ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Сентябрь 1962 Октябрь № 5

ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

При решении разностными методами различных дифференциальных уравнений широко используются неравномерные сетки. Однако вопрос о сходимости разностных схем на неравномерных сетках изучен мало.

Простейшие примеры показывают, что часто применяемый критерий для суждения о качестве разностных схем — равномерная оценка или оценка в среднем погрешности аппроксимации схемы — в случае неравномерных сеток оказывается несостоятельным и может дать неверное представление о порядке точности схемы.

Рассмотрим для дифференциального уравнения

$$Lu = u'' + f(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \quad u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2 \tag{1}$$

две разностные схемы на произвольной неравномерной сетке $\omega_N = \{x_i, i = 0, 1, \ldots, N, \ x_0 = 0, \ x_N = 1\}$:

$$1.\ \Lambda_1 y_i = \frac{1}{\hbar_i}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) + f_i = 0, \qquad y_0 = u_1, \quad y_N = u_2,$$

где $y_i = y(x_i)$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $\hbar_i = 0.5(h_i + h_{i+1})$; погрешность аппроксимации этой схемы:

$$\psi_1 = \Lambda_1 u_i - Lu_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} u_i''' + O(h_i^2) + O(h_{i+1}^2),$$

т. е. схема имеет первый порядок аппроксимации. Однако в § 2 будет показано, что эта схема обеспечивает второй порядок точности на произвольной неравномерной сетке

$$\|y - u\|_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |y_i - u(x_i)| \leqslant M\bar{h}^2, \tag{2}$$

где $\bar{h}$ — средний квадратичный шаг сетки:

$$\bar{h} = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i^2 h_i\right)^{1/2}.$$

2. Иногда применяется следующая схема:

$$\Lambda_2 y = \frac{1}{h_{i+1}}\left(\frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{\hbar_{i+1}} - \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}}{\hbar_i}\right) + f_i = 0, \qquad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2,$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $\hbar_i = 0.5(h_i + h_{i+1})$, $\bar{y}_i = y(\bar{x}_i)$, $\bar{x}_i = 0.5(x_i + x_{i+1})$.

Вычисления дают

$$\psi_i = \Lambda_2 \bar{u}_i - (Lu)\big|_{x=\bar{x}_i} = \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + h_i}{4h_{i+1}} u_i'' + O(h_i) + O(h_{i+1}) + O(h_{i+2}),$$

т. е. схема, вообще говоря, не аппроксимирует уравнение (1), если сетка произвольна. Однако в п. 5 § 2 показано, что

$$\|\bar{y} - u(\bar{x})\|_0 \leqslant M \|h\|_0^2 \quad \|h\|_0 = \max_i h_i \text{ (теорема 4)}, \tag{3}$$

т. е. схема Λ_2 имеет второй порядок точности на произвольной сетке.

Нетрудно заметить, что в случае равномерной сетки $h_i = h = 1/N$ обе схемы совпадают.

Как было показано в [1], для однородных схем в случае дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + f(x) = 0$$

с разрывными коэффициентами точность разностной схемы в конечном счете определяется не локальной, а интегральной погрешностью аппроксимации, характеризуемой нормой

$$\|\psi\|_3 = \sum_{i=1}^{N} h \left|\sum_{k=1}^{i} \psi_k h\right|. \tag{4}$$

Норма подобного типа, как выясняется в этой работе, является рациональной и для оценки точности однородных разностных схем на неравномерных сетках.

Изучение однородных разностных схем на неравномерных сетках мы проводим на примере краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} L^{(k,q,f)}u = (k(x)u')' - q(x)u + f(x) = 0, \qquad 0 < x < 1, \\ u(0) = u_1, \qquad u(1) = u_2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Мы рассматриваем семейство однородных консервативных трехточечных разностных схем стандартного типа, определяемых производящим функционалом:

$$\Lambda y = L_h^{(k,q,f)} y = (a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi = 0,$$

$$(a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} = \frac{1}{\hbar}\left[\frac{a^{(+1)}(y^{(+1)} - y)}{h_{+1}} - \frac{a(y - y^{(-1)})}{h}\right], \qquad \hbar = 0.5(h + h_{+1}).$$

Коэффициенты a, d, φ схемы определяются при помощи тех же шаблонных функционалов $A[\mu(s)]$ $(-1 \leqslant s \leqslant 0)$; $D[\mu(s)]$, $F[\mu(s)]$ $(-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5)$, что и в случае равномерных сеток в [1]:

$$a = A[k(x + sh)], \qquad d = D[q(x + (s + \Delta)\hbar)],$$

$$\varphi = F[f(x + (s + \Delta)\hbar)], \qquad \Delta = (h_{+1} - h)/4\hbar.$$

В § 1 рассматривается семейство однородных разностных схем на неравномерных сетках, изучаются свойства разностной функции Грина и дается вывод необходимых для дальнейшего априорных оценок.

В § 2 изучается точность однородных разностных схем на произвольной последовательности неравномерных сеток. В классе гладких коэффи-

циентов рациональной характеристикой неравномерной сетки является ее средний квадратичный шаг $\bar{h} = \|h\|_2$; в этом случае наши схемы имеют второй порядок точности относительно $\bar{h}$, т. е. $\|y - u\|_0 \leqslant M\bar{h}^2$.

В п. 4 показано, что и в классе разрывных коэффициентов наши схемы имеют на неравномерных сетках тот же порядок точности, что и на равномерных сетках. Точнее, если $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ имеют разрывы I рода в некоторой окрестности точки $\xi = x_n + \theta h_{n+1}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$, то справедлива оценка

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\bar{h}^2 + M'(h_n^{\varkappa} + h_{n+1}^{\varkappa} + h_{n+2}^{\varkappa}),$$

где $\varkappa = 1$ для произвольной схемы из рассматриваемого семейства, $\varkappa = 2$ для схемы, шаблонные функционалы A, D, F которой имеют вид

$$A[\mu(s)] = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{\mu(s)}\right]^{-1}, \qquad D[\mu(s)] = F[\mu(s)] = \int_{-0.5}^{0.5} \mu(s)\, ds.$$

Из этой оценки можно сделать выводы о выборе сетки вблизи фиксированных точек разрыва функций k, q, f.

Полученные в § 2 результаты позволяют освободиться от требования $0 < M_1 \leqslant h_{i+1}/h_i \leqslant M_2$, используемого в [2].

Аналогичные теоремы о точности однородных разностных схем на неравномерных сетках получаются для многомерного уравнения эллиптического типа

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x_1, \ldots, x_p)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q(x_1, \ldots, x_p)\, u + f(x_1, \ldots, x_p) = 0.$$

В этом случае при построении соответствующих априорных оценок используется метод интегральных (энергетических) неравенств.

Следует отметить, что разностные схемы частного вида на неравномерных сетках рассматривались в ряде работ (см., например, [3]). Однако при оценке точности разностных схем на неравномерных сетках использовалась норма $\|\psi\|_0 = \max_i |\psi_i|$, которая не позволяет выяснить фактический порядок точности.

§ 1. Однородные разностные схемы на неравномерной сетке

1. Исходное семейство однородных схем

Рассмотрим первую краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} L^{(k,q,f)} u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)\,u + f(x) = 0, \qquad 0 < x < 1, \\ u(0) = u_1, \qquad u(1) = u_2, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $k(x) \geqslant c_1 > 0$, $q(x) \geqslant 0$, c_1 — постоянная.

Класс краевых задач (5) определен, если указаны семейства функций, которым принадлежат функции $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$. Следуя [1], будем обозначать через $C^{(m)}[a, b]$ класс функций, имеющих на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ непрерывную m-ю производную; $\tilde{Q}^{(m)}[a, b]$ — класс функций, кусочно-непрерывных на $[a, b]$ вместе с производными до m-го порядка включительно; $C^{(m,1)}[a, b]$ — класс функций, у которых m-я производная удов-

летворяет на $[a, b]$ условию Липшица; $Q^{(m,1)}[a, b]$ — класс функций из $Q^{(m)}$, m-я производная которых на интервалах ее непрерывности удовлетворяет условию Липшица. Если в некоторой точке $\xi \in (0,1)$ функция $k(x) \in Q^{(0)}[0, 1]$ имеет разрыв I рода ($k_л = k(\xi - 0) \neq k_п = k(\xi + 0)$), то в этой точке выполняются обычные условия сопряжения

$$[u] = u_п - u_л = 0, \qquad \left[k\frac{du}{dx}\right] = 0 \text{ при } x = \xi. \tag{6}$$

Разбивая отрезок $[0, 1]$ точками $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N = 1$ на N частей, получим разностную сетку $\omega_N = \{x_i\}$. Шаг сетки $h_i = x_i - x_{i-1}$ является, вообще говоря, произвольной сеточной функцией, удовлетворяющей лишь условию нормировки

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = 1. \tag{7}$$

Если все $h_i = h = 1/N$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, то сетка $\omega_N = \omega_h$ равномерна. Пусть $y_i = y(x_i)$ — некоторая сеточная функция. В дальнейшем индекс i будем, как правило, опускать и писать

$$y = y(x) = y_i, \quad y^{(+1)} = y_{i+1}, \quad y^{(-1)} = y_{i-1} \quad (x \in \omega_N).$$

Введем обозначения для «разностных производных»

$$y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = \frac{y - y^{(-1)}}{h}, \qquad y_x = \frac{y^{(+1)} - y}{h_{+1}}, \qquad y_{\hat{x}} = \frac{y^{(+1)} - y}{\hbar} = \frac{h_{+1}}{\hbar} y_x,$$

где $\hbar = 0.5(h + h_{+1})$, $h = h_i$, $h_{+1} = h_{i+1}$. Тогда разностный оператор

$$\Lambda y_i = \frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{a_{i+1}(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}} - \frac{a_i(y_i - y_{i-1})}{h_i}\right]$$

можно записать в удобной форме

$$\Lambda y = (a y_{\bar{x}})_{\hat{x}}.$$

На равномерной сетке $\Lambda y = (a y_{\bar{x}})_x$.

