Аналогично имеем $\psi(\xi, \mu) = O(n^{1/2-\varepsilon})$ и $\sigma(\xi, \mu) = O(n^{1-2\varepsilon})$, и следовательно,

$$u_h(x,t) = u(x,t) + F^*(\alpha, \beta; \varepsilon, h; xt^{-1})(h/t)^{1/2+\varepsilon} + O((h/t)^{1/2+\varepsilon}),$$

где $0 < c_6 < |F^*| < c_7$.

Таким образом, мы получили все искомые асимптотики.

Поступила в редакцию
1.06.1962

Цитированная литература

1. P. D. Lax. Hyperbolic systems of conservation Laws II. Communs Pure and Appl. Math., 1957, **10**, 537—566.
2. И. Н. Санов. О вероятностях больших отклонений случайных величин. Матем. сб., 1957, **42**, вып. 1, 11—44.

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ДРОБНЫХ ШАГОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

1. Для численного решения многомерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в [1] был предложен метод расщепления (метод дробных шагов). В [2] написана разностная схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами в случае двух пространственных переменных и прямоугольной области, а также дано доказательство сходимости (в среднем) этой схемы со скоростью $O(\tau^\varepsilon)$ при дополнительном условии $\tau/h^2 = \text{const}$. В данной заметке показано, что модифицированным методом дробных шагов можно пользоваться и в случае произвольной области и неравномерной разностной сетки. Доказана сходимость в среднем со скоростью $O(h^2) + O(\tau)$ рассматриваемых нами локально-одномерных схем; в отличие от [1], мы не связываем эти схемы с расщеплением многомерного разностного уравнения, что делает их пригодными для произвольной области и квазилинейных уравнений параболического типа. В отличие от [3], здесь на каждом этапе используются шеститочечные одномерные схемы, что позволяет, в частности, учесть и схему [2]. Изложение, как обычно, ведется для семейства однородных схем, характеризуемых заданием шаблонных функционалов [3] — [5]. Используются методы, развитые в [3], [5], [6]. Сходимость доказана для произвольных неравномерных сеток.

2. Пусть G — произвольная двумерная область, ограниченная контуром Γ, $\overline{G} = G + \Gamma$, $x = (x_1, x_2)$ — точка с координатами x_1 и x_2. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ ищется решение задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \qquad (x, t) \in Q_T = Gx(0 < t \leqslant T), \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = u_1(x, t), \quad t \in [0, T]; \qquad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{2}$$

$$k_\alpha(x, t) \geqslant c_1 > 0 \quad (c_1 = \text{const}), \quad \alpha = 1, 2. \tag{3}$$

Будем предполагать: 1) задача (1) — (3) имеет единственное решение $u = u(x, t)$, непрерывное в $\overline{Q}_T$; 2) выполнены

Условия А. В области $\overline{Q}_T$ функции $\partial^3 u/\partial x_\alpha^3$, $\partial^2 k_\alpha/\partial x_\alpha^2$ удовлетворяют условиям Липшица по x_α, а $\partial u/\partial x_\alpha$, $\partial^2 u/\partial x_\alpha^2$, $\partial u/\partial t$, k_α, $\partial k_\alpha/\partial x_\alpha$ — условиям Липшица по t $(\alpha = 1, 2)$.

В дальнейшем явно используется только одно свойство области $\overline{G}$: пересечение с областью G прямой $\mathscr{L}_\alpha$, проведенной через любую точку $x \in G$ параллельно оси координат Ox_α, состоит из конечного числа интервалов (см. [3]). Для простоты изложение приводится в предположении, что любая прямая $\mathscr{L}_\alpha$ пересекает контур Γ дважды.

