) и (15), получим для z следующие условия:

$$\overline{\mathcal{P}}_{h\tau}^{\alpha} z = (a(x,t,y^*)\, z_{\bar{x}})_x^{(\alpha)} - \rho^{(\alpha)} z_{\bar{t}} + Q(z) = -\Psi \quad \text{в } \Omega, \tag{17}$$

$$z(0,t) = 0, \qquad z(1,t) = 0 \quad \text{при } t \in \omega_\tau, \tag{18}$$

$$z(x,0) = 0 \qquad \text{при } x \in \omega_h, \tag{19}$$

$$Q(z) = (gz^*)_x^{(\alpha)} + b z_{\overset{\circ}{x}}^{(\alpha)} + d z^{(\alpha)}, \tag{20}$$

$$g = \overline{\frac{\partial a(x,t,u)}{\partial u}}, \qquad b = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}, \qquad d = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}, \qquad y^* = 0.5\,(y^{(-1)} + y).$$

Черта сверху означает, что производные берутся при некоторых средних значениях аргументов u и λ (см. [5]). Правая часть Ψ уравнения (17) есть, очевидно, погрешность аппроксимации схемы (14) на решении дифференциального уравнения (6).

Она определяется по формуле

$$\begin{gathered} \Psi = \psi_a^{(\alpha)} + \overline{\psi}, \qquad \psi_a = (a(x,t,u^*)\, u_{\bar{x}})_x - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ \overline{\psi} = \varphi\left(x,t^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}, u_{\overset{\circ}{x}}^{(\alpha)}\right) - \left(f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)^{(\alpha)} - \left[\rho^{(\alpha)} u_{\bar{t}} - \left(c\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{(\alpha)}\right]. \end{gathered} \tag{21}$$

Мы будем предполагать, что задача (6)—(10) имеет единственное, непрерывное в $\overline{Д}$ решение $u = u(x,t)$ и выполнены

Условия A_α: 1) функция $k(x,t,u)$ имеет вторую производную по x, удовлетворяющую условию Липшица по x; 2) функции $f'(x,t,u,\lambda)$, $c'(x,t)$, $u'''(x,t)$ удовлетворяют условию Липшица по x; 3) производные $\partial^{m_\alpha - 1} c / \partial t^{m_\alpha - 1}$, $\partial^{m_\alpha} u / \partial t^{m_\alpha}$ удовлетворяют условию Липшица по t, где $m_\alpha = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $m_\alpha = 1$ при $\alpha \neq 0.5$.

Если выполнены условия A_α в $\overline{Д}$ (или в некоторой фиксированной окрестности точки (x,t)), то нетрудно показать, что

$$\Psi(x,t) = O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha}), \quad m_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{при } \alpha = 0.5, \\ 1 & \text{при } \alpha \neq 0.5. \end{cases} \tag{22}$$

4. Простейшая априорная оценка

Вопрос о сходимости и порядке точности разностной задачи (14) — (16) сводится к оценке решения задачи (17) — (21) через погрешность аппроксимации Ψ, т. е. к доказательству устойчивости решения по правой части Ψ. Для этой цели мы используем различные априорные оценки в зависимости от вида уравнения и свойств коэффициентов дифференциального уравнения. Наиболее просто исследуется случай, когда $k = k(x, t)$ не зависит от $u(x, t)$ и функции k, f и c являются гладкими. Если $k = k(x, t)$, то в формуле (20) $g = 0$. Рассмотрим неявную схему с опережением, т. е. при $\alpha = 1$.

Пусть $z = z(x, t)$ — решение следующей задачи:

$$\rho z_{\bar t} = (a z_{\bar x})_x + b_1 z_x + b_2 z_{\bar x} + d_1 z + d_2 \check z + \psi, \tag{23}$$

$$a^{(+1)} z_x = \mathscr{E}_1 z_{\bar t} + \sigma_1 z - \nu_1 \text{ при } x = 0, \quad -a z_{\bar x} = \mathscr{E}_2 z_{\bar t} + \sigma_2 z - \nu_2 \text{ при } x = x_N = 1, \tag{24}$$

$$z(x, 0) = z_0(x), \tag{25}$$

$$\left.\begin{array}{llll} 0 < c_1 \leqslant a, & 0 < c_2 \leqslant \rho, & |d_s| \leqslant c_3, & |b_s| \leqslant c_4, \ s = 1, 2, \\ \sigma_s \geqslant 0, & \mathscr{E}_s \geqslant 0, & \sigma_s + \mathscr{E}_s \geqslant c_5 > 0, & \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant c_6 > 0. \end{array}\right\} \tag{26}$$

Краевые условия (24) получаются при разностной аппроксимации порядка $O(h^2)$ краевых условий III рода (2) или условий (5) (см. [2] и [5]). В случае условий (2) $\mathscr{E}_s = O(h)$. Краевые условия I рода $z(0, t) = \nu_1$ и $z(1, t) = \nu_2$ следуют из (24) при замене в (24) ν_1 на $\sigma_1 \nu_1$, ν_2 на $\sigma_2 \nu_2$ и последующем предельном переходе $\sigma_1 \to \infty$ и $\sigma_2 \to \infty$.

Теорема 1. *Решение задачи* (23) — (26) *устойчиво по правой части* ψ, *граничным данным* ν_1 *и* ν_2 *и начальным значениям* $z(x, 0)$, *так что при достаточно малом* $\tau < \tau_0$ *и любом* h *имеет место оценка*

$$\|z(x, 0)\|_0 \leqslant M \{ \|z(x, 0)\|_0 + \overline{|\nu_1(t)|} + \overline{|\nu_2(t)|} \} + M \Big[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\psi(x, t')\|_0^2 \Big]^{1/2}, \tag{27}$$

где τ_0 *и* M — *постоянные, зависящие от* $c_1, \ldots, c_6$ *и не зависящие от сетки*;

$$\overline{|\nu_s(t)|} = \max_{\tau \leqslant t' \leqslant t} |\nu_s(t')|, \qquad s = 1, 2.$$

Доказательство теоремы проводится методом, аналогичным используемому в теории дифференциальных уравнений, и основано на принципе максимума для (23). Введем новую функцию v^j, полагая $z^j = v^j (1 + \overline{M}\tau)^j$, где $\overline{M}$ — произвольная положительная постоянная, которую мы выберем позже. Для сеточной функции $v(x, t)$ получим условия:

$$\left.\begin{array}{l} \bar\rho v_{\bar t} - (a v_{\bar x})_x = b_1 v_x + b_2 v_{\bar x} - d v + \bar d_2 \check v + \bar\psi; \\ \bar{\mathscr{E}}_1 v_{\bar t} - a^{(+1)} v_x + \bar\sigma_1 v = \bar\nu_1 \text{ при } x = 0, \quad \bar{\mathscr{E}}_2 v_{\bar t} + a v_{\bar x} + \bar\sigma_2 v = \bar\nu_2 \text{ при } x = 1; \end{array}\right\} \tag{28}$$

$$v(x, 0) = z(x, 0),$$

где

$$\bar\rho = \rho\gamma, \quad d = -d_1 + \rho\overline{M}\gamma, \quad \bar d_2 = d_2\gamma, \quad \bar\psi^j = \psi^j\gamma^j, \quad \bar\nu_s^j = \nu_s^j\gamma^j,$$

$$\bar\sigma_s = \sigma_s + \mathscr{E}_s\gamma\overline{M}, \quad \bar{\mathscr{E}}_s = \gamma\mathscr{E}_s, \quad \gamma = 1/(1 + \overline{M}\tau), \quad s = 1, 2.$$

Формулируем условия для v^2. Умножая (28) на $2v$ и учитывая оче-

видные тождества

$$2v\,(av_{\bar x})_x = (a\,(v^2)_{\bar x})_x - av_{\bar x}^2 - a^{(+1)}v_x^2, \qquad 2v\cdot v_{\bar t} = (v^2)_{\bar t} + \tau v_{\bar t}^2,$$

$$2v\cdot v_x = (v^2)_x - hv_x^2, \qquad 2v\cdot v_{\bar x} = (v^2)_{\bar x} + hv_{\bar x}^2,$$

получим

$$\bar\rho\,(v^2)_{\bar t} - (a\,(v^2)_{\bar x})_x + Q\,(v) + 2dv^2 = 2v\,(b_1v_x + b_2v_{\bar x}) + 2\bar d_2\check v v + 2v\bar\psi, \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\mathscr{E}}_1\,(v^2)_{\bar t} - a^{(+1)}\,(v^2)_x + 2\bar\sigma_1 v^2 + R_1\,(v) = 2\bar\nu_1 v \quad \text{при } x = 0,\\ &\bar{\mathscr{E}}_2\,(v^2)_{\bar t} + a\,(v^2)_{\bar x} + 2\bar\sigma_2 v^2 + R_2\,(v) = 2\bar\nu_2 v \quad \text{при } x = x_N = 1,\end{aligned}\right\} \tag{29'}$$

$$Q\,(v) = \bar\rho\tau v_{\bar t}^2 + av_{\bar x}^2 + a^{(+1)}v_x^2,$$

$$R_1\,(v) = (\tau\bar{\mathscr{E}}_1 v_{\bar t}^2 + ha^{(+1)}v_x^2)\,|_{x=0}, \qquad R_2\,(v) = (\tau\bar{\mathscr{E}}_2 v_{\bar t}^2 + ha v_{\bar x}^2)\,|_{x=1}.$$

Пользуясь известным неравенством $|ab| \leqslant c_0a^2/2 + b^2/2c_0$, где c_0 — произвольная положительная величина, получим

$$2\,|(b_1v_x + b_2v_{\bar x})\,v| \leqslant (2c_4^2/c_1)\,v^2 + av_{\bar x}^2 + a^{(+1)}v_x^2, \qquad 2\,|\bar\psi v| \leqslant c_0v^2 + \bar\psi^2/c_0,$$

$$2\,|\bar d_2\check v v| \leqslant 2\gamma c_3v^2 + 2\gamma c_3|v|\,\tau\,|v_{\bar t}| \leqslant 2\gamma\,(c_3 + 0.5c_3^2/c_*)\,v^2 + \gamma c_*\tau^2 v_{\bar t}^2,$$

где $c_* = c_4^2/c_1 + c_3 + 0.5c_0$. Таким образом, правая часть уравнения (29) мажорируется выражением

$$2\,[\gamma\,(c_3 + 0.5c_3^2/c_*) + c_* - c_3]\,v^2 + \gamma c_*\tau^2 v_{\bar t}^2 + \bar\psi^2/c_0$$

и вместо (29) можно написать неравенство

$$\bar\rho\,(v^2)_{\bar t} - (a\,(v^2)_{\bar x})_x + \gamma\,(c_2 - \tau c_*)\,v_{\bar t}^2 + 2d_*v^2 \leqslant \bar\psi^2/c_0, \tag{29''}$$

где $d_* = (c_2\overline{M} - c_3 - 0.5c_3^2/c_*)\,\gamma - c_*$. Выберем теперь $\overline{M}$ таким, чтобы $d_* > 0$. Это условие будет выполнено, если τ достаточно мало ($\tau < \tau_0'$), а $\overline{M}$ достаточно велико ($\overline{M} > M_*'$):

$$\tau < \tau_0' = \frac{c_2}{c_*}\left(1 - \frac{M_*'}{\overline{M}}\right), \qquad \overline{M} > M_*' = \frac{(c_3 + c_*)\,c_* + 0.5c_3^2}{c_2c_*} \tag{30}$$

(выбирая, например, $\overline{M} = 2M_*'$, получим $\tau_0' \leqslant 0.5c_2/c_*$). Отсюда следует, что $c_2 - \tau c_* > 0$ и

$$\bar\rho\,(v^2)_{\bar t} - (a\,(v^2)_{\bar x})_x + 2d_*v^2 \leqslant \bar\psi^2/c_0. \tag{31}$$

Пользуясь оценкой $2\,|\nu_s z| \leqslant c_0'z^2 + \nu_s^2/c_0'$ $(s = 1, 2)$, где c_0' — произвольная положительная величина, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\mathscr{E}}_1\,(v^2)_{\bar t} - a^{(+1)}\,(v^2)_x + 2\bar\sigma_{1*}v^2 \leqslant \nu_1^2/c_0' \quad \text{при } x = 0,\\ &\bar{\mathscr{E}}_2\,(v^2)_{\bar t} + a\,(v^2)_{\bar x} + 2\bar\sigma_{2*}v^2 \leqslant \nu_2^2/c_0' \quad \text{при } x = 1,\end{aligned}\right\} \tag{31'}$$

где $\bar\sigma_{1*} = \bar\sigma_1 - 0.5c_0'$, $\bar\sigma_{2*} = \bar\sigma_2 - 0.5c_0'$.

Потребуем теперь, чтобы $\bar\sigma_{s*} \geqslant m_* > 0$ $(s = 1, 2)$, где m_* — некоторая заданная постоянная. Это условие будет выполнено, если $\tau < \tau_0''$ (c_5, c_0', m_*), $\overline{M} > M_*'' > 0$. Учитывая (30) и обозначая τ_0 наименьшее из τ_0' и τ_0'', M_* —

наибольшее из M'_* и M''_*, получим

$$d_* > 0, \qquad \bar{\sigma}_{1*} \geqslant m_* > 0, \qquad \bar{\sigma}_{2*} \geqslant m_* > 0 \qquad \text{при } \tau < \tau_0,\ \overline{M} > M_* > 0. \quad (32)$$

Представим v в виде суммы $v = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)} + v^{(4)}$, где $v^{(1)}$ — решение уравнения (28) с однородными граничными и начальными условиями, $v^{(2)}$ — решение однородного уравнения ($\bar{\psi} = 0$) с однородными граничными условиями ($\nu_1 = \nu_2 = 0$) и начальным условием $v^{(2)}(x, 0) = z(x, 0)$, $v^{(3)}$ — решение задачи (28) при $\bar{\nu}_2 = 0$, $\bar{\psi} = 0$, $v^{(3)}(x, 0) = 0$, а $v^{(4)}$ — решение задачи (28) при $\bar{\nu}_1 = 0$, $\bar{\psi} = 0$, $v^{(4)}(x, 0) = 0$.