Задача (5) неоднократно рассматривалась нами (см., например, [1]) для случая равномерных сеток. В работе [1] показано, что в семействе однородных схем стандартного типа только консервативные схемы

$$\Lambda y = L_h^{(k, q, f)} y = (a y_{\bar{x}})_x - dy + \varphi, \tag{8}$$

коэффициенты которых определяются при помощи шаблонных функционалов

$$A^h[\mu(s)] \quad (-1 \leqslant s \leqslant 0), \qquad D^h[\mu(s)] \quad (-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5),$$
$$F_h[\mu(s)] \quad (-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5)$$

по формулам

$$a = a(x) = A^h[k(x + sh)], \qquad d = D^h[q(x + sh)], \qquad \varphi = F^h[f(x + sh)],$$

сходятся в классе разрывных коэффициентов *.

На неравномерной сетке мы будем рассматривать также только кон-

* Однородная разностная схема, записанная в безындексной форме, представляет собой, по существу, производящий функционал (см. [1]).

сервативные стандартные схемы (каждый коэффициент которых зависит только от одного коэффициента дифференциального уравнения):

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi. \tag{9}$$

В силу консервативности схемы коэффициент $a(x_i)$ зависит только от значений $k(x)$ на отрезке $[x_i - h_i, x_i]$ сетки ω_N:

$$a_i = A^h[k(x_i + sh_i)] \text{ или } a = A^h[k(x + sh)], \qquad -1 \leqslant s \leqslant 0.$$

Коэффициент d (и φ) определяется значениями функции $q(x)$ $(f(x))$ на отрезке $[x - 0.5h, x + 0.5h_{+1}]$. Поэтому если мы хотим воспользоваться тем же шаблонным функционалом $D^h[\mu(s)]$, что и на равномерной сетке, то при выводе формулы для d нужно поместить центр $s = 0$ шаблона $-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5$ в среднюю точку $\bar{x} = x + \frac{1}{4}(h_{+1} - h)$ отрезка $[x - 0.5h, x + 0.5h_{+1}]$, полагая

$$d = D^h[q(\bar{x} + s\hbar)]. \tag{10}$$

При этом преобразование сдвига имеет вид $x' = \bar{x} + s\hbar = x + (\Delta + s)\hbar$, так что вместо (10) можно написать

$$d = D^h[q(x + (s + \Delta)\hbar)], \qquad \Delta = (h_{+1} - h)/4\hbar \tag{10'}$$

и, аналогично, $\varphi = F^h[f(x + (s + \Delta)\hbar)]$. Индекс h указывает на зависимость шаблонных функционалов от сетки, т. е. в случае неравномерной сетки от двух параметров h, h_{+1}. Если шаблонные функционалы схемы не зависят от сетки, то мы будем их называть, по аналогии с [1], каноническими функционалами и обозначать через $A[\mu]$, $D[\mu]$, $F[\mu]$, а соответствующую схему Λy — канонической схемой. В дальнейшем все изложение проводится для канонических схем (9), у которых

$$a = A[k(x + sh)], \quad d = D[q(x + (s + \Delta)\hbar], \quad \varphi = F[f(x + (s + \Delta)\hbar)].$$

Таким образом, мы будем рассматривать следующее семейство консервативных однородных разностных схем, определенных на неравномерных сетках:

$$\Lambda y \doteq (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi, \tag{11}$$

$$a = A[k(x + sh)] \quad (-1 \leqslant s \leqslant 0), \quad d = D[q(x + (s + \Delta)\hbar],$$
$$\varphi = F[f(x + (s + \Delta)\hbar)] \quad (-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5),$$

где $\Delta = (h_{+1} - h)/4\hbar$. Шаблонные функционалы определены на классе кусочно-непрерывных функций $\mu \in Q^{(0)}$ и удовлетворяют требованиям (см. [1]):

1) $A[\mu(s)]$ — неубывающий ($A[\mu_2] \geqslant A[\mu_1]$ при $\mu_2 \geqslant \mu_1$), нормированный ($A[1] = 1$) однородный функционал первой степени ($A[c\mu] = cA[\mu]$, $c = \text{const} > 0$), имеющий второй дифференциал;

2) $D[\mu(s)]$ и $F[\mu(s)]$—линейные нормированные ($D[1]=1$, $F[1]=1$), неотрицательные функционалы ($D[\mu] \geqslant 0$, $F[\mu] \geqslant 0$ при $\mu \geqslant 0$);

3) выполнены необходимые условия 2-го порядка аппроксимации на равномерных сетках

$$A_1[s] = -0.5, \quad D[s] = F[s] = 0, \tag{12}$$

где $A_1[f] = A_1[1, f]$ — первый дифференциал функционала $A[\mu]$ в точке $\mu = 1$.

Эти условия определяют исходный класс однородных разностных схем (11), для которых в дальнейшем проводятся все исследования

2. Разностные краевые задачи

Исходной задаче (5) ставим в соответствие следующую разностную задачу:

$$\Lambda y = (a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi = 0 \text{ при } x = x_i, \quad 0 < i < N, \quad y(0) = u_1, \; y(1) = u_2. \quad (13)$$

Из условий $k \geqslant c_1 > 0$, $q \geqslant 0$ и свойств шаблонных функционалов следует

$$a \geqslant c_1 > 0, \qquad d \geqslant 0.$$

Чтобы выяснить вопрос о точности решения задачи (13) мы должны оценить сеточную функцию $z = y - u$ при неограниченном дроблении сетки, т. е. при $\|h\|_0 \to 0$. Функция z, очевидно, является решением задачи

$$\bar{\Lambda} z = (a z_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dz = -\psi, \qquad z(0) = 0, \qquad z(1) = 0, \qquad (14)$$

где $\psi = \Lambda u - L^{(k, q, f)} u$ есть погрешность аппроксимации нашей схемы Λu, вычисленной для решения $u = u(x)$ дифференциального уравнения (5).

Для выяснения вопроса о сходимости и точности схемы (13) мы сначала вычислим погрешность аппроксимации ψ, а затем найдем оценку функции z через ψ (априорную оценку).

3. Погрешность аппроксимации на неравномерной сетке

Рассмотрим погрешность аппроксимации

$$\psi = \Lambda u - L^{(k, q, f)} u = [(a u_{\bar{x}})_{\hat{x}} - (ku')'] - (d - q) u + \varphi - f. \qquad (15)$$

Во введении мы указывали, что на неравномерной сетке порядок аппроксимации разностных схем, вообще говоря, понижается. В самом деле, рассмотрим частный случай $k = 1$, $d = q$, $\varphi = f$, так что $\psi = u_{\bar{x}\hat{x}} - u''$. Из формул

$$u^{(+1)} = u + h_{+1} u' + 0.5\, h_{+1}^2 u'' + \tfrac{1}{6} h_{+1}^3 u''' + O(h_{+1}^4),$$
$$u^{(-1)} = u - hu' + 0.5\, h^2 u'' - \tfrac{1}{6} h^3 u''' + O(h^4),$$

$$u_{\bar{x}} = u' - 0.5\, hu'' + \tfrac{1}{6} h^2 u''' + O(h^3), \quad u_{\bar{x}x} = u'' + \frac{h_{+1}^2 - h^2}{6\hbar} u''' + O(h^2) + O(h_{+1}^2)$$

следует, что

$$\psi = \tfrac{1}{3}(h_{+1} - h) u''' + O(h^2) + O(h_{+1}^2),$$

т. е. $\psi = O(h) + O(h_{+1})$ при $h \neq h_{+1}$ и $\psi = O(h^2)$ на равномерной сетке ($h = h_{+1}$).

В [1] было показано, что и в случае равномерной сетки схема, удовлетворяющая необходимым условиям второго порядка аппроксимации (12), имеет лишь первый порядок аппроксимации, если $k(x) \in C^{(1, 1)}$, и тем не менее эта схема имеет второй порядок точности. Понижение порядка ψ

на равномерной сетке может быть связано также с понижением ранга r_A (см. [1]) функционала $A[\mu(s)]$. Если ранг $r_A = 3$ и $k(x) \in C^{(2,1)}[0, 1]$, $q, f \in C^{(1,1)}[0, 1]$, то $\psi = O(h^2)$ на равномерной сетке. В случае неравномерной сетки даже при этих условиях $\psi = O(h) + O(h_{+1})$.

Найдем разложение сеточной функции (15) по степеням h и h_{+1}. Если $q, f \in C^{(1,1)}$, то в силу линейности функционалов D, F можно написать

$$d(x) = D[q(x + (s + \Delta)\hbar)] = q(x) + \hbar q'(x)(D[s] + \Delta) + O(h^2) + O(h_{+1}^2) = q(x) + \tfrac{1}{4}(h_{+1} - h)q'(x) + O(h^2) + O(h_{+1}^2) \quad \left(D[s] = 0, \Delta = \frac{1}{4\hbar}(h_{+1} - h)\right), \tag{16}$$

$$\varphi(x) = F[f(x + (s + \Delta)\hbar)] = f(x) + \tfrac{1}{4}(h_{+1} - h)f'(x) + O(h^2) + O(h_{+1}^2). \tag{17}$$

Лемма 1. *Погрешность аппроксимации любой схемы Λu из исходного класса для $k, q, f \in C^{(1,1)}$ и произвольной неравномерной сетки ω_N можно представить в виде*

$$\psi = \Lambda u - L^{(k,q,f)}u = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \tag{18}$$

где

$$\mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \frac{h^2}{8}qu', \qquad \mu = O(h^2), \quad \psi^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2), \tag{19}$$

$\overline{ku'} = ku'|_{x=\bar{x}}$, $\bar{x} = x - 0.5h$, *а* $u = u(x)$ *есть решение дифференциального уравнения* $L^{(k,q,f)}u = 0$.

Из уравнения $(ku')' = qu - f$ и условий $q, f \in C^{(1,1)}$ следует, что $(ku')'' = (qu - f)' \in C^{(0,1)}$. Поэтому можно написать

$$\overline{ku'} = ku' - 0.5h(ku')' + \frac{h^2}{8}(ku')'' + O(h^3),$$

$$(\overline{ku'})^{(+1)} = ku' + 0.5h_{+1}(ku')' + \tfrac{1}{8}h_{+1}^2(ku')'' + O(h_{+1}^3).$$

Отсюда находим

$$(ku')' = (\overline{ku'})_{\hat{x}} - \frac{1}{8\hbar}(h_{+1}^2 - h^2)(ku')'' + O(h^2) + O(h_{+1}^2) = (\overline{ku'} - \tfrac{1}{8}h^2(ku')'')_{\hat{x}} + O(h^2) + O(h_{+1}^2), \tag{20}$$

так как $(h_{+1}^2 - h^2)(ku')''/8\hbar = \frac{1}{8}(h^2(ku')'')_{\hat{x}} + O(h_{+1}^2)$. Пользуясь (16) и (17), аналогично преобразуем $-(d - q)u + \varphi - f$:

$$(d - q)u = \tfrac{1}{4}(h_{+1} - h)q'u + O(h^2) + O(h_{+1}^2) = \frac{1}{8}\frac{h_{+1}^2 - h^2}{\hbar}q'u + O(h^2) + O(h_{+1}^2) = \tfrac{1}{8}(h^2q'u)_{\hat{x}} + O(h^2) + O(h_{+1}^2), \tag{21}$$

$$\varphi - f = \tfrac{1}{8}(h^2f')_{\hat{x}} + O(h^2) + O(h_{+1}^2). \tag{22}$$

Подставляя (20) — (22) в (15), получим (18), где

$$\mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \tfrac{1}{8}h^2[(ku')'' - q'u + f']. \tag{23}$$

Из дифференциального уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$ находим $(ku')'' - q'u + f' = qu'$. После подстановки этого выражения в (23) формула для μ

принимает вид

$$\mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \tfrac{1}{8} h^2 qu'. \tag{19}$$

Проведенное преобразование справедливо при любых a. Предположим теперь, что A имеет второй дифференциал (второй ранг) и удовлетворяет необходимым условиям второго порядка аппроксимации $A\,[1] = 1$, $A_1\,[s] = -0.5$.

Разлагая $a\,(x)$ по степеням h в окрестности точки $\bar{x} = x - 0.5h$ (см. [1])

$$a\,(x) = A\,[k\,(\bar{x} + (s + 0.5)\,h)] = k\,(\bar{x}) + hA_1\,[s + 0.5]\,k'\,(\bar{x}) +$$
$$+ O\,(h^2) = k\,(\bar{x}) + O\,(h^2)$$

и замечая, что $u_{\bar{x}} = u'\,(\bar{x}) + O\,(h^2)$, находим

$$au_{\bar{x}} - \overline{ku'} = (\bar{k} - O\,(h^2))\,(\bar{u}' + O\,(h^2)) - \overline{ku'} = O\,(h^2), \quad \text{т. е.} \quad \mu = O(h^2).$$

Если $A\,[\bar{k}\,(s)]$ имеет третий ранг и $k\,(x) \in C^{(2,\,1)}$, где $m > 1$, то

$$a\,(x) = \bar{k} + h^2 \left\{ \frac{\bar{k}''}{2} (A_1\,[s^2] - \tfrac{1}{4}) + \frac{(\bar{k}')^2}{\bar{k}} A_2\,[s] \right\} + O\,(h^3),$$

$$u_{\bar{x}} = \bar{u}' + \frac{h^2}{24} \bar{u}''' + O(h^3),$$

$$\mu = (\alpha_2 u' + \tfrac{1}{24} \overline{ku'''} + \tfrac{1}{8} qu')\,h^2 + O\,(h^3) = \mu_1\,(\bar{x})\,h^2 + O\,(h^3),$$

где

$$\alpha_2 = \frac{\bar{k}''}{2} (A_1\,[s^2] - \tfrac{1}{4}) + \frac{(\bar{k}')^2}{\bar{k}} A_2\,[s].$$

Отсюда следует, что

$$\psi = (h_{+1} - h)\,\mu_1\,(x) + O\,(h^2) + O\,(h_{+1}^2),$$

т. е. схема всегда имеет первый порядок аппроксимации, если сетка ω_N произвольна. При специальном выборе сетки, когда выполнено условие $h_{+1} - h = O\,(h^2)$, получаем $\psi = O\,(h^2)$.

4. Разностная функция Грина

Перейдем теперь к оценке решения задачи

$$\bar{\Lambda} z = (az_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dz = -\psi, \qquad z\,(0) = 0, \qquad z\,(1) = 0, \tag{14}$$
$$0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_1', \quad 0 \leqslant d \leqslant c_2.$$

Нас будет интересовать случай, когда $\psi\,(x)$ имеет вид

$$\psi\,(x) = \mu_{\hat{x}} + \psi^*\,(x).$$

Для построения априорных оценок решения задачи (14), по аналогии с [1], используется разностная функция Грина.

Будем пользоваться следующими обозначениями для сумм и норм (см. [4]):

$$(y,\,v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_i, \qquad (y,\,v)^+ = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_{i+1}, \qquad (y,\,v)^* = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i \hbar_i,$$

$$(y,\,v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h_i, \qquad \|y\|_0 = \max_i |y_i|,$$

$$\|y\|_\sigma = (1, |y|^\sigma)^{1/\sigma} \text{ или } \|y\|_\sigma = (1, |y|^\sigma)^{+1/\sigma}, \|y_{\bar{x}}\|_\sigma = (1, |y_{\bar{x}}|^\sigma]^{1/\sigma}, \sigma = 1,2,$$

где $y = y(x)$, $v = v(x)$ — произвольные сеточные функции.

Приведем некоторые простейшие формулы (см. [4]):

1) формула суммирования по частям:

$$(y, v_{\hat{x}})^* = (y, v_x)^+ = -(v, y_{\bar{x}}) + y^{(-1)} v|_{x=1} - yv^{(+1)}|_{x=0} = \\ = -(v, y_{\bar{x}}] + yv|_{x=1} - yv^{(+1)}|_{x=0}; \tag{24}$$

2) первая разностная формула Грина:

$$(y, (av_{\bar{x}})_{\hat{x}})^* = (y, (av_{\bar{x}})_x)^+ = -(a, y_{\bar{x}} v_{\bar{x}}] + ayv_{\bar{x}}|_{x=1} - a^{(+1)} yv_x|_{x=0}; \tag{25}$$

3) вторая разностная формула Грина:

$$(y, (av_{\bar{x}})_{\hat{x}})^* = (v, (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}})^* + a(yv_{\bar{x}} - vy_{\bar{x}})|_{x=1} - a^{(+1)}(yv_x - vy_x)|_{x=0} \tag{26}$$

или

$$(y, \bar{\Lambda} v)^* = (v, \bar{\Lambda} y)^* + a(yv_{\bar{x}} - vy_{\bar{x}})|_{x=1} - a^{(+1)}(yv_x - vy_x)|_{x=0}. \tag{26'}$$

Введем разностную функцию Грина $G(x, \xi)$ задачи (14) при помощи условий

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Lambda} G = (a(x) G_{\bar{x}}(x, \xi))_{\hat{x}} - d(x) G(x, \xi) = -\frac{\delta(x, \xi)}{h}, \\ G(0, \xi) = 0, \qquad G(1, \xi) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где $\delta(x, \xi) = 1$ при $x = \xi$, $\delta(x, \xi) = 0$ при $x \neq \xi$ (зависимость $G(x, \xi)$ от сетки явно не указывается). Полученное в [1] выражение

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \alpha(x)\beta(\xi)/\alpha(1) & \text{при } x \leqslant \xi, \\ \alpha(\xi)\beta(x)/\alpha(1) & \text{при } x \geqslant \xi \end{cases} \tag{28}$$