Функция $w = (v^{(1)})^2 > 0$ может достигать максимального значения только во внутренних точках сетки Ω. В самом деле, предположим, например, что она достигает максимума в точке $(0, t)$. Тогда $w_{\bar{t},0} \geqslant 0$, $w_{x,0} \leqslant 0$ в этой точке и условие (31′) дает $2m_* w^2(0, t) \leqslant 0$, что невозможно.

Фиксируем некоторое $t \in \omega_\tau$. Пусть $w(x,t) = (v^{(1)})^2 > 0$ принимает наибольшее значение при $x = \bar{x} \in \omega_h$; тогда $-(a\omega_{\bar{x}})_x \geqslant 0$ в точке $(\bar{x}, t)$ и неравенство (31) дает

$$\| v^{(1)} \|_0^2 \leqslant \| \check{v}^{(1)} \|_0^2 + \tau \| \bar{\psi} \|_0^2 / \bar{c}_0, \quad \bar{c}_0 = c_0 c_2 / (1 + \overline{M}\tau).$$

Отсюда следует, что

$$\| v^{(1)}(x, t) \|_0 \leqslant \left(\frac{1}{\bar{c}_0} \sum_{t'=\tau}^{t} \tau \| \bar{\psi}(x, t') \|_0^2 \right)^{1/2}.$$

Функция $v^{(2)}(x, t)$, очевидно, не может иметь максимума ни внутри Ω, ни при $x = 0$ или $x = 1$, т. е.

$$\| v^{(2)}(x, t) \|_0 \leqslant \| z(x, 0) \|_0.$$

Функция $v^{(3)}(x, t)$ может иметь максимум только в некоторой точке $(0, t)$ границы. В этой точке $w_{\bar{t},0} \geqslant 0$, $w_{x,0} \leqslant 0$, где $w = (v^{(3)})^2$, и первое из неравенств (31′) дает

$$\| v^{(3)}(x, t) \|_0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{c_0' m_*}} \overline{|\bar{\nu}_1(t)|}, \qquad \text{где } \overline{|\bar{\nu}_1(t)|} = \max_{\tau \leqslant t' \leqslant t} |\bar{\nu}_1(t')|.$$

Аналогично оценивается $\| v^{(4)} \|_0$. Собирая все оценки и возвращаясь к исходной функции $z^j = v^j (1 + \overline{M}\tau)^j$, получим неравенство (27). Заметим, что c_0, c_0', m_* следует выбрать так, чтобы постоянная M в (27) была минимальной. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 и оценка (27), очевидно, верны для первой краевой задачи

$$z(0, t) = \nu_1, \qquad z(1, t) = \nu_2,$$

в чем можно убедиться, совершив указанный выше предельный переход или повторяя доказательство теоремы, которое в данном случае упрощается.

5. Улучшенные априорные оценки для схемы с опережением

В этом пункте мы, следуя методу, изложенному в [2], получим ряд новых оценок для четырехточечной схемы с опережением. Улучшенные

оценки позволят в дальнейшем, в частности, уточнить порядок точности однородных схем в случае движущихся разрывов (ср. [3]).

Рассмотрим следующую задачу:

$$\rho z_{\bar t} = (a z_{\bar x})_x + Q(z) + \psi, \tag{33}$$

$$Q(z) = (g_{11} z)_x + (g_{12} \check z)_x + (g_{22} z)_{\bar x} + (g_{21} \check z)_{\bar x} + b_1 z_{\hat x} + b_2 z_{\bar x} + d_1 z + d_2 \check z, \tag{34}$$

$$a^{(+1)} z_x = \mathscr{E}_1 z_{\bar t} + \sigma_1 z - \nu_1 \text{ при } x = 0, \quad -a z_{\bar x} = \mathscr{E}_2 z_{\bar t} + \sigma_2 z - \nu_2 \text{ при } x = 1, \tag{35}$$

$$z(x, 0) = z_0(x), \tag{36}$$

где $\rho = \rho(x, t)$, $a = a(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$, $g_{sk} = g_{sk}(x, t)$, $b_s = b_s(t)$, $d_s = d_s(t)$, $\mathscr{E}_s = \mathscr{E}_s(t)$, $\sigma_s = \sigma_s(t)$, $\nu_s = \nu_s(t)$ $(s, k = 1, 2)$ суть заданные сеточные функции. Коэффициенты задачи удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < c_1 \leqslant a, \quad 0 < c_2 \leqslant \rho, \quad |d_s| \leqslant c_3, \quad |b_s| \leqslant c_4, \quad |g_{sk}| \leqslant c_5 \quad (s, k = 1, 2), \\ \sigma_s \geqslant 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant c_6 > 0, \quad 0 < c_7 h \leqslant \mathscr{E}_s, \end{array}\right\} \tag{37}$$

$$|\rho_{\bar t}| \leqslant c_8, \quad |(\mathscr{E}_s)_{\bar t}| \leqslant c_9 \mathscr{E}_s, \qquad s = 1, 2, \tag{38}$$

где $c_1 - c_9$ — положительные постоянные, не зависящие от h и τ.

Введем новую функцию v, полагая

$$z^j = v^j (1 + \overline{M}\tau)^j,$$

где $\overline{M} > 0$ — произвольная постоянная. Для v получим условия:

$$\bar\rho v_{\bar t} - (a v_{\bar x})_x + d v = \Psi = \bar\psi + Q_1(v), \tag{39}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^{(+1)} v_x = \bar{\mathscr{E}}_1 v_{\bar t} + \bar\sigma_1 v + \bar\nu_1 \quad \text{при } x = 0, \\ -a v_{\bar x} = \bar{\mathscr{E}}_2 v_{\bar t} + \bar\sigma_2 v - \bar\nu_2 \quad \text{при } x = 1, \end{array}\right\} \tag{40}$$

$$v(x, 0) = z(x, 0) = z_0(x), \tag{41}$$

$$Q_1(v) = (g_{11} v)_x + (\bar g_{12} \check v)_x + (g_{22} v)_{\bar x} + (\bar g_{21} \check v)_{\bar x} + b_1 v_x + b_2 v_{\bar x} + \bar d_2 \check v, \tag{42}$$

где

$$\bar\rho = \rho\gamma, \quad d = \overline{\rho M} - d_1, \quad \bar d_2 = d_2 \gamma, \quad \bar g_{sk} = g_{sk} \cdot \gamma, \quad \bar{\mathscr{E}}_s = \mathscr{E}_s \cdot \gamma,$$

$$\bar\sigma_s = \sigma_s + \overline{M}\gamma \mathscr{E}_s, \quad \gamma = 1/(1 + \overline{M}\tau), \quad \bar\psi^j = \psi^j (1 + \overline{M}\tau)^{-j};$$

$$\bar\nu_s^j = \nu_s^j (1 + \overline{M}\tau)^{-j} \quad (s, k = 1, 2).$$

При дальнейшем изложении мы следуем работе [2], в ряде мест уточняя полученные там оценки. Умножая уравнение (39) и краевые условия (40) на $v \cdot v^2 \ldots v^{2^{m-1}} = v^{\alpha_n}$, где $\alpha_n = 2^n - 1$, получим для $\overset{n}{v} = v^{2^n}$ задачу:

$$\bar\rho \overset{n}{v}_{\bar t} - \left(a \overset{n}{v}_{\bar x}\right)_x + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} \left(a \left(\overset{k}{v}_{\bar x}\right)^2 + a^{(+1)} \left(\overset{k}{v}_x\right)^2 + \tau\bar\rho \left(\overset{k}{v}_{\bar t}\right)^2\right) v^{\alpha_n - \alpha_{k+1}} + \tag{43}$$

$$+ 2^n d \overset{n}{v} = 2^n v^{\alpha_n} \Psi \quad \text{(уравнение } n\text{-го ранга)},$$

$$a^{(+1)}\overset{n}{v}_{\bar{x}} = \bar{\mathscr{E}}_1\overset{n}{v}_{\bar{t}} + 2^n\bar{\sigma}_1\overset{n}{v} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left(ha^{+(1)}\left(\overset{k}{v}_x\right)^2 + \tau\bar{\mathscr{E}}_1\left(\overset{k}{v}_{\bar{t}}\right)^2\right) v^{\alpha_n-\alpha_k+1} + \tag{44}$$

$$+ 2^n\bar{\nu}_1 v^{\alpha_n} \quad \text{при } x = 0,$$

$$-a\overset{n}{v}_{\bar{x}} = \bar{\mathscr{E}}_2\overset{n}{v}_{\bar{t}} + 2^n\bar{\sigma}_2\overset{n}{v} + \sum_{k=0}^{n-1} 2_{n-k-1}\left(ha\left(\overset{k}{v}_{\bar{x}}\right)^2 + \tau\bar{\mathscr{E}}_2\left(\overset{k}{v}_{\bar{t}}\right)^2\right) v^{\alpha_n-\alpha_k+1} - \tag{44'}$$

$$- 2^n\bar{\nu}_2 v^{\alpha_n} \quad \text{при } x = 1,$$

$$\overset{n}{v}(x, 0) = \overset{n}{z}(x, 0) \tag{45}$$

$$\left(\overset{k}{v}_{\bar{t}} = \left(\overset{k}{v} - \check{\overset{k}{v}}\right)/\tau, \quad \overset{k}{v}_{\bar{x}} = \left(\overset{k}{v} - \overset{k}{v}^{(-1)}\right)/h \quad \text{и т. д.}\right).$$

Умножая уравнение (43) на h, суммируя по внутренним точкам $x = h,\ 2h, \ldots, (N-1)h$ сетки ω_h и учитывая (44), (44′), приходим к интегральному тождеству n-го ранга

$$[\bar{\rho}, \overset{n}{v}]_{\bar{t}} + 2I_n + P_n + 2^n[d, \overset{n}{v}] = 2^n[v^{\alpha_n}, \Psi] + [\bar{\rho}_{\bar{t}}, \check{\overset{n}{v}}], \tag{46}$$

где

$$[\bar{\rho}, \overset{n}{v}] = (\bar{\rho}, \overset{n}{v}) + \bar{\mathscr{E}}_1\overset{n}{v}_0 + \bar{\mathscr{E}}_2\overset{n}{v}_N, \quad [d, \overset{n}{v}] = (d, \overset{n}{v}) + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)(\bar{\sigma}_1\overset{n}{v}_0 + \bar{\sigma}_2\overset{n}{v}_N), \tag{47}$$

$$I_n = \left(a, \left(\overset{n-1}{v}_{\bar{x}}\right)^2\right] + \sum_{k=0}^{n-2} 2^{n-k-2}\left\{\left(a\left(\overset{k}{v}_{\bar{x}}\right)^2, v^{\alpha_n-\alpha_k+1}\right] + \left[a^{(+1)}\left(\overset{k}{v}_x\right)^2, v^{\alpha_n-\alpha_k-1}\right)\right\} +$$

$$+ \bar{\sigma}_1\overset{n}{v}_0 + \bar{\sigma}_2\overset{n}{v}_N, \tag{48}$$

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left[\bar{\rho}\left(\overset{k}{v}_{\bar{t}}\right)^2, v^{\alpha_n-\alpha_k+1}\right], \quad [\Psi, v^{\alpha_n}] = (\Psi, v^{\alpha_n}) + \bar{\nu}_1 v_0^{\alpha_n} + \bar{\nu}_2 v_N^{\alpha_n}$$

$$(v_0 = v(0, t), \quad v_N = v(1, t), \quad \alpha_n = 2^n - 1). \tag{49}$$

Отметим, что в формуле (17) из § 2 работы [2] пропущено слагаемое $\bar{\sigma}_1\overset{n}{v}_0 + \bar{\sigma}_2\overset{n}{v}_N$. Однако на последующих рассуждениях и результатах работы это не сказалось.