сохраняет силу и в случае неравномерной сетки, если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определить как решения следующих задач с начальными условиями:

$$\bar{\Lambda}\alpha = (a\alpha_{\bar{x}})_{\hat{x}} - d\alpha = 0, \qquad \alpha(0) = 0, \qquad a^{(+1)}\alpha_x|_{x=0} = 1, \tag{29}$$

$$\bar{\Lambda}\beta = (a\beta_{\bar{x}})_{\hat{x}} - d\beta = 0, \qquad \beta(1) = 0, \qquad a\beta_{\bar{x}}|_{x=1} = -1. \tag{30}$$

Полагая во второй формуле Грина $y = \alpha$, $v = \beta$, находим

$$\alpha(1) = \beta(0), \qquad a(\beta\alpha_{\bar{x}} - \alpha\beta_{\bar{x}}) = \alpha(1) \quad \text{при } 0 < x \leqslant 1.$$

Из формулы (28) видно, что функция Грина симметрична:

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Положим в (26′) $y(x) = G(x, \xi)$, $v(x) = z(x)$, где $z(x)$ — решение задачи (14). Обе функции удовлетворяют однородным граничным условиям, поэтому подстановки при $x = 0$ и $x = 1$ равны нулю. Учитывая уравнения (29), (30) и симметрию функции Грина, после замены x на ξ и ξ на x получим формулу

$$z(x) = (G(x, \xi), \psi(\xi))^* \text{ или } z = (G, \psi)^*, \tag{31}$$

которая будет использована ниже для вывода априорных оценок решения задачи (14). Для этого нам понадобятся оценки функции Грина $G(x, \xi)$ и ее разностных производных $G_{\bar{x}}$, $G_{\bar{\xi}}$, $G_{\bar{x}\bar{\xi}}$.

Лемма 2. *Для разностной функции Грина $G(x, \xi)$ задачи* (14) *и ее разностных производных $G_{\bar{x}}$, $G_{\bar{\xi}}$ справедливы оценки*

$$0 \leqslant G(x, \xi) \leqslant M_1, \qquad |G_{\bar{x}}(x, \xi)| \leqslant M_2, \qquad |G_{\bar{\xi}}(x, \xi)| \leqslant M_2, \tag{32}$$

$$|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)| \leqslant M_3' \text{ при } \xi \neq x, \quad |hG_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x)| \leqslant M_3'', \ (|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)|, 1) \leqslant M_3, \tag{33}$$

где $M_1 = 1/c_1$, $M_2 = (c_1^{\circ} + c_2)/c_1^2$, $M_3' = (c_1' + c_2)(1 + c_2c_3')/c_1^2$, $c_3' = \operatorname{sh}\sqrt{c_2/c_1}/\sqrt{c_1c_2}$, $M_3'' = (1 + c_1' + c_2)/c_1$, $M_3 = M_3' + M_3''$.

Доказательство. Оценки (32) получены в [1] для равномерной сетки. Пусть G^0 — функция Грина задачи (14) при $d = 0$. В этом случае

$$\alpha_i = \alpha_i^0 = \sum_{k=1}^{i} (h_k/a_k) \leqslant \frac{1}{c_1}, \quad \beta_i = \beta_i^0 = \sum_{k=i+1}^{N} (h_k/a_k) \leqslant \frac{1}{c_1}$$

и из (28) следует, что $G^0 \leqslant 1/c_1$, $|G_{\bar{\xi}}^0| \leqslant 1/c_1$, $|G_{\bar{x}}^0| \leqslant 1/c_1$, так как $\alpha^0(x) \leqslant \alpha^0(1) \leqslant 1/c_1$, $\beta^0(x) \leqslant \beta^0(0) \leqslant 1/c_1$. Пользуясь затем неравенством $G \leqslant G^0$, а также формулами $G(x, \xi) = G^0(x, \xi) - (G^0(x, s), d(s)\, G(s, \xi))^*$, $G_{\bar{x}} = G_{\bar{x}}^0 - (G_{\bar{x}}^0, dG)^*$, получаем (32). Для оценки $G_{\bar{x}\bar{\xi}}$ используется формула (28), а также оценки (см. [1]): $0 < \alpha(x) \leqslant \alpha(1)$ при $0 < x \leqslant 1$, $0 < \beta(x) \leqslant \beta(0) = \alpha(1)$ при $0 \leqslant x < 1$, $1/c_1' \leqslant \alpha(1) \leqslant c_3' = \operatorname{sh}\sqrt{c_2/c_1}/\sqrt{c_1c_2}$, $\alpha_{\bar{x}}(x)/\alpha(1) \leqslant (c_1' + c_2)/c_1$. Вычисления дают:

$$G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi) = \begin{cases} \alpha_{\bar{x}}(x)\,\beta_{\bar{\xi}}(\xi)/\alpha(1) & \text{при } x < \xi, \\ \alpha_{\bar{\xi}}(\xi)\,\beta_{\bar{x}}(x)/\alpha(1) & \text{при } x > \xi, \end{cases} \quad G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x) = \frac{1}{a(x)h(x)} + \frac{\alpha(x)\beta_{\bar{x}}(x)}{\alpha(1)},$$

$$|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)| \leqslant (c_1' + c_2)(1 + c_2c_3')/c_1^2 = M_3', \quad x \neq \xi,$$

$$h\,|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x)| \leqslant (1 + h(c_1' + c_2))/c_1 \leqslant (1 + c_1' + c_2)/c_1 = M_3'',$$

$$(|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)|, 1) \leqslant M_3' + M_3'' = M_3.$$

Лемма доказана.

5. Априорные оценки

Лемма 3. *Если $\psi(x)$ имеет вид*

$$\psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \tag{18}$$

то для решения задачи (14) *справедливы оценки*

$$\|z\|_0 \leqslant M_2(\|\mu\|_1 + \|\psi^*\|_3), \tag{34}$$

$$\|z\|_0 \leqslant M_1\|\psi^*\|_1 + M_2\|\mu\|_1, \tag{34'}$$

где

$$\|\psi^*\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \sum_{k=i}^{N-1} \psi_k^* \hbar_k, \qquad \|\mu\|_1 = (1, |\mu|) = \sum_{i=1}^{N} |\mu_i|\, h_i.$$

Пользуясь формулой (31), находим

$$z = (G, \mu_{\bar{\xi}})^* + (G, \psi^*)^*. \tag{35}$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. В силу (24) и (27) можно написать $(G, \mu_{\hat{\xi}})^* = (G, \mu_{\xi})^+ = -(G_{\bar{\xi}}, \mu]$, так как подстановки при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ обращаются в нуль.

Учитывая затем (32), находим

$$|(G, \mu_{\hat{\xi}})^*| \leqslant M_2 (1, |\mu|] = M_2 \|\mu\|_1. \tag{36}$$

Вводя функцию $\eta(x)$ при помощи условий

$$\eta_{\hat{x}} = \psi^*, \qquad \eta_N = \eta(1) = 0,$$

найдем $(G, \psi^*)^* = (G, \eta_{\xi})^+ = -(G_{\bar{\xi}}(x, \xi), \eta(\xi))$ и, следовательно,

$$|(G, \psi^*)^*| \leqslant M_2 (1, |\eta|) \leqslant M_2 \|\eta\|_1 = M_2 \|\psi^*\|_3, \tag{37}$$

где $\eta(x) = \eta_i = -\sum_{k=i}^{N-1} \psi_k^* \hbar_k$. Из (35), (37) непосредственно следует оценка (34).

Лемма 4. *Если* $\psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*$, *то для разностной производной* $z_{\bar{x}}$ *решения задачи* (14) *справедливы оценки*

$$\|z_{\bar{x}}\|_0 \leqslant M_3 \|\mu\|_0 + M_2 \|\psi^*\|_1, \tag{38}$$

$$\|z_{\bar{x}}\|_1 \leqslant M_3 (\|\mu\|_1 + \|\psi^*\|_3), \qquad \|z_{\bar{x}}\|_2 \leqslant M_3 (\|\mu\|_2 + \|\eta\|_2). \tag{39}$$

Учитывая полученное выше выражение $z = -(G_{\bar{\xi}}(x, \xi), \mu(\xi)] + (G, \psi^*)^*$, найдем

$$z_{\bar{x}} = -(G_{\bar{x}\xi}, \mu] + (G_{\bar{x}}, \psi^*)^* = -(G_{\bar{x}\bar{\xi}}, \tilde{\mu}] = -(G_{\bar{x}\bar{\xi}}, \tilde{\mu}]' - hG_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x)\tilde{\mu}(x),$$

где $\tilde{\mu} = \mu + \eta$, а штрих означает, что суммирование ведется по всем $\xi \neq x$. Пользуясь теперь оценками (33), получим

$$\begin{gathered} |z_{\bar{x}}(x)| \leqslant M_3' \|\mu\|_1 + M_3'' |\mu(x)| + M_2 \|\psi^*\|_1, \\ |z_{\bar{x}}(x)| \leqslant M_3' (\|\mu\|_1 + \|\eta\|_1) + M_3'' (|\mu(x)| + |\eta(x)|), \\ \|z_{\bar{x}}\|_0 \leqslant M_3' \|\mu\|_1 + M_3'' \|\mu\|_0 + M_2 \|\psi^*\|_1 \leqslant M_3 \|\mu\|_0 + M_2 \|\psi^*\|_1, \end{gathered} \tag{40}$$

так как $\|\mu\|_1 \leqslant \|\mu\|_0$. Вторая оценка (39) сразу следует из (40), если учесть, что $(1, |\mu|] = \|\mu\|_1$, $(1, |\eta|] = (1, |\eta|) = \|\psi^*\|_3$.

Лемма 5. *Пусть* $z = z(x)$ — *решение задачи* (14), *причем* $\psi(x)$ *имеет вид*

$$\psi(x) = \mu_{\hat{x}} + \psi^*(x)$$

во всех точках сетки ω_N, *кроме точек* $x = x_n$ *и* $x = x_{n+1}$. *Тогда для* $z = z(x)$ *выполняется неравенство*

$$\|z\|_0 \leqslant M_2 \|\mu\|_1' + M_1 (|\mu_n| + |\mu_{n+2}|) + M_1 (\|\psi^*\|_1'' + |\hbar_n \psi_n + \hbar_{n+1} \psi_{n+1}|) + \\ + M_2 h_{n+1} \hbar_n |\psi_n|, \tag{41}$$

где

$$M_1 = 1/c_1, \qquad M_2 = (c_1 + c_2)/c_1^2,$$

$$\|\mu\|_1' = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| h_i + \sum_{i=n+2}^{N} |\mu_i| h_i,$$

$$\|\psi^*\|_1'' = \sum_{i=1}^{n-1} |\psi_i^*| \hbar_i + \sum_{i=n+2}^{N-1} |\psi_i^*| \hbar_i$$

Пользуясь формулой (31), представим $z(x)$ в виде

$$z(x) = (G(x, \xi), \psi(\xi))^* = (G(x, \xi), \mu_{\hat{\xi}}(\xi) + \psi^*(\xi))^{*''} + \bar{z}(x),$$

где $\bar{z}(x) = G(x, x_n)\psi_n\hbar_n + G(x, x_{n+1})\psi_{n+1}\hbar_{n+1}$, а $(G, \mu_{\hat{\xi}} + \psi^*)^{*''}$ означает сумму по $\xi = x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}, \ldots, x_{N-1}$ $(\xi \neq x_n, x_{n+1})$. Преобразуем сначала $\bar{z}(x)$:

$$\bar{z}(x) = G(x, x_{n+1})(\hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1}) - G_{\bar{\xi}}(x, x_{n+1})\, h_{n+1}\hbar_n\psi_n,$$

и воспользуемся леммой 2; тогда получим оценку

$$\|\bar{z}\|_0 \leqslant M_1 |\hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1}| + M_2 h_{n+1}\hbar_n |\psi_n|. \tag{42}$$

Формула суммирования по частям (24) дает

$$(G, \mu_{\hat{\xi}})^{*''} = -\sum_{k=1}^{n} G_{\bar{\xi}}(x, x_k)\mu_k h_k - \sum_{k=n+2}^{N} G_{\bar{\xi}}(x, x_k)\mu_k h_k + G(x, x_n)\mu_n - \\ - G(x, x_{n+1})\mu_{n+2},$$

так что

$$|(G, \mu_{\hat{\xi}})^{*''}| \leqslant M_2\|\mu\|_1'' + M_1(|\mu_n| + |\mu_{n+2}|). \tag{43}$$

Учитывая (42), (43), а также неравенство $|(G, \psi^*)^{*''}| \leqslant M_1\|\psi^*\|_1''$, приходим к оценке (41).

Лемма 5 используется при оценке порядка точности в классе разрывных коэффициентов (см. § 2, п. 3).

Аналогичные априорные оценки получаются и для третьей краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\Lambda}z = (a z_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dz = -\psi, \\ &l_1 z = a^{(+1)} z_x - \sigma_1 z = -\nu_1 \text{ при } x = 0, \qquad l_2 z = a z_{\bar{x}} + \sigma_2 z = \nu_2 \text{ при } x = 1, \\ &0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_1', \ 0 \leqslant d \leqslant c_2, \ \sigma_1 \geqslant 0, \ \sigma_2 \geqslant 0, \ \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant c_3 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

В этом случае функция Грина задачи (44), определяемая как решение уравнения (14), удовлетворяющее краевым условиям $l_1 G = 0$, $l_2 G = 0$, имеет вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \alpha(x)\beta(\xi)/\Delta & \text{при } x \leqslant \xi, \\ \alpha(\xi)\beta(x)/\Delta & \text{при } x \geqslant \xi. \end{cases} \tag{45}$$

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определяются условиями

$$\bar{\Lambda}\alpha = 0, \quad a^{(+1)}\alpha_x = 1, \ l_1\alpha = 0 \text{ при } x = 0,$$
$$\bar{\Lambda}\beta = 0, \quad a\beta_{\bar{x}} = -1, \quad l_2\beta = 0 \text{ при } x = 1.$$

Выражение для $\Delta = a(\beta\alpha_{\bar{x}} - \alpha\beta_{\bar{x}})$ находится при помощи формулы Грина (26′) (см. [4]):

$$\Delta = \alpha(1) + \frac{1}{\sigma_2}(1 + (d, \beta)^*) = \beta(0) + \frac{1}{\sigma_1}(1 + (d, \alpha)^*),$$

причем $\alpha(x) > 0$, $\beta(x) > 0$. Если, например, $\sigma_1 = 0$, то $\alpha(x)$ определим из условий $\alpha(0) = 1$, $\alpha_x(0) = 0$. В этом случае

$$\Delta = 1 + (\alpha, \beta)^* = \alpha(1) + \frac{1}{\sigma_2}(1 + (d, \alpha)^*).$$

Решение задачи (44) можно представить в виде

$$z(x) = (G(x, \xi), \psi(\xi))^* + G(x, 0)\nu_1 + G(x, 1)\nu_2.$$

Для функции Грина G и ее разностных производных справедливы оценки

$$0 < G \leqslant M_1, \qquad |G_{\bar{x}}| \leqslant M_2, \qquad |G_{\bar{\xi}}| \leqslant M_2,$$

$$|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)| \leqslant M_3' \text{ при } x \neq \xi, \ |hG_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x)| \leqslant M_3'', \qquad (|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)|, 1] \leqslant M_3 = M_3' + M_3'',$$

где M_1, M_2, M_3', M_3'' — положительные постоянные, зависящие от c_1, c_2, c_3 и c_1'. Лемма 3 обобщается на случай третьей краевой задачи (44).

Лемма 6. *Если* $\psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*$, *то для решения задачи* (44) *справедливы априорные оценки*

$$\|z\|_0 \leqslant M_2(\|\mu\|_1 + \|\psi^*\|_4) + M_1(|\nu_1| + |\nu_2| + |\mu(x_1)| + |\mu(1)|), \tag{46}$$

где

$$\|\psi^*\|_4 = \|\psi^*|_3 + |(\psi^*, 1)^*|, \qquad \|\psi^*\|_3 = \|\eta\|_1, \qquad \eta_i = \sum_{k=i}^{N-1} \psi_k^* h_k.$$

Доказательство этой леммы проводится по аналогии с доказательством леммы 3. Аналогично обобщаются на случай третьей краевой задачи леммы 4 и 5.

§ 2. О точности однородных разностных схем на неравномерных сетках

1. О точности в классе гладких коэффициентов

Используя представление (18) для $\psi(x)$ (лемма 1), а также лемму 2, нетрудно убедиться в том, что справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi$ — *любая однородная схема из исходного семейства. Если* $k, q, f \in C^{(1,1)}[0, 1]$, *то схема* Λy *имеет второй порядок точности на любой последовательности неравномерных сеток, точнее,*

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\bar{h}^2, \tag{47}$$

где y — *решение разностной задачи* (13), $u = u(x)$ — *решение задачи* (5), M — *постоянная, не зависящая от сетки,*

$$\bar{h} = \|h\|_2 = (1, h^2]^{1/2} \tag{48}$$

есть средний квадратичный шаг сетки.

Для доказательства теоремы надо оценить разность $z = y - u$, которая определяется из условий (14):

$$(az_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dz = -\psi, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad 0 < c_1 \leqslant a, \quad 0 \leqslant d \leqslant c_2.$$

В силу леммы 1

$$\psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \text{ где } \mu = O(h^2), \qquad \psi^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2). \tag{18}$$

Воспользуемся теперь оценкой (34) леммы 3:

$$\| z_0 \| \leqslant M_2 (\| \mu \|_1 + \| \psi^* \|_3).$$

Учитывая затем, что $\| \mu \|_1 = O(h^2)$, $\| \psi^* \|_3 \leqslant \| \psi^* \|_1 = O(\overline{h}^2)$, получим $\| z \|_0 \leqslant M\overline{h}^2$.