Дальнейшие рассуждения посвящены мажорантной оценке стоящих в правой части (46) выражений через $(1, \overset{n}{v})$ и I_n. При этом использован произвол в выборе постоянной $\overline{M}$. Мы пользуемся вытекающей из леммы 1* работы [2] оценкой

$$\overset{n}{v} \leqslant 4\frac{\sigma_1\overset{n}{v}_0 + \sigma_2\overset{n}{v}_N}{c_6} + \frac{2}{c_1}\left\|\sqrt{a}\,\overset{n-1}{v}_{\bar{x}}\right\|_2^2 \leqslant M_* I_n, \tag{50}$$

где $M_* > 0$ постоянная, зависящая только от c_1 и c_6, неравенством Гёльдера

$$|[f, \psi]| \leqslant [1, |f|^p]^{1/p}[1, |\psi|^q]^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 0, \quad q > 0, \tag{51}$$

и неравенством

$$\prod_{k=1}^{m} c_k^{\mu_k} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \mu_k c_k, \quad \text{где } \mu_k \geqslant 0, \quad c_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \mu_k = 1. \tag{52}$$

Заметим, прежде всего, что в силу условий (37) — (38)

$$|[\bar{\rho}_{\bar{t}}, \overset{\check{n}}{v}]| \leqslant M [\overset{\check{}}{\rho}, \overset{\check{n}}{v}], \quad \text{где } M = c_8/c_2. \tag{53}$$

Рассмотрим теперь выражение

$$2^n [\bar{\psi}, v^{\alpha_n}] = 2^n (\bar{\psi}, v^{\alpha_n}) + 2^n \bar{\nu}_1 v_0^{\alpha_n} + 2^n \bar{\nu}_2 v_N^{\alpha_n}.$$

В зависимости от выбора нормы для ψ возможны два типа оценок для суммы $2^n (\bar{\psi}, v^{\alpha_n})$:

$$1)\ 2^n |(\bar{\psi}, v^{\alpha_n})| \leqslant 2^n (\bar{\psi}^{2^n}, 1)^{1/2^n} (1, \overset{n}{v})^{1-1/2^n} \leqslant 2^n (1, \overset{n}{v}) + (1, \bar{\psi}^{2^n}); \tag{54}$$

2) выберем для $\bar{\psi}$ норму

$$\|\bar{\psi}\|_4 = \|\bar{\psi}\|_3 + |(\bar{\psi}, 1)|, \qquad \|\bar{\psi}\|_3 = \|\eta\|_2, \qquad \eta(x) = \sum_{x'=h}^{x} h\bar{\psi}(x').$$

Введем функцию η, полагая

$$\eta_{\bar{x}} = \bar{\psi}, \qquad x = h, \ldots, (N-1)h = x_{N-1}, \qquad \eta_0 = 0,$$

и воспользуемся формулой суммирования по частям (см. [4]):

$$(v^{\alpha_n}, \bar{\psi}) = (v^{\alpha_n}, \eta_{\bar{x}}) = -(\eta, (v^{\alpha_n})_x) + v_N^{\alpha_n} \eta_{N-1}, \qquad \eta_{N-1} = (1, \bar{\psi}).$$

Для $(v^{\alpha_n})_x$ в [2] была найдена формула

$$(v^{\alpha_n})_x = \sum_{k=0}^{n-1} (v^{(+1)})^{\alpha_k} v^{\alpha_n - \alpha_k + 1} \overset{k}{v}_x. \tag{55}$$

Пользуясь неравенствами (50) — (52), получим

$$2^n |(\eta, (v^{\alpha_n})_x)| \leqslant \frac{2^n}{\sqrt{c_1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(|v^{(+1)}|^{\alpha_k} |v|^{\alpha_{n-1}-\alpha_k} |\eta|,\ \sqrt{a^{(+1)}} |v|^{\alpha_{n-1}-\alpha_k} \left|\overset{k}{v}_k\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant M_*^{1/2-1/2^n} c_1^{-1/2} 2^n I_n^{1/2-1/2^n} \|\eta\|_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2^{n-k-1}}} (2^{n-k-1} (a^{(+1)}, |v|^{\alpha_{n-1}-\alpha_k} (\overset{k}{v}_x)^2))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant I_n^{1-1/2^n} \cdot 2^{n+1} M_*^{1/2-1/2^n} c_1^{-1/2} \|\eta\|_2.$$

Отсюда, в силу (52), следует

$$2^n |(\eta, (v^{\alpha_n})_x)| \leqslant \tfrac{1}{8} I_n + (M 2^n \|\eta\|_2)^{2^n}, \tag{56}$$

где $M = M(c_1, c_6)$ — положительная постоянная, зависящая от c_1 и c_6.

Мы рассматриваем здесь более общий класс краевых условий, чем в п. 4, так как допускаем один из случаев $\sigma_1 = 0$, $\mathscr{E}_1 = 0$ или $\mathscr{E}_1 = O(h)$; $\sigma_2 = 0$, $\mathscr{E}_2 = 0$ или $\mathscr{E}_1 = O(h)$.

Учитывая неравенства

$$2^n|\bar{\nu}_2 v_N^{\alpha_n}| \leqslant \tfrac{1}{16} I_n + (M\cdot 2^n|\bar{\nu}_2|)^{2^n}, \qquad 2^n|\eta_{N-1} v_N^{\alpha_n}| \leqslant \tfrac{1}{8} I_n + (M\cdot 2^n|\eta_{N-1}|)^{2^n}$$

при $\sigma_2 = 0$,

$$2^n|\bar{\nu}_2 v_N^{\alpha_n}| \leqslant 2^n\sigma_2 \bar{v}_N + (M|\bar{\nu}_2|)^{2^n} \qquad \text{при } \sigma_2 \geqslant c_6 > 0,$$

а также (54), (56), получим оценки

$$2^n|[\bar{\psi}, v^{\alpha_n}]| \leqslant 2^n[1, \overset{n}{v}] + M^{2^n}\left\|\overset{n}{\bar{\psi}}\right\|_{1^*}, \qquad \left\|\overset{n}{\bar{\psi}}\right\|_{1^*} = \|\bar{\psi}^{2^n}\|_1 + 2^{\varepsilon_1 n}|\bar{\nu}_1| + 2^{\varepsilon_2 n}|\bar{\nu}_2|, \tag{57}$$

$$2^n|[\bar{\psi}, v^{\alpha_n}]| \leqslant \tfrac{1}{2} I_n + (M\cdot 2^n\|\bar{\psi}\|_5)^{2^n}, \tag{58}$$

где $\varepsilon_s = 1$ при $\sigma_s = 0$, $s = 1, 2$, $\varepsilon_s = 0$ при $\sigma_s \geqslant c_6 > 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$,

$$\|\bar{\psi}\|_5 = \|\bar{\psi}\|_4 + |\bar{\nu}_1| + |\bar{\nu}_2|, \qquad [1, \overset{n}{v}] = (1, \overset{n}{v}) + \sigma_1 \overset{n}{v}_0 + \sigma_2 \overset{n}{v}_N.$$

Перейдем теперь к оценке выражения $2^n(Q_1(v), v^{\alpha_n})$. Рассмотрим сначала слагаемое $2^n(b_1 v_x + b_2 v_{\bar{x}}, v^{\alpha_n})$. Из неравенств $[a^{(+1)}, v^{\alpha_n - 1} v_x^2) \leqslant$ $\leqslant I_n/2^{n-1}$, $(a, v^{\alpha_n-1} v_{\bar{x}}^2] \leqslant I_n/2^{n-1}$,

$$2^n|(b_1 v_x, v^{\alpha_n})| \leqslant 2^n c_4 (\overset{n-1}{v}, |v|^{\alpha_n - 1}|v_x|) \leqslant \tfrac{1}{8} I_n + M\cdot 2^n(1, \overset{n}{v})$$

сразу видно, что

$$2^n|(b_1 v_x + b_2 v_{\bar{x}}, v^{\alpha_n})| \leqslant \tfrac{1}{4} I_n + M\cdot 2^n(1, \overset{n}{v}), \qquad M = M(c_1, c_4, c_6) > 0. \tag{59}$$

Не требует пояснений оценка

$$2^n|(\bar{d}_2, \check{v} v^{\alpha_n})| \leqslant 2^n c_3 (1, \overset{n}{v}) + c_3 (1, \overset{\check{n}}{v}). \tag{60}$$

Наибольшие трудности представляет оценка остальных слагаемых в выражении $2^n(Q_1(v), v^{\alpha_n})$. Без ограничения общности можно считать, что $g_{22} = 0$ при $x = 0$, $x = x_{N-1}$, а $g_{11} = 0$ при $x = h$, $x = x_N = 1$. Если эти условия не выполнены, то, полагая, например, $g = g^* + Ax + g(0, t)$, где $A = [g(x_{N-1}, t) - g(0, t)]/h$, получим $g^* = 0$ при $x = 0$ и $x = x_{N-1}$. При этом изменятся на ограниченные величины коэффициенты при $v_{\bar{x}}$ и v для $(g_{22}v)_{\bar{x}}$ (при v_x и v для $(g_{11}v)_x$).

Формула суммирования по частям (см. [2]) дает

$$((g_{22}v)_{\bar{x}}, v^{\alpha_n}) = -(g_{22}v, (v^{\alpha_n})_x) \qquad (g_{22} = 0 \text{ при } x = 0,\ x = x_{N-1}).$$

Подставим сюда выражение (55) для $(v^{\alpha_n})_x$:

$$2^n|((g_{22}v)_{\bar{x}}, v^{\alpha_n})| \leqslant \frac{2^n c_5}{\sqrt{c_1}} \sum_{k=0}^{n-1} (1, \overset{n}{v})^{1/2} \left(a^{(+1)} \left(\overset{k}{v}_x\right)^2, v^{\alpha_n - \alpha_{k+1}}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8} I_n + M\cdot 2^{2n}(1, \overset{n}{v}), \qquad M = M(c_1, c_5) > 0.$$

Аналогично находим

$$2^n|((g_{11}v)_x, v^{\alpha_n})| \leqslant \tfrac{1}{8} I_n + M\cdot 2^{2n}(1, \overset{n}{v}), \qquad M = M(c_1, c_5) > 0,$$

Если при $x=0$ и $x=1$ заданы краевые условия I рода $v_0=0$, $v_N=0$, то

$$2^n|((\bar{g}_{21}\check{v})_{\bar{x}},\ v^{\alpha_n})|=2^n|(\bar{g}_{21}\check{v},\ (v^{\alpha_n})_x)|\leqslant\tfrac{1}{8}I_n+M\cdot 2^n(1,\overset{n}{v})+M'(\rho,\overset{\check{n}}{v}),$$

где $M=M(c_1,c_5)>0$, $M'=M(c_2)>0$. Аналогичная оценка получается и для $2^n|((\bar{g}_{12}\check{v})_x,\ v^{\alpha_n})|$.

Собирая все полученные выше оценки, приходим к следующим неравенствам:

а) если все $g_{sk}=0$, $s,k=1,2$, то

$$2^n|[\Psi,v^{\alpha_n}]|\leqslant I_n+M_1\cdot 2^n[1,\overset{n}{v}]+M_2^{2^n}\left\|\overset{n}{\bar{\psi}}\right\|_{1^*},\tag{61}$$

$$2^n|[\Psi,v^{\alpha_n}]|\leqslant I_n+M_1\cdot 2^n[1,\overset{n}{v}]+(M_2 2^n\|\bar{\psi}\|_5)^{2^n}\tag{62}$$

$$\left([1,\overset{n}{v}]=\left(1,\overset{n}{v}\right)+\bar{\sigma}_1\overset{n}{v}_0+\sigma_2\overset{n}{v}_N\right);$$

б) если $g_{12}=g_{21}=0$, то

$$2^n|[\Psi,v^{\alpha_n}]|\leqslant I_n+M_1 2^{2n}[1,\overset{n}{v}]+(M_2 2^n\|\bar{\psi}\|_5)^{2^n};\tag{63}$$

в) если $v_0=v_N=0$, то

$$2^n|[\Psi,v^{\alpha_n}]|\leqslant I_n+M_1\cdot 2^{2n}[1,\overset{n}{v}]+(M_2\cdot 2^n\|\bar{\psi}\|_5)^{2^n}+M_3[\check{\rho},\overset{n}{v}],\tag{64}$$

где M_1, M_2, M_3 — положительные постоянные, зависящие только от c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6.

Выберем теперь $\overline{M}$ так, чтобы в случае а)

$$\overline{M}-d_1(1+\overline{M}\tau)-M_1(1+\overline{M}\tau)\geqslant\overline{M}-(c_3+M_1)(1+\overline{M}\tau)\geqslant 0.$$

Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия

$$\tau<\tau_0,\quad \text{где } \tau_0<\frac{1}{c_3+M_1}-\frac{1}{\overline{M}},\quad \overline{M}>c_3+M_1.\tag{65}$$

В случае б) (и в)) следует положить $\overline{M}=M^*\cdot 2^n$. Из (65) видно, что при любом $n\geqslant 1$ и $M^*>c_3+M_1$ будем иметь

$$\tau_0<\frac{1}{2(c_3+M_1)}.$$

Отметим, что τ_0 *не зависит от* n (ср. с [2]).

Обращаясь теперь к тождеству n-го ранга (46) и учитывая (53), (61) — (64), получим следующие интегральные неравенства:

$$\text{а}_1)\quad [\bar{\rho},\overset{n}{v}]+\tau I_n\leqslant(1+M\tau)[\check{\rho},\overset{\check{n}}{v}]+M_2^{2^n}\left\|\overset{n}{\bar{\psi}}\right\|_{1^*},\tag{66}$$

$$\text{а}_2)\quad [\bar{\rho},\overset{n}{v}]+\tau I_n\leqslant(1+M\tau)[\check{\rho},\overset{\check{n}}{v}]+(M_2\cdot 2^n\|\bar{\psi}\|_5)^{2^n};\tag{67}$$

$$\text{б), в)}\quad [\bar{\rho},\overset{n}{v}]+\tau I_n\leqslant(1+M\tau)[\check{\rho},\overset{\check{n}}{v}]+M_2\cdot 2^n\|\bar{\psi}\|_5)^{2^n}\quad(\overline{M}=M^*\cdot 2^n).\tag{68}$$

Отсюда находим

$$[\bar{\rho},\overset{n}{v}(x,t)]+\sum_{t'=\tau}^{t}\tau I_n(t')\leqslant M\left\{[\bar{\rho}(x,0),\overset{n}{v}(x,0)]+M_2^{2^n}\sum_{t'=\tau}^{t}\tau\left\|\overset{n}{\bar{\psi}}\right\|(x,t')\|_{1^*}\right\}\tag{69}$$

и, соответственно,

$$[\bar{\rho}(x,t), \overset{n}{v}(x,t)] + \sum_{t'=\tau}^{t} \tau I_n(t') \leqslant M\Big\{[\bar{\rho}(x,0), \overset{n}{v}(x,0)] + \tag{70}$$

$$+ (M_2 \cdot 2^n)^{2^n} \sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\psi(x,t')\|_5^{2n}\Big\}.$$

Возвращаемся теперь к исходной функции $z^j = v^j(1+\bar{M}\tau)^j$. Тогда из неравенств (69) и (70) найдем

$$\text{а}_1)\quad H_n(t) \leqslant M_1 [\rho(x,0), \overset{n}{z}(x,0)]^{1/2^n} + M_2\Big[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\overset{n}{\psi}(x,t')\|_{1*}\Big]^{1/2^n}, \tag{71}$$

$$\text{а}_2)\quad H_n(t) \leqslant M_1 [\rho(x,0), \overset{n}{z}(x,0)]^{1/2^n} + M_2 \cdot 2^n\Big[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\psi(x,t')\|_5^{2^n}\Big]^{1/2^n}, \tag{72}$$

$$\text{б), в)}\quad H_n(t) \leqslant e^{M_1 \cdot 2^n} [\rho(x,0), \overset{n}{z}(x,0)]^{1/2^n} + M_2 \cdot 2^n e^{M_1 \cdot 2^n}\Big[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\psi(x,t')\|_5^{2^n}\Big]^{1/2^n}, \tag{73}$$

где

$$H_n(t) = [\rho(x,t), \overset{n}{z}(x,t)]^{1/2^n} + \Big[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\sqrt{a(x,t')}\, \overset{n-1}{z_{\bar{x}}}(x,t')\|_2^2\Big]^{1/2^n},$$

$$\|\sqrt{a}\, \overset{n-1}{z_{\bar{x}}}\|_2^2 = \|\sqrt{a}\, \overset{n-1}{z_{\bar{x}}}\|_2 + \sigma_1 \overset{n}{z}_0 + \sigma_2 \overset{n}{z}_N, \qquad \|\overset{n}{\psi}\|_{1*} = \|\psi^{2^n}\|_1 + (2^{\varepsilon_1 n}|\nu_1| + 2^{\varepsilon_2 n}|\nu_2|)^{2^n}.$$

Все постоянные M в (71) — (73) и ниже положительны и зависят только от $c_1, \ldots, c_7$. Явное их выражение через c_s мы не выписываем. Будем, как правило, также опускать индексы у постоянных M.