Для практических целей часто оказывается важной не только точность, с которой определяется решение задачи (5), но и точность определения потока ku', разностное выражение которого имеет вид $ay_{\bar{x}}$. Найдем теперь оценку для порядка точности, с которой определяется поток на неравномерной сетке при помощи рассматриваемых однородных разностных схем. Нас будет интересовать погрешность

$$v = ay_{\bar{x}} - \overline{ku'} = az_{\bar{x}} + \mu^*,$$

где $\mu^* = au_{\bar{x}} - \overline{ku'}$ — погрешность аппроксимации потока. Отсюда видно, что

$$\| v \|_0 \leqslant \| a \|_0 \| z_{\bar{x}} \|_0 + \| \mu^* \|_0, \qquad \| v \|_1 \leqslant \| a \|_0 \| z_{\bar{x}} \|_1 + \| \mu^* \|_1,$$

т. е. оценка v сводится к оценке $\| z_{\bar{x}} \|$, так как, в силу леммы 1, $\mu^* = O(h^2)$ и, следовательно,

$$\| \mu^* \|_0 \leqslant M \| h \|_0^2, \qquad \| \mu^* \|_1 \leqslant M\overline{h}^2,$$

где $\overline{h} = \| h \|_2$. В силу леммы 4

$$\| z_{\bar{x}} \|_0 \leqslant M_3 (\| \mu \|_0 + \| \psi^* \|_1) \leqslant M \| h \|_0^2,$$

$$\| z_{\bar{x}} \|_1 \leqslant M_3 (\| \mu \|_1 + \| \psi^* \|_3) \leqslant M \| h \|_2^2, \qquad \| z_{\bar{x}} \|_2 \leqslant M \| h \|_2^2. \tag{49}$$

В результате мы получаем для потока следующие оценки:

$$\| ay_{\bar{x}} - \overline{ku'} \|_0 \leqslant M \| h \|_0^2, \tag{50}$$

$$\| ay_{\bar{x}} - \overline{ku'} \|_1 \leqslant M \| h \|_2^2. \tag{51}$$

Из неравенства (50) видно, что схема (13) дает второй порядок точности и для потока, однако равномерная оценка для ошибки в определении потока содержит максимальное значение шага сетки, т. е. $\| h \|_0$, а не $\| h \|_2 = \overline{h}$, как это имеет место для ошибки в определении самой функции. Поэтому хорошую точность для потока можно получить не на любой последовательности неравномерных сеток. Для определения же решения пригодны любые сетки, у которых средний квадратичный шаг $\overline{h} = \| h \|_2$ достаточно мал. Иногда требуется высокая точность для потока лишь в отдельных фиксированных точках (например, на границах областей с различными физическими параметрами). В этом случае оценки для потоков могут быть уточнены. Опуская рассуждения, основанные на использовании лемм 1, 2 и 4, а также оценки (33), приведем лишь оценку для $| z_{\bar{x}} |$ в некоторой фиксированной точке $x^* = x_{i_0}$ сетки:

$$| (ay_{\bar{x}} - \overline{ku'})_{i_0} | \leqslant M h_{i_0}^2 + M\overline{h}^2. \tag{52}$$

Выбирая сетку так, чтобы точка x^* была узловой точкой сетки ($x^* = x_{i_0}$), а $h_{i_0} = O(\bar{h})$, получим $|v(x^*)| \leqslant M\bar{h}^2$, где $v = ay_{\bar{x}} - \overline{ku}'$.

2. Третья краевая задача

Рассмотрим теперь третью краевую задачу

$$\left.\begin{array}{c} L^{(k,q,f)}u = (ku')' - qu + f = 0, \quad 0 < x < 1, \\ k(0)\,u'(0) - \sigma_1 u(0) = u_1, \quad k(1)\,u'(1) + \sigma_2 u(1) = u_2, \\ k(x) \geqslant c_1 > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad \sigma_1 \geqslant 0, \quad \sigma_2 \geqslant 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant c_3 > 0. \end{array}\right\} \quad (53)$$

Соответствующая разностная задача ставится так:

$$\left.\begin{array}{c} \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy + \varphi = 0, \quad 0 < x_i < 1, \\ a^{(+1)}y_x - \bar{\sigma}_1 y = \bar{u}_1 \text{ при } x = 0, \quad ay_{\bar{x}} + \bar{\sigma}_2 y = \bar{u}_2 \text{ при } x = 1, \\ \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + 0.5h_1 q(0), \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 + 0.5h_N q(1), \\ \bar{u}_1 = u_1 + 0.5h_1 f(0), \quad \bar{u}_2 = u_2 + 0.5h_N f(1). \end{array}\right\} \quad (54)$$

Разностные краевые условия (54) имеют второй порядок аппроксимации

$$\nu_1 = a^{(+1)}u_x - k(0)\,u'(0) + 0.5h_1\,(q(0)\,u(0) - f(0)) = O(h_1^2),$$
$$\nu_2 = au_{\bar{x}} - k(1)\,u'(1) - 0.5h_N\,(q(1)\,u(1) - f(1)) = O(h_N^2)$$

на решении $u = u(x)$ дифференциального уравнения.

Пусть $u(x)$ — решение задачи (53), а y — решение задачи (54). Тогда для их разности $z = y - u$ получим условия

$$\left.\begin{array}{c} (az_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dz = -\psi, \\ a^{(+1)}z_y - \bar{\sigma}_1 z = -\nu_1 \text{ при } x = 0, \quad az_{\bar{x}} + \bar{\sigma}_2 z = \nu_2 \text{ при } x = 1. \end{array}\right\} \quad (55)$$

Здесь $\psi = \Lambda u - L^{(k,q,f)}u$ — погрешность аппроксимации схемы Λu, вычисленная в п. 4 § 1, а ν_1 и ν_2 — погрешности аппроксимации краевых условий. Для оценки z следует воспользоваться леммами 1 и 6. Повторяя затем рассуждения, проведенные в п. 1 при доказательстве теоремы 1, убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то разностная задача* (54) *имеет второй порядок точности на любой последовательности сеток, точнее,*

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\|h\|_{\bar{2}}^2, \quad (56)$$

где

$$\|h\|_{\bar{2}} = \|h\|_2 + h_1 + h_N.$$

В этом случае в оценку для погрешности $z = y - u$ входят не только средний квадратичный шаг сетки $\bar{h} = \|h\|_2$, но и шаги h_1 и h_N вблизи границы. Отсюда следует, что для решения третьей краевой задачи (54) справедлива оценка

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\|h\|_{\bar{2}}^2 = M\bar{h}^2, \quad (57)$$

если $h_1 = O(\bar{h})$, $h_N = O(\bar{h})$, т. е. порядок малости h_1 и h_N не ниже, чем $\bar{h}$ (для первой краевой задачи оценка (57) верна, если даже $h_1 = O(\bar{h}^{3/3})$, $h_N = O(\bar{h}^{2/3})$).

3. Погрешность аппроксимации в окрестности точки разрыва коэффициентов

Вычислим погрешность аппроксимации

$$\psi = \Lambda u - L^{(k,q,f)}u$$

на неравномерной сетке в окрестности точки разрыва коэффициентов k, q, f дифференциального уравнения. Будем предполагать, что k, q, $f \in Q^{(1,1)}$. Пусть $\xi = x_n + \theta h_{n+1}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1,\ h_{n+1} = x_{n+1} - x_n)$ — точка интервала $0 < x < 1$, в которой коэффициент $k(x)$ (а также $q(x)$ и $f(x)$) имеет разрыв I рода. Обозначим через $k_л = k(\xi - 0)$, $k_п = k(\xi + 0)$ предельные значения $k(x)$ слева и справа в точке $x = \xi$. В этой точке решение $u = u(x)$ дифференциального уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$ удовлетворяет условиям сопряжения

$$[u] = 0, \qquad [ku'] = (ku')_п - (ku')_л = 0.$$

Будем предполагать для упрощения записи, что имеется только одна точка $x = \xi$, в которой разрывны k, q, f. Так как схема трехточечная, то во всех точках сетки, кроме $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$, функцию $\psi(x)$ можно, согласно лемме 2, представить в виде

$$\psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \qquad \mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \tfrac{1}{8}h^2 qu' \quad \text{при } x \neq x_n,\ x \neq x_{n+1},$$
$$\mu = O(h^2), \qquad \psi^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2). \tag{58}$$

Вычислим $\psi(x)$ при $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$. Представим ψ в виде суммы $\psi = \psi_a + \psi_d$, где $\psi_a = (au_{\bar{x}})_{\hat{x}} - (ku')'$, $\psi_d = -(d - q)u + \varphi - f$. Разлагая $k(x)$ и $u(x)$ в окрестности точки $x = \xi$, находим

$$a_n = a(x_n) = k_л - (0.5h_n + \theta h_{n+1})k'_л + O(h_n^2) + O(h_{n+1}^2),$$
$$a_{n+2} = k_п + (0.5h_{n+2} + (1-\theta)h_{n+1})k'_п + O(h_{n+1}^2) + O(h_{n+2}^2),$$
$$u_{\bar{x},n} = u'_л - (0.5h_n + \theta h_{n+1})u''_л + 0.5(0.5h_n + \theta h_{n+1})^2 u'''_л + O(h_n^3) + O(h_{n+1}^3),$$
$$u_{x,n} = u'_п + (0.5h_{n+2} + (1-\theta)h_{n+1})u''_п + 0.5(0.5h_{n+2} + (1-\theta)h_{n+1})^2 u'''_п + O(h_{n+1}^3) + O(h_{n+2}^3),$$
$$u_{\bar{x},n+1} = u_{x,n} = \theta u'_л + (1-\theta)u'_п + O(h_n) + O(h_{n+1}) = w\left(\frac{\theta}{k_л} + \frac{1-\theta}{k_п}\right) + O(h_n) + O(h_{n+1}), \qquad w = k_л u'_л = k_п u'_п.$$

Пользуясь этими выражениями, получим

$$\hbar_n \psi_{a,n} = \hbar_n \psi_a(x_n) = w\left[a_{n+1}\left(\frac{\theta}{k_л} + \frac{1-\theta}{k_п}\right) - 1\right] + a_{n+1}\frac{h_{n+1}}{2} \times$$
$$\times [(1-\theta)^2 u''_п - \theta^2 u''_л] - (0.5 - \theta)h_{n+1}(ku')'_л + O(h_n^2) + O(h_{n+1}^2), \tag{59}$$
$$\hbar_n \psi_{a,n} + \hbar_{n+1}\psi_{a,n+1} = (0.5 - \theta)[(ku')'_п - (ku')'_л] + O(h_n^2) + O(h_{n+1}^2) + O(h_{n+2}^2).$$

Рассмотрим теперь слагаемое

$$\psi_d = -(d - q)u + \varphi - f.$$

Если $D[\bar{q}(s)]$, $F[\bar{f}(s)]$ — произвольные функционалы из определенного

в § 1, п. 1, семейства, то

$$\psi_{d,n} = O(1), \qquad \psi_{d,n+1} = O(1).$$

Таким образом, для произвольной схемы из исходного семейства должны выполняться условия

$$\left.\begin{aligned} &\hbar_n\psi_n = O(1), \qquad \hbar_{n+1}\psi_{n+1} = O(1), \\ &\hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1} = O(h_n) + O(h_{n+1}) + O(h_{n+2}), \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

аналогичные условиям, которые были получены в [1] для равномерной сетки.