Теорема 2. *Если выполнены условия*

$$g_{sk} = 0, \qquad s, k = 1, 2, \tag{74}$$

то для решения $z = z(x,t)$ *задачи* (33) — (38) *справедливы равномерные оценки*

$$\|z(x,t)\|_0 \leqslant M\|z(x,0)\|_0 + M\|\overline{\psi(x,t)}\|_5 \ln^{\delta}\frac{1}{h} \qquad \textit{при } \tau < \tau_0,\ h < h_0, \tag{75}$$

$$\|z(x,t)\|_0 \leqslant M\|z(x,0)\|_0 + M\|\overline{\psi(x,t)}\|_5 \ln^{\delta}\frac{1}{\tau} \qquad \textit{при } \tau < \tau_0', \tag{76}$$

где $\delta = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — *любое число*, $h_0 = h_0(\varepsilon)$, $\tau_0' = \tau_0'(\varepsilon)$,

$$\overline{\|\psi(x,t)\|}_5 = \max_{\tau \leqslant t' \leqslant t} \|\psi(x,t')\|_5,$$

h_0 *и* τ_0' — *достаточно малые величины, а* τ_0 *определяется из условий* (65).

1°. Докажем сначала (75). Если $\psi = 0$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$, то (72) дает:

$$\Big[\rho, \overset{n}{z}\Big]^{1/2^n} \leqslant M [\rho(x,0), \overset{n}{z}(x,0)]^{1/2^n}.$$

Отсюда следует

$$\|z(x,t)\|_0 \leqslant M\|z(x,0)\|_0. \tag{77}$$

Если $z(x,0) = 0$, то из (72) следует

$$\|z(x,t)\|_0 \leqslant M \cdot 2^n h^{-1/2^n} \overline{\|\psi(x,t)\|}_5.$$

Выбирая теперь $n = n(h)$ в зависимости от h так, чтобы

$$\frac{\log_2 \frac{1}{h}}{\varepsilon \log_2 \log_2 \frac{1}{h}} \leqslant 2^n \leqslant \log_2 \frac{1}{h} \quad \text{при } h < h_0(\varepsilon), \tag{78}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое число, и учитывая, что $n + \frac{1}{2^n} \log_2 \frac{1}{h} \leqslant \delta \log_2 \log_2 \frac{1}{h}$ $(\delta = 1 + \varepsilon)$, находим

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant M \overline{\| \psi(x, t) \|_5} \ln^\delta \frac{1}{h} \quad \text{при } h < h_0, \ \tau < \tau_0,. \tag{79}$$

Объединяя (77) и (79), получим неравенство (75).

2°. Для доказательства оценки (76) воспользуемся (72) и неравенствами

$$\left\| \overset{n}{z} \right\|_0 \leqslant M \left(\sigma_1 \overset{n}{z}_0 + \sigma_2 \overset{n}{z}_N + \left\| \sqrt{a} \, \overset{n-1}{z}_{\bar{x}} \right\|_2^2 \right) = M \left\| \sqrt{a} \, \overset{n-1}{z}_{\bar{x}} \right\|_2^2, \qquad M = M(c_1, c_6),$$

$$\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \left\| \overset{n}{z}(x, t') \right\|_0 \leqslant M \sum_{t'=\tau}^{t} \tau \left\| \sqrt{a} \, \overset{n-1}{z}_{\bar{x}} \right\|_2^2. \tag{80}$$

Достаточно ограничиться случаем $z(x, 0) = 0$. Из (72) и (80) следует:

$$\left(\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \| z(x, t') \|_0^{2^n} \right)^{1/2^n} \leqslant M \cdot 2^n \overline{\| \psi(x, t) \|_5}, \quad \| z(x, t) \|_0 \leqslant M \cdot 2^n \tau^{-1/2^n} \overline{\| \psi(x, t) \|_5}.$$

Выбирая теперь $n = n(\tau)$ по аналогии с (78), получим

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant M \overline{\| \psi(x, t) \|_5} \ln^\delta \frac{1}{\tau} \quad \text{при } \tau < \tau_0'.$$

Замечание. Из (72) при $n = 1$ следует оценка в среднем

$$\| z(x, t) \|_2 \leqslant M \| z(x, 0) \|_2 + M \left[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \| \psi(x, t') \|_5^2 \right]^{1/2} \quad \text{при } \tau < \tau_0. \tag{81}$$

В случае первой краевой задачи $z_0 = z_N = 0$

$$\| z(x, t) \|_2 \leqslant M \| z(x, 0) \|_2 + M \left[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \| \psi(x, t') \|_3^2 \right]^{1/2} \quad \text{при } \tau < \tau_0, \tag{81'}$$

если $g_{sk} \neq 0$, $s, k = 1, 2$.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (74) *и* $\delta_2 = 0$, *то для решения* $z = z(x, t)$ *задачи* (33) — (38) *выполняются равномерные оценки*:

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant M \left(\| z(x, 0) \|_0 + \overline{\| \psi(x_1 t) \|_0} + \overline{| \nu_1(t) |} \right) + M \overline{| \nu_2(t) |} \ln^\delta \frac{1}{h} \tag{82}$$

$$\text{при } \tau < \tau_0, \ h < h_0,$$

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant M \left(\| z(x, 0) \|_0 + \overline{\| \psi(x, t) \|_0} + \overline{| \nu_1(t) |} \right) + M \overline{| \nu_2(t) |} \ln^\delta \frac{1}{\tau} \quad \text{при } \tau < \tau_0', \tag{82'}$$

где

$$\overline{\| \psi(x, t) \|_0} = \max_{\tau \leqslant t' \leqslant t} \| \psi(x, t') \|_0, \qquad \overline{| \nu_s(t) |} = \max_{\tau \leqslant t' \leqslant t} | \nu_s(t') |, \qquad s = 1, 2, \ \delta > 1.$$

1°. Пусть $\nu_2(t) \equiv 0$; тогда в (71) можно совершить предельный переход при $n \to \infty$, учитывая при этом, что τ_0 и постоянные, входящие в (71), не зависят от n, а h и τ фиксированы. Учитывая затем, что $\left\| \overset{n}{\psi} \right\|_{1^*}^{1/2^n} \leqslant \| \psi \|_0 + | \nu_1 |$, получим (82) при $\nu_2 \equiv 0$.

2°. Пусть $\nu_1 = 0$, $\psi = 0$, $z(x, 0) = 0$; тогда из (71) следует

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant M \cdot 2^n h^{-1/2^n} \overline{|\nu_2(t)|}.$$

Выбирая теперь $n = n(h)$ согласно (78), находим

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant M \overline{|\nu_2(t)|} \ln^\delta \frac{1}{h} \text{ при } h < h_0, \quad \tau < \tau_0.$$

Отсюда и из 1° следует (82).

3°. Для доказательства (82′) воспользуемся (54) при $\nu_1 = \psi = z(x, 0) \equiv 0$ и (80). Из (71) и (80) следует

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant M \cdot 2^n \tau^{-1/2^n} \overline{|\nu_2(t)|}.$$

Выбирая $n = n(\tau)$ по аналогии с (78), получим

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant M \overline{|\nu_2(t)|} \ln^\delta \frac{1}{\tau} \qquad \text{при } \tau < \tau_0'.$$

Замечание. Теорема 1 доказана при условиях $\mathscr{E}_s + \sigma_s \geqslant c > 0$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant c_6 > 0$, $\sigma_s \geqslant 0$, $\mathscr{E}_s \geqslant 0$, $s = 1, 2$. Теорема 3 верна, например, в случае, когда $\mathscr{E}_2 + \sigma_2 = 0$ или $\mathscr{E}_2 + \sigma_2 = O(h)$ и, следовательно, нельзя воспользоваться теоремой 1.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*

$$g_{12} = g_{21} = 0.$$

Тогда для решения задачи (33) — (38) *справедливы оценки*

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant \{M_1 \| z(x, 0) \|_0 + M_2 \| \overline{\psi(x, t)} \|_5\} \exp\left(M_3 \sqrt{\ln \frac{1}{h}}\right) \textit{ при } \tau < \tau_0,\ h < h_0, \tag{83}$$

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant \{M_1 \| z(x, 0) \|_0 + M_2 \| \overline{\psi(x, t)} \|_5\} \exp\left(M_3 \sqrt{\ln \frac{1}{\tau}}\right) \textit{ при } \tau < \tau_0'. \tag{84}$$

1°. Из (73) при любом n находим

$$\| z(x, t) \|_0 \leqslant e^{M \cdot 2^n} h^{-1/2^n} (\| z(x, 0) \|_0 + M \cdot 2^n \| \overline{\psi(x, t)} \|_5). \tag{85}$$

Рассмотрим теперь выражение

$$2^n \exp\left(M \cdot 2^n + \ln \frac{1}{h} \Big/ 2^n\right) = \exp\left(M \cdot 2^n + \ln \frac{1}{h} \Big/ 2^n - n \ln 2\right).$$

Из условия $M \cdot 2^n \sim \ln(1/h) / 2^n$ видно, что $2^n \sim \sqrt{\ln(1/h)} / \sqrt{M}$.

Выбирая соответствующим образом $n = n(h) \sim \ln \ln (1/h)$, получим $M \cdot 2^n + \ln(1/h)/2^n - n \ln 2 \leqslant M_3 \sqrt{\ln(1/h)}$ при достаточно малом $h < h_0$. Отсюда и из (85) вытекает неравенство (83).

2°. Оценка (84) получается аналогично, если учесть (80). Она имеет место при любых значениях h.

Замечание 1. Теорема 4 верна в случае краевых условий I рода ($z_0 = 0$, $z_N = 0$), если даже условия $g_{12} = g_{21} = 0$ не выполняются.

Замечание 2. Полагая в (73) $n = 1$, нетрудно убедиться в том, что для решения задачи (33) — (38) имеет место оценка в среднем

$$\| z(x, t) \|_2 \leqslant M \| z(x, 0) \|_2 + M \left[\sum_{t'=\tau}^{t} \| \psi(x, t') \|_5^2\right]^{1/2}.$$

Она сохраняется и в том случае, когда $g_{sk} \neq 0$, $s, k = 1, 2$.

Все априорные оценки в этом пункте получены в предположении лишь ограниченности коэффициентов a, b_s, d_s, g_{sk}; поэтому они могут быть использованы для доказательства сходимости в случае движущихся (косых) разрывов коэффициентов дифференциального уравнения (6).

6. Априорные оценки для шеститочечной схемы

В [2] и [4] рассматривалась задача

$$\overline{\mathcal{P}}^{\alpha}_{h\tau} z = \rho z_{\bar t} - (a z_{\bar x})^{(\alpha)}_x - Q(z) = \psi \qquad (0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1), \tag{86}$$

$$l_1 z = (a^{(+1)} z_x - \sigma_1 z)^{(\alpha)} - \mathcal{E}_1 z_{\bar t} = \nu_1 \ \text{при}\ x = 0;$$

$$l_2 z = (a z_{\bar x} + \sigma_2 z)^{(\alpha)} + \mathcal{E}_2 z_{\bar t} = -\nu_2 \ \text{при}\ x = 1; \tag{87}$$

$$z(x, 0) = z_0(x), \tag{88}$$

$$Q(z) = b_{11} z_x + b_{12} \check{z}_x + b_{22} z_{\bar x} + b_{21} \check{z}_{\bar x} + d_1 z + d_2 \check{z}, \tag{89}$$

$$0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_1', \qquad 0 < c_2 \leqslant \rho, \qquad |d_s| \leqslant c_3, \qquad |b_{sk}| \leqslant c_4,$$

$$\sigma_s \geqslant 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant c_5 > 0, \qquad s, k = 1, 2, \tag{90}$$

$$|a_{\bar t}| \leqslant c_6, \quad |(\sigma_s)_{\bar t}| \leqslant c_7 \sigma_s, \quad 0 < c_8 h \leqslant \mathcal{E}_s \leqslant c_9. \tag{91}$$

Были получены априорные оценки:

1) $$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M \left\{ \|z_{\bar x}(x, 0)\|_2 + \Big(\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\psi(x, t')\|_{\bar 2}^2 \Big)^{1/2} \right\}, \tag{92}$$

где $\|\psi\|_{\bar 2} = \|\psi\|_2 + |\nu_1| / \sqrt{\mathcal{E}_1} + |\nu_2| / \sqrt{\mathcal{E}_2}$;

2) если $\psi = \overline{\psi}^{(\alpha)}$, $\nu_s = \overline{\nu}_s^{(\alpha)}$, $s = 1, 2$, $z(x, 0) = z_0(x) = 0$, то

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M \left\{ \|\overline{\psi}(x, 0)\|_5 + \|\overline{\psi}(x, t)\|_{5*} + \Big[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \left(\|\overline{\psi}(x, t')\|_{5*} + \|\overline{\psi}_{\bar t}(x, t')\|_{5*} \right)^2 \Big]^{1/2} \right\} +$$

$$+ \overline{M} \Big[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\overline{\psi}(x, t')\|_5^2 \Big]^{1/2}, \quad \overline{M} = 0 \ \text{при}\ b_{sk} = 0. \tag{93}$$

Здесь $\|\overline{\psi}(x, t)\|_5 = \|\overline{\psi}(x, t)\|_4 + |\overline{\nu}_1| + |\overline{\nu}_2|$, $\|\overline{\psi}\|_{5*} = \|\overline{\psi}\|_{4*} + |\overline{\nu}_1| + |\overline{\nu}_2|$, $\|\psi\|_4 = \|\psi\|_3 + |(\psi, 1)|$, $\|\psi\|_{4*} = \|\psi\|_{3*} + |(\psi, 1)|$, $\|\psi\|_3 = \|\eta\|_2$, $\|\psi\|_{3*} = \|\eta\|_1$, $\eta(x) = \sum_{x'=h}^{x} h\psi(x')$.

Покажем, что оценка (93) может быть улучшена, если b_{sk} удовлетворяют условию Липшица по t:

$$|(b_{sk})_{\bar t}| \leqslant c_{10}. \tag{94}$$

Теорема 5. *Пусть $z(x, t)$ — решение задачи* (86) — (91), *где*

$$\psi = \overline{\psi}^{(\alpha)}, \quad \nu_s = \overline{\nu}_s^{(\alpha)}, \quad Q(z) = (b_1 z_x + b_2 z_{\bar x})^{(\alpha)} + d_1 z + d_2 \check{z}, \quad |b_s| \leqslant c_4. \tag{95}$$

Если выполнены условия

$$|(b_s)_{\bar t}| \leqslant c_{10}, \qquad 0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad \mathcal{E}_s + \sigma_s \geqslant c_* > 0, \quad s = 1, 2, \tag{96}$$

то при достаточно малом $\tau < \tau_0$

$$\|z(x,t)\|_0 \leqslant M\left\{\|\overline{\psi}(x,0)\|_5 + \|\overline{\psi}(x,t)\|_{5^*} + \left[\sum_{t'=\tau}^{t}\left(\|\overline{\psi}(x,t')\|_{5^*} + \|\overline{\psi}_{\bar t}(x,t')\|_{5^*}\right)^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{97}$$

Для неявной схемы при $\alpha = 1$ *справедлива оценка*

$$\|z(x,t)\|_0 \leqslant M\left\{\|\overline{\psi}(x,0)\|_{5^*} + \|\overline{\psi}(x,t)\|_{5^*} + \left[\sum_{t'=\tau}^{t}\tau\left(\|\overline{\psi}(x,t')\|_{5^*} + \|\overline{\psi}_{\bar t}(x,t')\|_{5^*}\right)^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{98}$$

Представим z в виде суммы $z = \mu + v + w$, где w — решение стационарной задачи $(aw_{\bar x})_x = -\overline{\psi}$, $a_1 w_{\bar x,0} - \sigma_1 w_0 = \overline{\nu}_1$, $a_N w_{\bar x,N} + \sigma_2 w_N = -\overline{\nu}_2$, а μ и v определяются условиями

$$\overline{\mathcal{P}}^{\alpha}_{h\tau}\mu = \eta, \quad l_1\mu = \mathcal{E}_1 w_{\bar t}, \quad l_2\mu = -\mathcal{E}_2 w_{\bar t}, \qquad \mu(x,0) = -w(x,0), \tag{99}$$

$$\overline{\mathcal{P}}^{\alpha}_{h\tau}v = \overline{\eta}^{(\alpha)}, \qquad l_1 v = 0, \qquad l_2 v = 0, \qquad v(x,0) = 0, \tag{100}$$

$$\eta = d_1 w + d_2 \check{w} - \rho w_{\bar t}, \qquad \overline{\eta} = b_1 w_x + b_2 w_{\bar x}.$$

В работе [4] показано, что

$$\|w\|_0 \leqslant M\|\overline{\psi}\|_{5^*}, \quad \|w_{\bar x}\|_1 \leqslant M\|\overline{\psi}\|_{5^*}, \quad \|w_{\bar x\bar t}\|_1 \leqslant M\|\overline{\psi}_{\bar t}\|_{5^*}, \quad \|w_{\bar t}\|_0 \leqslant M\|\overline{\psi}_{\bar t}\|_{5^*},$$
$$\|w_{\bar x}\|_2 \leqslant M\|\overline{\psi}\|_5. \tag{101}$$

Для оценки $\mu(x,t)$ воспользуемся (92), а для v — неравенством (93), учитывая при этом (101) и очевидные неравенства $\|\eta\|_2 \leqslant M(\|\overline{\psi}\|_{5^*} + \|\overline{\psi}_{\bar t}\|_{5^*})$, $\|\overline{\eta}\|_5 = \|\overline{\eta}\|_4 \leqslant M\|w_{\bar x}\|_1 \leqslant M\|\overline{\psi}\|_{5^*}$, $\|\dot\eta\|_{5^*} = \|\dot\eta\|_{4^*} \leqslant M\|\overline{\psi}\|_{5^*}$, $\|\eta_{\bar t}\|_{5^*} \leqslant M\|\overline{\psi}_{\bar t}\|_{5^*}$. Для μ получим (93) при $\overline{M} = 0$, а для v (97) при $\overline{\psi}(x,0) = 0$. Собирая оценки для w, μ и v, приходим к (97).

В случае $\alpha = 1$ представим μ в виде суммы $\mu = \overline{\mu} + \overline{\overline{\mu}}$, где $\overline{\mu}$ — решение задачи (99) с начальным условием $\overline{\mu}(x,0) = 0$, а $\overline{\overline{\mu}}$ находим из условий $\overline{\mathcal{P}}^{\alpha}_{h\tau}\overline{\overline{\mu}} = 0$, $l_1\overline{\overline{\mu}} = l_2\overline{\overline{\mu}} = 0$, $\overline{\overline{\mu}}(x,0) = -w(x,0)$. Применяя теперь теорему 1, получим

$$\|\overline{\overline{\mu}}(x,t)\|_0 \leqslant M\|w(x,0)\|_0 \leqslant M\|\overline{\psi}(x,0)\|_{5^*}.$$

Поэтому для μ, так же как и для v, имеет место неравенство (98).

Замечание. Если $Q(z)$ имеет вид (89) и выполнены условия (94), то имеет место оценка того же типа, что и (97); при этом вместо $\|\overline{\psi}\|_{5^*} + \|\overline{\psi}_{\bar t}\|_{5^*}$ под знаком суммы будет стоять выражение $\|\overline{\psi}\|_{5^*} + \|\overline{\psi}_{\bar t}\|_{5^*} + \tau\|\overline{\psi}\|_5$.

7. О точности в классе разрывных коэффициентов

Чтобы установить порядок точности схемы (14) — (16), достаточно воспользоваться одной из априорных оценок, полученных в п. 5 и п. 6. Мы будем рассматривать наряду с (1) и (6) следующие уравнения параболического типа:

$$\mathcal{P}_3 u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\mathcal{P}_4 u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Присоединяя к уравнению $\mathcal{P}_s u = 0$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ условия (7) — (10), мы получим задачу, которую обозначим $(\mathrm{I}_s^{(\alpha)})$. Соответствующую разностную задачу, которая формулируется по аналогии с (14) — (16) (в случае $(\mathrm{I}_1^{(\alpha)})$ см. [5]), будем обозначать $(\mathrm{II}_s^{(\alpha)})$. Наконец, задачу для $z = y - u$ обозначим $(\mathrm{III}_s^{(\alpha)})$.

Для упрощения формулировок, вместо слов «решение задачи $(\mathrm{II}_s^{(\alpha)})$ равномерно сходится к решению задачи $(\mathrm{I}_s^{(\alpha)})$ и имеет порядок точности $O(h^m) + O(\tau)$», будем говорить: «схема $(\mathrm{II}_s^{(\alpha)})$ равномерно сходится со скоростью $O(h^m) + O(\tau)$». Всюду рассматриваются только безусловно устойчивые схемы, т. е. $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Все утверждения, если это не оговаривается, относятся ко всему семейству схем.

Теорема 6. *Однородные разностные схемы* $(\mathrm{II}_s^{(\alpha)})$, $s = 1, 3, 4$, *равномерно сходятся со скоростью* $O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha})$ *при* $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$ ($m_\alpha = 2$ *при* $\alpha = 0.5$ *и* $m_\alpha = 1$ *при* $\alpha \neq 0.5$), *если условия* A_α *выполнены во всей области* $\overline{Д}$, *точнее, при достаточно малом* $\tau < \tau_0$ *имеет место оценка*

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^2 + \tau^{m_\alpha}), \tag{102}$$

где M — *постоянная, не зависящая от* h *и* τ. *Для схемы* $(\mathrm{II}_2^{(1)})$ (*при* $\alpha = 1$) *выполняются оценки*

$$\|y - u\|_2 \leqslant M(h^2 + \tau) \text{ при } \tau < \tau_0, \tag{103}$$

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^{2-\rho(h)} + \tau^{1-\rho(\tau)}) \text{ при } \tau < \tau_0, h < h_0, \tag{104}$$

где $\rho(h) \sim 1/\sqrt{\ln(1/h)} \to 0$ *при* $h \to 0$, $\rho(\tau) \sim 1/\sqrt{\ln(1/\tau)} \to 0$ *при* $\tau \to 0$.

Неравенство (102) следует из (92), а (103) и (104) — из (83) — (85) (теорема 4).

Перейдем теперь к вопросу о точности в классе разрывных коэффициентов. Будем различать два случая: а) все разрывы неподвижные (НР), т. е. $\eta_\nu'(t) \equiv 0$ для $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$; б) по крайней мере один разрыв движущийся (ДР), т. е. $\eta_\nu'(t) \neq 0$ хотя бы для одного $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$. В [5] дана оценка точности схемы $(\mathrm{II}_1^{(\alpha)})$ в случае НР. При этом предполагалось, что условия A_α выполнены в каждой из областей $\overline{\Delta}_\nu$ и, кроме того, предельные значения функций $k, k', k'', u', u'', u''', \partial^2 u/\partial x\, \partial t$ удовлетворяют вдоль каждой из прямых Γ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0)$ условиям Липшица по t. Показано (теорема 4 в [5]), что

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^{\varkappa_1} + \tau^{m_\alpha}) \text{ при } \tau < \tau_0, \tag{105}$$

где $\varkappa_1 = 0.5$ для всего семейства схем, а $\varkappa_1 = 1.5$ — для схемы (12)—(13). Из теоремы 5 и оценок для погрешности аппроксимации вблизи линии разрыва, проведенных в [5], следует

Теорема 7. *Разностная схема* $(\mathrm{II}_3^{(1)})$ *в классе коэффициентов уравнения* $\mathcal{P}u = 0$, *имеющих неподвижные разрывы, равномерно сходится со скоростью* $O(h^{\varkappa_2}) + O(\tau)$, *т. е.*

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^{\varkappa_2} + \tau) \text{ при } \tau < \tau_0,$$

где $\varkappa_2 = 1$ *для всего семейства схем* $(\mathrm{II}^{(1)})$, $\varkappa_2 = 2$ *для схемы* (12)—(13), *если коэффициент* $r(x, t)$ *удовлетворяет условию Липшица по* t *в* $\overline{\Delta}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$.

Из (106) видно, что *схема* (12) *имеет в случае разрывных коэффициентов* (НР) *ту же точность, что и в случае гладких коэффициентов.*

Пользуясь теоремой 4, нетрудно показать, что схема $(\mathrm{II}_2^{(1)})$ в случае НР сходится в среднем со скоростью $O(h^{\varkappa_1}) + O(\tau)$ и сходится равномерно со скоростью $O(h^{\varkappa_1 - \rho(h)}) + O(\tau^{1-\rho(\tau)})$, т. е.

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^{\varkappa_1 - \rho(h)} + \tau^{1-\rho(\tau)}) \text{ при } h < h_0, \quad \tau < \tau_0,$$

где $\rho(h) \sim 1/\sqrt{\ln(1/h)}$, $\rho(\tau) \sim 1/\sqrt{\ln(1/\tau)}$.

Для схемы $(\mathrm{II}_2^{(\alpha)})$ при $\alpha \neq 1$ не удается доказать равномерную сходимость даже в классе гладких коэффициентов.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости и порядке точности в классе коэффициентов, имеющих движущиеся разрывы (ДР). Всюду предполагается, что в каждой из областей $\overline{\Delta}_\nu$ выполнены условия A_α. Сходимость доказана только для схем $\mathrm{II}_2^{(1)}$ и $\mathrm{II}_4^{(1)}$ $(\alpha = 1)$. Будем предполагать, что $c(x, t)$ может иметь только неподвижные разрывы. В работе [3] была доказана сходимость для частного случая схемы $(\mathrm{II}_4^{(1)})$ при $f = f(x, t) - q(x, t)u$, $q \geqslant 0$. Теоремы 2 и 4 позволяют, во-первых, уточнить оценку порядка точности, полученную в [3], и, во-вторых, доказать следующую теорему:

Теорема 8. *Разностные схемы* $(\mathrm{II}_2^{(1)})$ *и* $(\mathrm{II}_4^{(1)})$ *равномерно сходятся в классе коэффициентов, имеющих движущиеся разрывы, так что имеют место оценки:*

1) *для схемы* $(\mathrm{II}_4^{(1)})$

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\left(h^{\varkappa_3} \ln^\delta \frac{1}{h} + \tau \ln^\delta \frac{1}{\tau}\right) \text{ при } h < h_0, \quad \tau < \tau_0;$$

2) *для схемы* $(\mathrm{II}_2^{(1)})$

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^{\varkappa_3 - \rho(h)} + \tau^{1-\rho(\tau)}) \text{ при } h < h_0, \quad \tau < \tau_0,$$

где $\varkappa_3 = 0.5$ *для всего семейства схем,* $\varkappa_3 = 1$ *для схемы* (12), (13), $\rho(h) \sim 1/\sqrt{\ln(1/h)}$, $\rho(\tau) \sim 1/\sqrt{\ln(1/\tau)}$, $\delta > 1$.