Особую роль в нашей работе будет играть схема с шаблонными функционалами

$$A[\bar{k}(s)] = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{\bar{k}(s)}\right]^{-1}, \qquad D[\bar{f}(s)] = F[\bar{f}(s)] = \int_{-0.5}^{0.5} \bar{f}(s)\,ds, \tag{61}$$

для которой

$$a_i = \left[\frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}, \qquad d_i = \frac{1}{\hbar_i}\int_{x_i-0.5h_i}^{x_i+0.5h_{i-1}} q(x)\,dx, \qquad \varphi_i = \frac{1}{\hbar_i}\int_{x_i-0.5h_i}^{x_i+0.5h_{i+1}} f(x)\,dx.$$

В этом случае вычисления дают:

$$a_{n+1} = \left(\frac{\theta}{k_л} + \frac{1-\theta}{k_п}\right)^{-1} + O(h_{n+1}),$$

$$\hbar_n(d_n - q_n)\,u_n = (0.5-\theta)(q_п - q_л)\,u(\xi) + O(h_n) + O(h_{n+1}),$$

$$\hbar_{n+1}(d_{n+1} - q_{n+1})\,u_{n+1} = O(h_{n+1}^3) + O(h_{n+2}^3) \quad \text{при } \theta < 0.5,$$

$$\hbar_n(d_n - q_n)\,u_n = O(h_n^3) + O(h_{n+1}^3), \qquad \hbar_{n+1}(d_{n+1} - q_{n+1})\,u_{n+1} =$$
$$= (0.5-\theta)(q_п - q_л)\,u(\xi) + O(h_{n+1}) + O(h_{n+2}) \quad \text{при } \theta > 0.5.$$

Аналогичные выражения получаются для $\hbar_n(\varphi_n - f_n)$, $\hbar_{n+1}(\varphi_{n+1} - f_{n+1})$. Отсюда и из (59) следует, что

$$\hbar_n\psi_n = O(h_n) + O(h_{n+1}), \qquad \hbar_{n+1}\psi_{n+1} = O(h_{n+1}) + O(h_{n+2}). \tag{62}$$

Вместо (60) получим

$$\hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1} = (0.5-\theta)\,h_{n+1}\,[(L^{(k,q,f)}u)_п - (L^{(k,q,f)}u)_л] + O(h_n^2) +$$
$$+ O(h_{n+1}^2) + O(h_{n+2}^2),$$

т. е.

$$\hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1} = O(h_n^2) + O(h_{n+1}^2) + O(h_{n+2}^2). \tag{62'}$$

4. О точности в классе разрывных коэффициентов

Перейдем теперь к выяснению порядка точности наших однородных разностных схем в классе разрывных коэффициентов на произвольной последовательности неравномерных сеток ω_N. Будем предполагать, что $k(x), q(x), f(x) \in Q^{(1,1)}[0, 1]$. Достаточно рассмотреть случай одного разрыва в точке $\xi = x_n + \theta h_{n+1}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. В силу п. 3 § 2 и леммы 1, имеем

$$\psi = \mu_{\hat{x}} + \psi^*, \qquad \psi^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2) \quad \text{при } x \neq x_n,\ x \neq x_{n+1},$$

$$\mu = au_{\bar{x}} - \overline{ku'} + \frac{h^2}{8}qu' = O(h^2) \quad \text{при } x \neq x_{n+1}.$$

Лемма 5 дает:

$$\|z\|_0 \leqslant M(\bar{h}^2 + h_n^2 + h_{n+2}^2) + M_1 |\hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1}| + M_2 h_{n+1}\hbar_n |\psi_n|, \quad (63)$$

где $z = y - u$ — решение задачи (14). Отсюда и из (62) следует, что для любой схемы из исходного семейства справедлива оценка

$$\|z\|_0 \leqslant M(\bar{h}^2 + h_n + h_{n+1} + h_{n+2}), \quad (64)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от сетки.

Для схемы (61), согласно (62) — (62′), справедливы оценки

$$|\hbar_n\psi_n + \hbar_{n+1}\psi_{n+1}| + h_{n+1}\hbar_n|\psi_n| \leqslant M(h_n^2 + h_{n+1}^2 + h_{n+2}^2), \quad (65)$$

$$\|z\|_0 \leqslant M\bar{h}^2 + M(h_n^2 + h_{n+1}^2 + h_{n+2}^2).$$

Если k, q, f имеют разрывы I рода в точках $\xi_j = x_{n_j} + h_{n_j+1}\theta_j$, $0 \leqslant \theta_j \leqslant 1$, $j = 1, 2, \ldots, j_0$, то вместо (63) и (64) получим

$$\|z\|_0 \leqslant M\bar{h}^2 + M' \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j}^{\varkappa} + h_{n_j+1}^{\varkappa} + h_{n_j+2}^{\varkappa}),$$

где $\varkappa = 2$ для схемы (61), $\varkappa = 1$ для всего семейства схем. Тем самым доказана следующая

Теорема 3. *Однородная разностная схема* (13) *равномерно сходится в классе разрывных коэффициентов на любой последовательности неравномерных сеток* ω_N. *Если* $k, q, f \in Q^{(1,1)}[0, 1]$, *то имеет место следующая оценка*:

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\bar{h}^2 + M' \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j}^{\varkappa} + h_{n_j+1}^{\varkappa} + h_{n_j+2}^{\varkappa}), \quad (66)$$

где y — *решение задачи* (13), u — *решение исходной задачи* (5), M *и* M' — *положительные постоянные, не зависящие от сеток*, j_0 — *число всех точек* $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h_{n_j+1}$ *интервала* $0 < x < 1$, *в которых разрывен по крайней мере один из коэффициентов* $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $\varkappa = 2$ *для схемы* (61), $\varkappa = 1$ *для всего исходного семейства однородных разностных схем.*

Замечание 1. В отличие от случая гладких коэффициентов погрешность $z = y - u$ зависит не только от среднего квадратичного шага $\bar{h} = \|h\|_2$, являющегося интегральной характеристикой сетки, но и от шагов сетки в окрестности точки разрыва $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h_{n_j+1}$ коэффициентов дифференциального уравнения. Отсюда следует, в частности, что если заранее известно положение точек ξ_j разрыва фиксированных $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$, то, выбирая более мелкую сетку в окрестности точек ξ_j, можно повысить порядок точности схемы. Так, например, выбирая $h_{n_j} = O(\bar{h}^2)$, $h_{n_j+1} = O(\bar{h}^2)$, $h_{n_j+2} = O(\bar{h}^2)$, мы получим

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\bar{h}^2, \qquad \bar{h}^2 = \|h\|_2^2,$$

т. е. на таких сетках любая исходная схема будет иметь второй порядок точности.

Замечание 2. Если точка разрыва $\xi_j = x_{n_j}$ является узловой точкой сетки ($\theta_j = 0$), то нетрудно показать, что

$$\hbar_{n_j}\psi_{n_j} = O(h_{n_j}^2) + O(h_{n_j+1}^2), \qquad \hbar_{n_j+1}\psi_{n_j+1} = O(h_{n_j+1}^2) + O(h_{n_j+2}^2).$$

В этом случае вместо (66), очевидно, получим

$$\|y - u\|_0 \leqslant M\bar{h}^2 + M' \sum_{j=1}^{j_0} (h_{n_j}^2 + h_{n_j+1}^2), \quad (67)$$

т. е. любая исходная схема имеет второй порядок точности на такой последовательности сеток, для которой точки разрыва фиксированных коэффициентов k, q, f являются узловыми точками. Если k, q, f известны, то, очевидно, всегда можно изменить сетку вблизи точек разрыва ξ_j и добиться того, что все ξ_j будут являться узловыми точками сетки. Полученные таким образом сетки уже не являются произвольными, а зависят от конкретных функций k, q, f. Такие сетки целесообразно употреблять на практике в тех случаях, когда положение разрывов коэффициентов дифференциального уравнения заранее известно. Следует подчеркнуть, что мы до сих пор проводили исследования для всего класса разрывных коэффициентов и для любых последовательностей сеток ω_N, получающихся при произвольном разбиении отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ на N частей точками $x_0 = 0$, $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N = 1$.