Для доказательства теоремы 8 следует повторить все рассуждения, проведенные в [3], уточняя при этом при помощи теорем 2 и 4 леммы 2, 3 и 4 работы [3].

Примечание. Все результаты этого пункта, в соответствии с [5], сохраняют силу и в случае краевых условий более общего вида (например, для (2) и (5)). Нет необходимости останавливаться на доказательстве соответствующих теорем. Укажем лишь, что априорные оценки (теоремы 1—5) получены для краевых условий весьма общего вида, а способ написания разностных краевых условий с порядком аппроксимации $O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha})$ изложен в [5].

Мы не останавливаемся здесь на вопросе о методах решения нелинейных разностных уравнений для схем $(\mathrm{II}_1^{(\alpha)})$, $(\mathrm{II}_2^{(\alpha)})$, $(\mathrm{II}_3^{(1)})$ (см. [5]).

§ 2. Многомерные параболические уравнения

1. Постановка задачи

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_p)$ — точка p-мерного пространства с координатами $x_1, \ldots, x_p$, $\overline{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ — p-мерный параллелепипед

с границей Γ, $G=\overline{G}-\Gamma$, $\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\leqslant t\leqslant T]$, $Q_T=G\times(0<t\leqslant T)$. В цилиндре $\overline{Q}_T$ ищется решение следующей задачи:

$$c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u+f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_p}\right),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma=\chi(x,t)\qquad (x\in\Gamma,\ 0\leqslant t\leqslant T), \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad x\in\overline{G}, \tag{3}$$

где

$$L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \tag{4}$$

$c(x,t)=c(x_1,x_2,\ldots,x_p,t)$, $k_\alpha=k_\alpha(x,t,u)$, $f=f(x,t,u,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$, $\chi=\chi(x,t)$, $u_0(x)$ — заданные функции. Будем предполагать, что

$$k_\alpha(x,t,u)\geqslant c_1>0,\qquad c(x,t)\geqslant c_2>0; \tag{5}$$

$k_\alpha(x,t,u)$ и $f(x,t,u,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ имеют непрерывные производные по $u,\lambda_1,\ldots,\lambda_p$. Если коэффициент $k_\alpha=k_\alpha(x,t,u)$ имеет разрыв I рода на плоскости $x_\alpha=\xi_\alpha=\mathrm{const}$, то выполняются условия сопряжения $\left(\text{непрерывность } u \text{ и } k_\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$:

$$\begin{gathered}[u]_\alpha=u(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},x_\alpha+0,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,t)-\\ -u(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},x_\alpha-0,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,t)=0,\\ \left[k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right]=0,\qquad x_\alpha=\xi_\alpha.\end{gathered} \tag{6}$$

Мы, как обычно, предполагаем, что задача (1) — (5) имеет единственное решение, непрерывное в $\overline{Q}_T$ и имеющее нужное по ходу изложения число производных. Ниже используются

Условия А: 1) решение задачи (1) — (5) имеет равномерно ограниченные внутри Q_T производные $\partial^4u/\partial x_\alpha^4$, $\partial^2u/\partial t^2$, $\alpha=1,2,\ldots,p$; 2) функции $c(x,t)$, $k_\alpha(x,t,u)$, $f(x,t,u,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ имеют равномерно ограниченные в Q_T производные $\partial^2c/\partial x_\alpha^2$, $\partial^3k_\alpha/\partial x_\alpha^3$, $\partial^2f/\partial x_\alpha^2$, $\alpha=1,2,\ldots,p$.

Условия Б: если c, k и f имеют конечное число разрывов I рода на гиперплоскостях $x_\alpha=\xi_\alpha^{(s)}=\mathrm{const}$, $s=1,2,\ldots,m_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,p$, то $\partial^4u/\partial x_\alpha^4$, $\partial^2u/\partial t^2$, $\partial^2c/\partial x_\alpha^2$, $\partial^2f/\partial x_\alpha^2$, $\partial^3k_\alpha/\partial x_\alpha^3$ равномерно ограничены внутри каждой из областей, на которые разбивается $\overline{Q}_T$ этими гиперплоскостями.

Эти условия являются достаточными для доказательства теорем о точности рассматриваемых ниже разностных схем и в ряде случаев могут быть заменены более слабыми требованиями. Однако мы не ставим здесь своей целью проведение исследований при минимальных требованиях к решению и коэффициентам задачи (1) — (5). Это потребовало бы усложнения методов исследования и выходит за рамки данной статьи.

2. Разностные сетки и сеточные функции

Проводя плоскости $x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha$, $i_\alpha=0,1,\ldots,N_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,p$, $h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha$, разобьем область $\overline{G}$ на параллелепипеды с вершинами в точках

$x_i = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_\alpha^{(i_\alpha)}, \ldots, x_p^{(i_p)})$. Введем обозначения $\bar{\omega}_h = \{x_i \in \bar{G}\}$, $\omega_h' = \{x_i \in G\}$, $\gamma = \{x_i \in \Gamma\}$, $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma$.

Отрезок $0 \leqslant t \leqslant T$ точками $t_j = j \cdot \tau$, $j = 0, 1, \ldots, K$, разобьем на K интервалов длины $\tau = T/K$. Пусть $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j \cdot \tau \in [0 \leqslant t \leqslant T]\}$, $\omega_\tau = \{t_j = j \cdot \tau$, $j = 1, 2, \ldots, K\}$, $\bar{\Omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \bar{Q}_T\}$, $\Omega = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_i, t_j) \in Q_T\}$ — пространственно-временная сетка. В дальнейшем, как правило, будем пользоваться безындексной системой обозначений, полагая

$$x = x_i, \qquad t = t_{j+1}, \qquad \check{t} = t_j, \qquad y = y(x, t) = y(x_i, t_{j+1}) = y_i^{j+1},$$

$$x^{(\pm 1_\alpha)} = x_i^{(\pm 1_\alpha)} = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_{\alpha-1}^{(i_{\alpha-1})}, x_\alpha^{(i_\alpha)} \pm h_\alpha, x_{\alpha+1}^{(i_{\alpha+1})}, \ldots, x_p^{(i_p)}),$$

$$y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x^{(\pm 1_\alpha)}, t),$$

$$y_{\bar{x}_\alpha} = \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}, \qquad y_{x_\alpha} = \frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha} = y_{\underset{x_\alpha}{(+1_\alpha)}}, \qquad \check{y} = y(x, t - \tau), \qquad y_{\bar{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}$$

$$(y, v) = \sum_{\omega_h} y \cdot v h_1 \ldots h_p = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} h_1 \ldots \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\alpha \ldots \sum_{i_p=1}^{N_p-1} h_p y_i v_i,$$

$$(y, v]_\alpha = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} h_1 \ldots \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{N_{\alpha-1}-1} h_{\alpha-1} \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} h_\alpha \sum_{i_{\alpha+1}=1}^{N_{\alpha+1}-1} h_{\alpha+1} \ldots \sum_{i_p=1}^{N_p-1} h_p y_i v_i,$$

где y и v — любые функции, заданные на сетке $\bar{\Omega}$. Для оценки сеточных функций мы пользуемся следующими нормами (ср. § 1):

$$\|y\|_0 = \max_{\bar{\omega}_h} |y|, \qquad \|y\|_\sigma = (|y|^\sigma, 1)^{1/\sigma} \text{ или } \|y\|_{\sigma_\alpha} = (|y|^\sigma, 1]_\alpha^{1/\sigma}, \qquad \sigma = 1, 2,$$

$$\|y\|_{3_\alpha} = \|\eta_\alpha\|_2, \qquad \eta_\alpha(x, t) = \sum_{x'_\alpha = h_\alpha}^{x_\alpha} y(x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x'_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p, t) h_\alpha,$$

$$\|y\|_3 = \sum_{\alpha=1}^{p} \|y\|_{3_\alpha}.$$

3. Однородные разностные схемы

Рассмотрим неявные однородные схемы с опережением, которые будем строить по аналогии с одномерным случаем $p = 1$. Введем шаблонные функционалы $A^{(\alpha)}[\mu(s)]$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$, определенные в классе кусочно-непрерывных функций $\mu(s)$, заданных в p-мерном параллелепипеде $-0.5 \leqslant s_\beta \leqslant 0.5$, $\beta \neq \alpha$, $-1 \leqslant s_\alpha \leqslant 0$. Для простоты считаем, что $A^{(\alpha)}$ не зависят от $h_1, \ldots, h_p$, т. е. рассматриваем канонические функционалы (и канонические схемы). Будем предполагать, что $A^{(\alpha)}[\mu]$ — неубывающий ($A^{(\alpha)}[\mu_2] \geqslant A^{(\alpha)}[\mu_1]$ при $\mu_2 \geqslant \mu_1$), нормированный ($A^{(\alpha)}[1] = 1$), однородный функционал первой степени ($A^{(\alpha)}[c\mu] = cA^{(\alpha)}[\mu]$, $c = \text{const} > 0$), имеющий дифференциал третьего порядка и удовлетворяющий условиям $A_1^{(\alpha)}[s_\beta] = 0$ при $\beta \neq \alpha$, $A_1^{(\alpha)}[s_\alpha] = -0.5$, где $A_1^{(\alpha)}[\eta] = A_1^{(\alpha)}[1, \eta]$ — первый дифференциал функционала $A^{(\alpha)}[\mu]$ в точке $\mu = 1$. Разностному оператору $L_\alpha u$ ставим в соответствие семейство однородных

трехточечных разностных схем

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t, y^*) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \qquad y^* = 0.5\,(y^{(-1_\alpha)} + y), \tag{7}$$

коэффициенты которых определяем с помощью функционала $A^{(\alpha)}$ по закону

$$a_\alpha = a_\alpha(x, t, y^*) = A^{(\alpha)}[k_\alpha(x_1 + s_1 h_1, \ldots, x_\alpha + s_\alpha h_\alpha, \ldots, x_p + s_p h_p, t, y^*)]. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что схема $\Lambda_\alpha y$, в силу сделанных выше предположений относительно $A^{(\alpha)}$, имеет второй порядок аппроксимации:

$$\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h^2), \text{ где } h^2 = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2. \tag{9}$$

Простейшим семейством схем $\Lambda_\alpha y$ являются схемы, коэффициенты которых вычисляются при помощи функционала $A[\mu(s_\alpha)]$, где $\mu(s_\alpha)$ — функция одной переменной s_α, $-1 \leqslant s_\alpha \leqslant 0$, так что

$$a_\alpha = A[k_\alpha(x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha + s_\alpha h_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p, t, y^*)], \tag{8'}$$

Здесь $A[\mu(s_\alpha)]$ — шаблонный функционал, использованный в § 1, п. 2, для построения одномерных разностных схем второго порядка аппроксимации. Очевидно, что

$$A[\mu(s_\alpha)] = A^{(\alpha)}[\mu(0, 0, \ldots, 0, s_\alpha, 0, \ldots, 0)].$$

Для аппроксимации на сетке функции $f(x, t, u, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ мы, по аналогии со случаем $p = 1$ (§ 1, п. 2), пользуемся линейными функционалами

$$F[\mu(s)] = F[\mu(s_1, \ldots, s_p)], \qquad -0.5 \leqslant s_\alpha \leqslant 0.5, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

предполагая, что $F[\mu(s)] \geqslant 0$ при $\mu(s) \geqslant 0$, $F[1] = 1$, $F[s_\alpha] = 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Функции $f(x, t, u, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ ставим в соответствие сеточную функцию

$$\begin{gathered}\varphi = \varphi(x, t, u, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = F[f(x_1 + s_1 h_1, \ldots, x_p + s_p h_p, t, u, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)], \\ \varphi(x, t, u, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) - f(x, t, u, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = O(h^2), \quad h^2 = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2.\end{gathered} \tag{10}$$

Аналогом одномерной канонической схемы (12), § 1 (см. [1]), в случае $p > 1$ является, в частности, схема с шаблонным функционалом вида

$$\left.\begin{aligned} A^{(\alpha)}[\mu(s_1, \ldots, s_p)] &= B_{p-1}^{(\alpha)}[A_\alpha^*[\mu(s_1, \ldots, s_p)]], \\ A_\alpha^*[\mu(s_1, \ldots, s_p)] &= \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds_\alpha}{\mu(s_1, \ldots, s_\alpha, \ldots, s_p)}\right]^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $B_{p-1}^{(\alpha)}[\eta(s_1, \ldots, s_{\alpha-1}, s_{\alpha+1}, \ldots, s_p)]$ — линейный нормированный ($B_{p-1}^{(\alpha)}[1] = 1$), неотрицательный ($B_{p-1}^{(\alpha)}[\eta] \geqslant 0$ при $\eta \geqslant 0$) функционал, определенный в классе кусочно-непрерывных функций $(p-1)$-го переменного, заданных внутри $(p-1)$-мерного куба $-0.5 \leqslant s_\beta \leqslant 0.5$, $\beta \neq \alpha$, $\beta = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, p$. При этом $B_{p-1}^{(\alpha)}$ удовлетворяет условию

$$B_{p-1}^{(\alpha)}[s_\beta] = 0 \text{ при } \beta \neq \alpha, \quad \beta = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, p.$$