5. Однородные разностные схемы второго типа

Однородные разностные схемы, рассматривавшиеся выше, можно получить при помощи интегро-интерполяционного метода (см. [1]), если написать уравнение баланса для интервала $(\bar{x}_{i-1} \leqslant x \leqslant \bar{x}_i = 0.5\,(x_i + x_{i+1}))$. Если же написать уравнение баланса для $(x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1})$ и относить значения функции y к точке $\bar{x}_i$, полагая $\bar{y}_i = y\,(\bar{x}_i)$, то можно получить однородные разностные схемы второго типа

$$\Lambda\bar{y} = (a\bar{y}_{\check{x}})_x - d\bar{y} + \varphi = 0, \qquad y\,(0) = u_1, \qquad y\,(1) = u_2, \tag{68}$$

где

$$\bar{y}_{\check{x}} = (\bar{y} - \bar{y}^{(-1)})\,\hbar, \qquad \hbar = 0.5\,(h + h_{+1}), \qquad h = h_i = x_i - x_{i-1},$$

$$(a\bar{y}_{\check{x}})_{x,i} = \frac{1}{h_{i+1}}\left[a_{i+1}\frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{\hbar_{i+1}} - a_i\frac{\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}}{\hbar_i}\right].$$

Значения функции $\bar{y}$ относятся к точкам $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$, . . ., $\bar{x}_{N-1}$, т. е. имеется N внутренних точек, а не $N - 1$.

Коэффициенты a, d, φ определяются при помощи тех же шаблонных функционалов A, D и F, что и в п. 1 § 1, по формулам

$$a = A\,[k\,(\bar{x} + s\hbar)], \quad d = D\,[q\,(\bar{x} + sh_{+1})], \quad \varphi = F\,[f\,(\bar{x} + sh_{+1})] \qquad (\bar{x} = x + 0.5h_{+1}).$$

Уравнения (68) в точках $\bar{x}_0 = 0.5h_1$, $\bar{x}_{N-1} = x_N - 0.5h_N$ получаются, если формально положить $h_0 = h_{N+1} = 0$, $\bar{y}_N = y\,(1)$, $\bar{y}_{-1} = y\,(0)$, так что $\hbar_0 = 0.5h_1$, $\hbar_N = 0.5h_N$.

Полагая $\bar{y} = z + u\,(\bar{x})$, получим для z условия

$$\overline{\Lambda}z = (az_{\check{x}})_x - dz = -\psi, \qquad z\,(0) = z\,(1) = 0 \tag{69}$$

$$(0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_1', \quad 0 \leqslant d \leqslant c_2),$$

где $\psi = \Lambda\bar{u} - (L^{(k,q,f)}u)_{x=\bar{x}}$ — погрешность аппроксимации схемы (68).

Предположим, что $k, q, f \in C^{(1,1)}$ и, следовательно, $u\,(x) \in C^{(3,1)}$; рассуждая по аналогии с п. 3 § 1 и учитывая, что

$$\overline{(ku')}' = (ku')_x + O\,(h_{+1}^2), \qquad d = \bar{q} + O\,(h_{+1}^2), \qquad \varphi = \bar{f} + O\,(h_{+1}^2),$$

найдем

$$\psi = \mu_x + \psi^*, \qquad \mu = au_{\check{x}} - ku', \tag{70}$$
$$\psi^* = O\,(h^2) + O\,(h_{+1}^2) + O\,(h_{+2}^2).$$

Из разложений

$$u_{\check{x}} \doteq u' + \tfrac{1}{4}(h_{+1} - h)\,u'' + O\,(h^2) + O\,(h_{+1}^2),$$
$$a = k + \tfrac{1}{4}(h_{+1} - h)\,k' + O\,(h^2) + O\,(h_{+1}^2)$$

следует

$$\mu = \eta_{\check{x}} + \mu^*, \qquad \eta = \tfrac{1}{8} h_{+1}^2 (ku')'^{(+1)} = \tfrac{1}{8} h_{+1}^2 (qu - f)^{(+1)},$$
$$\mu^* = O(h^2) + O(h_{+1}^2), \tag{71}$$

Таким образом, формула (70) принимает вид

$$\psi = \mu_x^* + \psi^* + \eta_{\check{x}x}, \tag{72}$$

где μ^*, η и ψ^* — второго порядка относительно $\|h\|_0 = \max\limits_{(i)} h_i$.

Решение задачи (69) дается формулой

$$z(x) = (G(x, \xi), \psi(\xi))^+ = \bar{z} + v, \qquad \bar{z} = (G, \mu_\xi^* + \psi^*)^+, \qquad v = (G, \eta_{\check{\xi}\xi})^+ \tag{73}$$

$$\left((y, v)^+ = \sum_{i=0}^{N-1} \bar{y}_i \bar{v}_i h_{i+1}, \qquad (y, v) = \sum_{i=0}^{N-1} \bar{y}_i \bar{v}_i h_i \quad \text{и т. д.} \right),$$

где $G(x, \xi)$ — разностная функция Грина, определяемая условиями

$$(aG_{\check{x}}(x, \xi))_x - d(x)\, G(x, \xi) = -\delta(x, \xi) / h_{+1}, \quad G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0. \tag{74}$$

Для $G(x, \xi)$ верны оценки леммы 2. Поэтому справедлива лемма 3, так что

$$\|\bar{z}\|_0 \leqslant M_2 (\|\mu^*\|_1 + \|\psi^*\|_3). \tag{75}$$

Вторая формула Грина (26) дает

$$v(x) = (G(x, \xi), \eta_{\check{\xi}\xi}(\xi))^+ = (G_{\check{\xi}\xi}(x, \xi), \eta(\xi))^+ + G_{\check{\xi}}\eta|_{\xi = x_N} - \eta G_{\hat{\xi}}|_{\xi = 0}.$$

Подставим сюда найденное из уравнения (74) выражение для $G_{\check{\xi}\xi}$:

$$v(x) = -\frac{\eta(x)}{a(x)} \left(\frac{a_\xi(\xi)}{a(\xi)} G_{\hat{\xi}}(x, \xi) - \frac{d(\xi)}{a(\xi)} G(x, \xi), \eta(\xi) \right)^+ + G_{\check{\xi}}\eta|_{\xi = x_N} - \eta G_{\hat{\xi}}|_{\xi = 0}.$$

Если $k(x) \in C^{(0,1)}$, то $|a_x| \leqslant c_4$ (c_4 — постоянная, не зависящая от сетки) и

$$\|v\|_0 \leqslant M \|\eta\|_0 \qquad (M = M(c_1, c_2, c_4)). \tag{76}$$

Пусть $k(x) \in Q^{(0,1)}$ $(0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_1')$ и $\xi = \bar{x}_n + \theta \bar{h}_n$ — точка разрыва функции $k(x)$. Тогда $|a_x| \leqslant c_4$ при $x \neq \bar{x}_n$ и $x \neq \bar{x}_{n+1}$. Из формулы

$$\left(\frac{a_\xi}{a} G_{\hat{\xi}}, \eta \right)^+ = \frac{1}{a_n} (a_{n+1} - a_n) G_{\hat{\xi}}(x, x_n) + \frac{1}{a_{n+1}} (a_{n+2} - a_{n+1}) G_{\hat{\xi}}(x, x_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a_i} a_{x,i} G_{\hat{\xi}}(x, \bar{x}_i) h_{i+1} + \sum_{i=n+2}^{N-1} \frac{1}{a_i} a_x(\bar{x}_i) G_{\hat{\xi}}(x, \bar{x}_i) h_{i+1}$$

видно, что оценка (76) сохраняет силу. В этом случае $M = M(c_1, c_1', c_2, c_4)$.

Тем самым доказана

Лемма 7. *Если* $0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_1'$, $0 \leqslant d \leqslant c_2$ *и* $|a_x| \leqslant c_4$ *всюду, кроме конечного (при любом* N*) числа точек сетки, а* $\psi(x)$ *имеет вид* (72), *то для решения задачи* (69) *справедлива оценка*

$$\|z\|_0 \leqslant M_2 (\|\mu^*\|_1 + \|\psi^*\|_3) + M_4' \|\eta\|_0,$$

где $M_4 > 0$ — *постоянная, зависящая только от* c_1, c_1', c_2, c_4, $M_2 = (c_1 + c_2) / c_1^2$.

Теорема 4. *Если* $k, q, f \in C^{(1,1)}[0, 1]$, *то любая однородная разностная схема* (68) *имеет второй порядок точности на произвольной последовательности сеток* ω_N:

$$\| \bar{y} - u(\bar{x}) \|_0 \leqslant M \| h \|_0^2, \tag{77}$$

где $\bar{y}$ — *решение задачи* (68), $u(x)$ — *решение исходной задачи* (5), $M > 0$ *есть постоянная, не зависящая от сетки. Если* $k, q, f \in Q^{(1,1)}[0, 1]$, *то справедлива оценка*

$$\| \bar{y} - u(\bar{x}) \|_0 \leqslant M \| h \|_0^{\varkappa}, \tag{78}$$

где $\varkappa = 1$ *для всего семейства схем* (68), $\varkappa = 2$ *для схемы* (61).

Оценка (77) следует из леммы 7 и оценок для μ^*, η, ψ^*. При $q = f = 0$ вместо (77) получим $\| \bar{y} - u(\bar{x}) \|_0 \leqslant M \| h \|_2^2$. Вывод оценки (78) основан на использовании аналога леммы 6.

Поступила в редакцию
6.06.1962

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 4—63.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 425—440.
3. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
4. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 6, 972—1000.