Например, $B_{p-1}^{(\alpha)}[\eta] \equiv 1$, или

$$B_{p-1}^{(\alpha)}[\eta] = \int_{-0.5}^{0.5} ds_1 \ldots \int_{-0.5}^{0.5} ds_{\alpha-1} \int_{-0.5}^{0.5} ds_{\alpha+1} \ldots \int_{-0.5}^{0.5} ds_p \eta(s_1, \ldots, s_{\alpha-1}, s_{\alpha+1}, \ldots, s_p).$$

Аналогом одномерного функционала $F[\mu(s)] = \int\limits_{-0.5}^{0.5} \mu(s)\,ds$ является функционал

$$F[\mu(s)] = \int\limits_{-0.5}^{0.5} ds_1 \ldots \int\limits_{-0.5}^{0.5} ds_p \mu(s_1, \ldots, s_p). \tag{12}$$

В [5] было выяснено, что для построения разностных схем, обладающих максимальной точностью в классе разрывных коэффициентов, целесообразно функцию f преобразовать к виду

$$f = f\left(x, t, u, 2k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, 2k_p \frac{\partial u}{\partial x_p}\right), \tag{13}$$

что всегда возможно, так как $k_\alpha \geqslant c_1 > 0$. Поток $2k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ при этом аппроксимируем выражением

$$\lambda_\alpha(y) = a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} + a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} \sim \lambda_\alpha^0(u) = 2k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}. \tag{14}$$

Наряду с этим мы будем рассматривать и схемы, для которых

$$f = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_p}\right)$$

$$\lambda_\alpha(y) = y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = 0.5\,(y_{x_\alpha} + y_{\bar{x}_\alpha}) \sim \lambda_\alpha^0(u) = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}. \tag{15}$$

4. Разностная краевая задача

Перейдем к формулировке разностной задачи, соответствующей исходной задаче (1) — (5). Найти сеточную функцию $y(x, t)$, определенную в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющую уравнению

$$\rho y_{\bar{t}} = \Lambda y + \varphi(x, t, y, \lambda_1(y), \ldots, \lambda_p(y)) \text{ в } \Omega, \tag{16}$$

граничному условию

$$y = \chi(x, t) \text{ при } x \in \gamma, \quad t \in \bar{\omega}_\tau \tag{17}$$

и начальному условию

$$y(x, 0) = u_0(x) \text{ при } t = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h. \tag{18}$$

Здесь

$$\Lambda y \doteq \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y, \qquad \Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t, y^*)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \tag{19}$$

$\lambda_\alpha(y)$ определяется одним из выражений (14) или (15), $\rho = \rho(x, t) = F[c(x_1 + s_1 h_1, \ldots, x_p + s_p h_p, t)]$.

Пусть u — решение задачи (1) — (5), y — решение задачи (16) — (19). Найдем уравнение для погрешности $z = y - u$. Подставляя $y = z + u$ в (16) и проводя рассуждения по аналогии с § 1, п. 4, получим

$$\rho z_{\bar{t}} = \bar{\Lambda} z - dz + Q(z) + \psi, \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 0 \text{ при } x \in \gamma, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \\ z &= 0 \text{ при } t = 0, \quad x \in \omega_h, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\bar{\Lambda} z = \sum_{\alpha=1}^{p} \bar{\Lambda}_\alpha z, \qquad \bar{\Lambda}_\alpha z = (a_\alpha(x, t, y^*)\, z_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \tag{22}$$

$$Q(z)=\sum_{\alpha=1}^{p} Q_\alpha(z), \qquad Q_\alpha(z)=b_\alpha\lambda_\alpha(z)+(g_\alpha z^*)_{x_\alpha}, \tag{23}$$

$$d=-\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}, \qquad b_\alpha=\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_\alpha}}, \qquad g_\alpha=\overline{\frac{\partial a_\alpha}{\partial u}}\,u_{\bar{x}_\alpha}.$$

Черта сверху указывает, что производные берутся при некоторых средних значениях аргументов u, λ_α. Погрешность аппроксимации имеет вид:

$$\psi=\sum_{\alpha=1}^{p}\left[(a_\alpha(x,t,u^*)\,u_{\bar{x}})_{x_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right]-\left[\rho(x,t)\,u_{\bar{t}}-c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\right]+$$
$$+[\varphi(x,t,u,\lambda_1(u),\ldots,\lambda_p(u))-f(x,t,u,\lambda_1^0(u),\ldots,\lambda_p^0(u))].$$

Коэффициенты a_α, ρ, d, b_α, g_α в силу условий на f, c, k_α, u ограничены:

$$a_\alpha\geqslant c_1>0, \quad \rho\geqslant c_2\geqslant 0, \quad |d|\leqslant c_3, \quad |b_\alpha|\leqslant c_4, \quad |g_\alpha|\leqslant c_5, \tag{24}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 — положительные постоянные, не зависящие от h_α и τ. ($u=u(x,t)$ — заданное решение задачи (1) — (5); вне области изменения u, $\lambda_\alpha(u)$ можно определить $k(x,t,u)$, $f(x,t,u,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ так, чтобы $\partial x/\partial u$, $\partial f/\partial u$, $\partial f/\alpha\lambda_\alpha$ ($\alpha=1,\ldots,p$) были ограничены.)

Если выполнены условия А (§ 2, п. 1), то

$$\psi=O(h^2)+O(\tau) \quad \text{или} \quad \|\psi\|_0\leqslant M(h^2+\tau). \tag{25}$$

5. Априорные оценки

Для выяснения порядка точности схемы (16) надо оценить решение задачи (20) — (24) через погрешность аппроксимации. Мы рассмотрим задачу более общего вида:

$$\rho z_{\bar{t}}=\Lambda z+Q(z)+\psi \quad \text{в } \Omega, \tag{26}$$

$$z=0 \ \text{при } x\in\gamma, \quad t\in\omega_\tau, \qquad z=0 \ \text{при } t=0, \quad x\in\omega_h, \tag{27}$$

$$\Lambda z=\sum_{\alpha=1}^{p}(a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}-d_1 z, \tag{28}$$

$$Q(z)=\sum_{\alpha=1}^{p}[\bar{b}_\alpha z_{x_\alpha}+\bar{\bar{b}}_\alpha z_{\bar{x}_\alpha}+(g_{11}^{(\alpha)}z)_{x_\alpha}+(g_{22}^{(\alpha)}z)_{\bar{x}_\alpha}+(g_{12}^{(\alpha)}\check{z})_{x_\alpha}+(g_{21}^{(\alpha)}\check{z})_{\bar{x}_\alpha}]+d_2\check{z}, \tag{29}$$

$$\rho\geqslant c_1>0, \quad a_\alpha\geqslant c_1>0, \quad |d_s|\leqslant c_2, \quad |\bar{b}_\alpha|\leqslant c_3, \quad |\bar{\bar{b}}_\alpha|\leqslant c_3, \quad |g_{sk}^{(\alpha)}|\leqslant c_4,$$
$$s,k=1,2, \quad \alpha=1,\ldots,p. \tag{30}$$

Будем предполагать, что

$$|\rho_{\bar{t}}|\leqslant c_5. \tag{31}$$

Теорема 9. *Если*

$$g_{sk}^{(\alpha)}=0, \qquad s,k=1,2, \quad \alpha=1,\ldots,p, \tag{32}$$

то для решения задачи (26) — (30) *имеет место равномерная оценка*

$$\|z(x,t)\|_0\leqslant M\overline{\|\psi(x,t)\|_0} \ \text{при } \tau<\tau_0, \tag{33}$$

где

$$M = M(c_1, c_2, c_3), \qquad \overline{\|\psi(x, t)\|}_0 = \max_{(\tau \leqslant t' \leqslant t)} \|\psi(x, t')\|_0.$$

Если, кроме того, выполнено условие (31), *то при достаточно малых* $\tau < \tau_0$ *и* $h < h_0$ *справедливо неравенство*

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M \overline{\|\psi(x, t)\|}_{3_\alpha} \ln^\delta (1/H), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{34}$$

где $H = h_1 \ldots h_p$, *а* $\|\psi(x, t)\|_{3_\alpha}$ *дается в п.* 1, $\delta > 1$.

Теорема 10. *Пусть* $z(x, t)$ — *решение задачи* (26) — (31). *Тогда при достаточно малом* $\tau < \tau_0$ *имеет место оценка в среднем*

$$\|z(x, t)\|_2 \leqslant M \left[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\psi(x, t')\|_{3_\alpha}^2 \right]^{1/2}, \tag{35}$$

где α — *любое из чисел* $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. *Если, кроме того,* $h < h_0$ *достаточно мало и* $g_{12}^{(\alpha)} = g_{21}^{(\alpha)} = 0$, *то*

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M \overline{\|\psi(x, t)\|}_{3_\alpha} \exp(M \sqrt{\ln(1/H)}), \qquad H = h_1 \ldots h_p. \tag{36}$$

Эти теоремы являются простым обобщением теорем 2 и 4, доказанных в § 1. Метод их доказательства тот же, что и для $p = 1$, несколько усложняется лишь изложения. Сначала проводится преобразование $z^j \doteq v^j (1 + \overline{M}\tau)^j$. Для v получим ту же задачу (26) — (30), причем коэффициент $d_1 \geqslant M^* > 0$, если $\tau < \tau_0$, где M^* — любое наперед заданное число; при этом $\overline{M}$ выражается через M^* и постоянные $c_1 - c_5$. Чтобы упростить изложение, будем предполагать, что такое преобразование уже выполнено, и сохраним для искомой функции прежнее обозначение z. По аналогии с одномерным случаем напишем интегральное тождество n-го ранга для функции $\overset{n}{z} = z^{2^n}$:

$$(\rho, \overset{n}{z})_{\bar{t}} + 2 \sum_{\alpha=1}^{p} I_n^{(\alpha)} + \sum_{\alpha=1}^{p} P_n^{(\alpha)} + 2^n (d_1, \overset{n}{z}) = 2^n (\Psi, z^{\alpha_n}) + (\rho_{\bar{t}}, \overset{n}{z}), \tag{37}$$

$$\Psi = Q(z) + \psi, \qquad P_n^{(\alpha)} = \tau \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} (\rho (\overset{k}{z}_{\bar{t}})^2, z^{\alpha_n - \alpha_{k+1}}), \tag{38}$$

$$I_n^{(\alpha)} = (a, (\overset{n-1}{z}_{\bar{x}_\alpha})^2]_\alpha + \sum_{k=0}^{n-2} 2^{n-k-2} \{(a_\alpha (\overset{k}{z}_{\bar{x}_\alpha})^2, z^{\alpha_n - \alpha_{k+1}}) + \tag{39}$$

$$+ (a_\alpha^{(+1_\alpha)} (\overset{k}{z}_{x_\alpha})^2, z^{\alpha_n - \alpha_{k+1}})\}.$$

Интегральное неравенство n-го ранга и все оценки правой части проводятся так же, как и в п. 5 § 1 для $p = 1$. Так как здесь мы рассматриваем первую краевую задачу, то рассуждения заметно упрощаются. Мы не будем, во избежание ненужных повторений (с § 1), приводить доказательства теорем 9 и 10.

Следует отметить, что конкретный вид области G (параллелепипед) при выводе тождества n-го ранга не используется. Это же тождество справедливо на прямоугольной сетке ω_h, аппроксимирующей произвольную область G.

Перейдем теперь к выяснению вопроса об устойчивости решения уравнения (26) относительно граничных и начальных данных.

Уравнение первого ранга имеет вид

$$\rho w_{\bar t} - \Lambda w + R(z) + 2d_1 w = 2zQ(z) + 2z\psi \qquad (w = z^2),$$
$$R(z) = \tau\rho z_{\bar t}^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} (a_\alpha z_{\bar x_\alpha}^2 + a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha}^2). \tag{40}$$

Для этого уравнения в случае $g_{sk}^{(\alpha)} = 0$ имеет место принцип максимума, и потому справедлива

Теорема 11. *Если* $g_{sk}^{(\alpha)} = 0$, $s, k = 1, 2$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, *то решение уравнения* (26), *определенное в* $\overline{\Omega}$, *устойчиво относительно правой части, начальных и граничных значений, так что при достаточно малом* $\tau < \tau_0$ *выполняется неравенство*

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M_1(\|z(x, 0)\|_0 + \|\overline{z(x, t)}\|_{0, \gamma}) + M_2\left[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\psi(x, t')\|_0^2\right]^{1/2}, \tag{41}$$

где τ_0 *и* M_1, M_2 — *положительные постоянные, зависящие только от* c_i *и* τ, $i = 1, \ldots, 4$, $\|z(x, t)\|_{0, \gamma} = \max\limits_{(x \in \gamma)} |z(x, t)|$.

Доказательство этой теоремы проводится по аналогии с доказательством теоремы 1. Поэтому нет необходимости на нем останавливаться.

Заметим, что первое утверждение (33) теоремы 3 следует из (41).

Рассмотрим теперь общее уравнение (26), когда $g_{sk}^{(\alpha)} \neq 0$. Его решение представим в виде суммы $z = v + w$, где v и w определяются условиями

$$v_{\bar t} - \Lambda v + d_1 v = Q_1(v) + \psi, \tag{42}$$
$$v = z \text{ при } x \in \gamma,\ t \in \overline{\omega}_\tau; \qquad v(x, 0) = z(x, 0) \text{ при } x \in \overline{\omega}_h,$$
$$Q_1(v) = \sum_{\alpha=1}^{n} (\bar b_\alpha v_{x_\alpha} + \overline{\overline{b}}_\alpha v_{\bar x_\alpha}) = Q(v) - Q_2(v),$$
$$w_{\bar t} - \Lambda w + d_1 w = Q(w) + Q_2(w),$$
$$w = 0 \text{ при } x \in \gamma,\ t \in \omega_\tau, \qquad w(x, 0) = 0 \text{ при } x \in \omega_h.$$

Для $v(x, t)$, очевидно, имеет место оценка (41). Чтобы оценить w, используем интегральное тождество n-го ранга (37). Входящие в правую часть этого тождества члены вида $2^n((gv)_{x_\alpha}, w^{\alpha_n})$ преобразуем так:

$$2^n((gv)_{x_\alpha}, w^{\alpha_n}) = -2^n(gv, (w^{\alpha_n})_{\bar x_\alpha}), \qquad \alpha_n = 2^n - 1.$$

Отсюда, пользуясь формулой для $(w^{\alpha_n})_{\bar x_\alpha}$, найдем

$$2^n|((gv)_{x_\alpha}, w^{\alpha_n})| \leqslant 2^n M(1, \overset{n}{w}) + \tfrac{1}{4} I_n^{(\alpha)} + (M \cdot 2^n \|v\|_0)^{2^n}.$$

В результате приходим к следующим оценкам:

$$\left.\begin{aligned} &\|w(x, t)\|_2 \leqslant M\overline{\|v(x, t)\|_0}, \\ &\|w(x, t)\|_0 \leqslant M\overline{\|v(x, t)\|_0} \exp(M\sqrt{\ln(1/H)}), \qquad H = h_1 \ldots h_p \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Комбинируя (41) и (43), убеждаемся в том, что справедлива следующая

Теорема 12. *Пусть $z(x, t)$ — решение уравнения* (26), *определенное на сетке $\overline{\Omega}$. Если выполнены условия* (30) *и* (31), *то имеют место неравенства*:

1) *при достаточно малом $\tau < \tau_0$*

$$\|z(x, t)\|_2 \leqslant M\left\{\|z(x, 0)\|_0 + \overline{\|z(x, t)\|_{0,\gamma}} + \left[\sum_{t'=\tau}^{t} \tau \|\psi(x, t')\|_{3_\alpha}^2\right]^{1/2}\right\}; \quad (44)$$

2) *при достаточно малых $\tau < \tau_0$ и $h < h_0$*

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M\{\|z(x, 0)\|_0 + \overline{\|z(x, t)\|_{0,\gamma}} + \overline{\|\psi(x, t)\|_{3_\alpha}}\}\exp(M\sqrt{\ln(1/H)}). \quad (45)$$

Вторая оценка содержит множитель, зависящий от $H = h_1 \ldots h_p$. Она будет использована при выяснении вопроса о равномерной сходимости разностных схем, соответствующих квазилинейным уравнениям параболического типа с коэффициентом теплопроводности $k = k(x, t, u)$ зависящим от искомой функции $u = u(x, t)$.

6. О сходимости и порядке точности однородных схем для квазилинейного уравнения

Вернемся теперь к задаче (20) — (24). Она является частным случаем задачи (26) — (30), рассмотренной в п. 5. Поэтому мы можем воспользоваться полученными в п. 5 априорными оценками и сразу формулируем ряд теорем о сходимости и порядке точности решения задачи (16) — (19). При этом основное внимание обращается на доказательство равномерной сходимости.

Теорема 13. *Если условия* А *выполнены в Q_T и $k_\alpha = k_\alpha(x, t)$ не зависит от u, то решение $y = y(x, t)$ задачи* (16) — (19) *равномерно сходится к решению $u = u(x, t)$ задачи* (1) — (5) *при независимом стремлении h_α $(\alpha = 1, \ldots, p)$ и τ к нулю так, что при достаточно малом $\tau < \tau_0$*

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^2 + \tau), \qquad h^2 = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2. \quad (46)$$

Теорема 14. *Если условия* А *выполнены в Q_T и $k_\alpha = k_\alpha(x, t, u)$ зависит от u, то решение задачи* (16) — (19) *сходится к решению задачи* (1) — (5) *так, что*

1) *при достаточно малом $\tau < \tau_0$*

$$\|y - u\|_2 \leqslant M(h^2 + \tau) \text{ (сходимость в среднем)}; \quad (47)$$

2) *при достаточно малых $\tau < \tau_0$ и $h < h_0$*

$$\|y - u\|_0 \leqslant M_1(h^2 + \tau)\exp(M_2\sqrt{\ln(1/H)}) \text{ (равномерная сходимость)}. \quad (48)$$

Обе теоремы справедливы для любого $p \geqslant 1$. Оценку (48) не удается улучшить даже для $p = 1$.

Для доказательства теоремы (13) достаточно воспользоваться условием (25) и оценкой (33) теоремы 9. Теорема 14 следует из теоремы 12 и (25).

Априорные оценки (34), (35) и (44), (45) (теоремы 9, 10, 12) позволяют доказать сходимость разностной схемы (16) в случае разрывных коэффициентов k_α и f, так как эти оценки получены в предположении лишь ограниченности коэффициентов уравнения (1). Предположим, что коэффициент $k_\alpha(x, t, u)$ имеет конечное число разрывов I рода при $x_\alpha = \xi_\alpha = \text{const}$. Тогда вдоль гиперплоскости $x_\alpha = \xi_\alpha$ выполняются условия сопряжения (5), а схема $\Lambda_\alpha u$, как мы видели в [1], [3], [5], не аппроксимирует оператор $L_\alpha u$ в окрестности $x_\alpha = \xi_\alpha$. Достаточно рассмотреть случай, когда, например, коэффициент $k_1(x, t, u)$ имеет разрыв при $x_1 = \xi_1 = x_1^{(n_1)} + \theta_1 h_1$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$, $x_1^{(n_1)} = n_1 h_1$. Будем предполагать, что в каждой из областей, на которые гиперплоскость $x_1 = \xi_1$ делит цилиндр $\overline{Q}_T$, выполняются условия А, т. е. имеют место условия Б. При вычислении погрешности аппроксимации в точках $x_{n_1} = (x_1^{(n_1)}, x_2, \ldots, x_p)$ и $x_{n_1+1} = (x_1^{(n_1+1)}, x_2, \ldots, x_p)$ достаточно ограничиться изучением слагаемого

$$\psi_1 = \Lambda_1 u - L_1 u$$

(для простоты предположим, что $c(x, t)$ и f непрерывны при $x_1 = \xi_1$), так как $\psi - \psi_1 = Q(h^2) + Q(\tau)$ в точках $x = x_{n_1}$ и $x = x_{n_1+1}$.

Кроме того, имеем $\psi = Q(h^2) + Q(\tau)$ всюду в Ω, кроме точек (x_{n_1}, t) и (x_{n_1+1}, t), где $t \in \omega_\tau$. Замечая, что ψ_1 есть погрешность аппроксимации одномерной схемы $\Lambda_1 u$, и пользуясь результатами работ [1] и [5], получим:

$$1)\ h_1 \psi_1(x_{n_1}, t) = O(1), \qquad \psi_1(x_{n_1}, t) + \psi_1(x_{n_1+1}, t) = O(1) \tag{49}$$

для произвольной схемы из определенного в п. 2 исходного семейства разностных схем,

$$2)\ \psi_1(x_{n_1}, t) = O(1), \qquad \psi_1(x_{n_1}, t) + \psi_1(x_{n_1+1}, t) = O(h_1) \tag{50}$$

для наилучших схем, определяемых шаблонными функционалами вида (11) или (12).

Из (25), (49) — (50) следует:

для любой схемы (16)

$$h_1 \psi(x_{n_1}, t) = O(1), \quad \psi(x_{n_1}, t) + \psi(x_{n_1+1}, t) = O(1) \tag{51}$$

для схемы (11) — (12)

$$h_1 \psi(x_{n_1}, t) = O(h_1), \quad \psi(x_{n_1}, t) + \psi(x_{n_1+1}, t) = O(h_1). \tag{52}$$

Если функции $f(x, t, u, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ и $c(x, t)$ тоже имеют разрывы I рода при $x_1 = \xi_1 = x_1^{(n_1)} + \theta_1 h_1$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant h_1$, $x_1^{(n_1)} = n_1 h_1$, то условия (51) выполнены для любой схемы и любого из представлений (14) или (15). Для схемы, определяемой функционалами (11) и (12), а также выражением (14) для $\lambda_\alpha(y)$, выполняются условия (52).

В остальных точках сетки

$$\psi = O(h^2) + O(\tau) \text{ при } x \neq x_{n_1}, \quad x \neq x_{n_1+1}$$

для любой из схем рассматриваемого семейства.

По аналогии с § 3 работы [5] находим

$$\|\psi\|_{3_1} \leqslant M\{h^2 + \tau + h_1^{3/2} |\psi(x_{n_1}, t)| + h_1 |\psi(x_{n_1}, t) + \psi(x_{n_1+1}, t)|\}, \tag{53}$$

где M — постоянная, не зависящая от h и τ (и зависящая, в частности, от объема области G).

Обращаясь теперь поочередно к теоремам 9 и 10, убеждаемся в том, что справедливы следующие утверждения:

а) если ни один из коэффициентов $k_\alpha = k_\alpha(x, t)$ не зависит от u, а каждая из функций k_α, c, f имеет конечное число разрывов I рода при $x_\alpha = \xi_\alpha^{(s)} = \text{const}$, $s = 1, 2, \ldots, m_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, то решение задачи (16) — (19) равномерно сходится к решению задачи (1) — (5) при $h_\alpha \to 0$ и $\tau \to 0$ так, что при достаточно малых $h < h_0$ и $\tau < \tau_0$ справедлива оценка

$$\| y - u \|_0 \leqslant M (h_1^\varkappa \ln^\delta (1/H) + h^2 + \tau), \tag{54}$$

где $\varkappa = 0.5$ для любой исходной схемы, $\varkappa = 1.5$ для схем (11), (12), $\delta > 1$;

б) если хотя бы одна функция $k_\alpha = k_\alpha(x, t, u)$ зависит от u, то при достаточно малом $\tau < \tau_0$ имеем

$$\| y - u \|_2 \leqslant M (h_1^\varkappa + h^2 + \tau) \tag{55}$$

и

$$\| y - u \|_0 \leqslant M (h_1^\varkappa + h^2 + \tau) \exp (M \sqrt{\ln (1/H)}) \text{ при } \tau < \tau_0, \quad h < h_0. \tag{56}$$

В ряде частных случаев приведенные оценки порядка точности рассматриваемых схем могут быть улучшены.

Изложенный здесь метод изучения сходимости позволяет без труда установить аналогичные оценки для произвольной области с достаточно гладкой границей. Основную трудность здесь будет представлять случай, когда условия на границе Γ области G переносятся на границу γ сетки ω_h при помощи линейной интерполяции (см. [9]). Такой способ задания граничных условий удобнее трактовать для так называемого метода дробных шагов (см. [8]), формулировка которого для уравнения (1) и изучение сходимости и точности будут даны в следующей статье.

Остановимся теперь на третьей краевой задаче. Пусть вместо (2) заданы условия

$$k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \sigma_{1\alpha} u = f_{1\alpha} \text{ при } x_\alpha = 0, \quad k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \sigma_{2\alpha} u = f_{2\alpha} \text{ при } x_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Разностные краевые условия $a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} - \sigma_{1\alpha} y = f_{1\alpha}$ при $x_\alpha = 0$, $a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} + \sigma_{2\alpha} y = f_{2\alpha}$ при $x_\alpha = l_\alpha$ имеют первый порядок аппроксимации. Для соответствующей разностной задачи справедливы следующие оценки:

$$\| y - u \|_0 \leqslant M (h + \tau) \text{ вместо (46)},$$
$$\| y - u \|_0 \leqslant M (h_1^\varkappa \ln^\delta (1/H) + h + \tau) \text{ вместо (54)},$$
$$\| y - u \|_0 \leqslant M (h_1^\varkappa + h + \tau) \exp (M \sqrt{\ln (1/H)}) \text{ вместо (56)}.$$

Представляет интерес изучение краевых условий III рода, имеющих второй порядок аппроксимации (ср. с [5]).

7. Некоторые замечания

1. Если $k_\alpha = k_\alpha(x, t)$ имеет ограниченную в Q_T производную $\partial k_\alpha / \partial t$, следовательно $|(a_\alpha)_{\bar{t}}| \leqslant M$, то теорема 5 обобщается на многомерный случай. Отсюда, в частности, следует, что для линейного уравнения (1)

при

$$k_\alpha = k_\alpha(x, t), \qquad f = f(x, t) + \sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q(x, t)\, u$$

оценки (54) и (55) могут быть улучшены. В частности, вместо (54) получим

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\left(h_1^{\varkappa_2} \ln \frac{1}{H} + h^2 + \tau\right),$$

где $\varkappa_2 = 1$ для всего семейства исходных схем и $\varkappa_2 = 2$ для схемы (11) — (12). Не останавливаясь на доказательстве этого утверждения, отметим тот факт, что $\partial k_\alpha / \partial x_\beta$ при $\beta \neq \alpha$ ограничена вдоль гиперплоскости $x_\alpha = \xi_\alpha = \text{const}$, на которой k_α имеет разрыв I рода. При этом предполагается также, что f, r_α и $q(x, t)$ имеют ограниченные производные по t.

2. Для нелинейного параболического уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f\left(x, t, u, \lambda_1^0(u), \ldots, \lambda_p^0(u), \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0,$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

где

$$\lambda_\alpha^0(u) = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \quad \text{или} \quad \lambda_\alpha^0(u) = 2k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha},$$

исследование проводится по аналогии с одномерным случаем (см. [5]).

Поступила в редакцию
31. 03. 1962

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 4—63.
2. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 3, 441—460.
3. А. А. Самарский, И. В. Фрязинов. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 5, 806—824.
4. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 6, 971—1000.
5. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 1, 25—56.
6. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.—Л., Физматгиз, 1960.
7. О. А. Ладыженская. Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными. Успехи матем. наук, 1957, **13**, 123—148.
8. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1207—1210.
9. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 2. М., Физматгиз, 1960.