3. Рассмотрим произвольную неравномерную прямоугольную сетку $\overline{\omega}_h\{x_i\in\overline{G}\}$, где $x_i=(x_1^{(i_1)}, x_1^{(i_2)})$ — узел сетки с координатами $x_1^{(i_1)}$ и $x_2^{(i_2)}$, $i_\alpha=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\alpha=1, 2$. Шаги сетки $h_1^{(i_1)}=x_1^{(i_1)}-x_1^{(i_1-1)}$ и $h_2^{(i_2)}=x_2^{(i_2)}-x_2^{(i_2-1)}$ — функции координат $x_1^{(i_1)}$ и, соответственно, $x_2^{(i_2)}$. Пусть $\omega_h=\{x_i\in G\}$ — внутренняя сеточная область, $\gamma=\{x_i\in\Gamma\}$ — граничная сеточная область. Через точку $x_i\in\omega_h$ проведем прямую $\mathscr{L}_\alpha$, параллельную оси координат Ox_α; множество всех узлов сетки $\overline{\omega}_h$, лежащих на $\mathscr{L}_\alpha$, назовем цепочкой $Ц_\alpha$. Пусть $x_{\text{л}}=x_{\text{л}}^{(\alpha)}\in\gamma$ и $x_{\text{п}}=x_{\text{п}}^{(\alpha)}\in\gamma$ — граничные точки цепочки $Ц_\alpha$, причем x_α возрастает при переходе от $x_{\text{л}}$ к $x_{\text{п}}$, а $\gamma_{\alpha,\text{л}}$ — множество узлов $x_{\text{л}}$ всех цепочек $Ц_\alpha$ данного направления, $\gamma_{\alpha,\text{п}}$ — множество узлов $x_{\text{п}}$. Обозначим $\gamma_\alpha=\gamma_{\alpha,\text{л}}+\gamma_{\alpha,\text{п}}$, $\omega_h^{(+\alpha)}=\omega_h+\gamma_{\alpha,\text{п}}$, $\omega_h^{(-\alpha)}=\omega_h+\gamma_{\alpha,\text{л}}$. Отрезок $0\leqslant t\leqslant T$ разобьем на K равных частей длины τ точками $t_0=0, \tau, \ldots, t_j=j\tau, \ldots, t_K=K\tau=T$, $\tau=T/K$ (равномерная сетка с шагом τ) и введем промежуточные (дробные) шаги $t_{j+1/2}=t_j+\tau/2=(j+\frac{1}{2})\tau$, $j=0, 1, \ldots, K-1$. Сетка $\overline{\omega}_\tau$ по времени содержит как целые, так и дробные шаги, т. е. $\overline{\omega}_\tau=\{t_{j^*}\in[0\leqslant t\leqslant T]\}$, где $t_{j^*}=j^*\tau$, $j^*=0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, j, j+\frac{1}{2}, \ldots, K-\frac{1}{2}, K$. Точка $(x_i, t_{j^*})\in\overline{Q}_T$ есть узел пространственно-временной сетки $\overline{\Omega}$, а $\Omega=\{(x_i, t_{j^*})\in Q_T\}$ — множество внутренних узлов сетки $\overline{\Omega}$; очевидно, что $\overline{\Omega}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$, $\Omega=\omega_h\times\omega_\tau$, где $\omega_\tau=\{t_{j^*}\in(0<t\leqslant T]\}$.

Будем пользоватся обозначениями, введенными в [3]. Пусть $y=y(x, t_{j^*})=y^{j^*}$ сеточная функция, заданная на $\overline{\Omega}$. Будем писать $y^{(\pm m_\alpha)}=y(x^{(\pm m_\alpha)}, t)$, $x^{(\pm m_1)}= =(x_1^{(i_1\pm m)}, x_2^{(i_2)})$, $x_1^{(i_1-1/2)}=\frac{1}{2}(x_1^{(i_1)}+x_1^{(i_1-1)})$, $y_{\bar{x}_\alpha}=(y-y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha$, $y_{x_\alpha}=(y^{(+1_\alpha)}-y)/h_{\alpha+}$, $y_{\hat{x}_\alpha}=(y^{(+1_\alpha)}-y)/\hbar_\alpha$, $h_\alpha=h_\alpha^{(i_\alpha)}$, $h_{\alpha+}=h_\alpha^{(i_\alpha+1)}$, $\hbar_\alpha=(h_\alpha+h_{\alpha+})/2$, $y_{\bar{t}_\alpha}=(y^{j+\alpha/2}-y^{j+(\alpha-1)/2})/\tau$.

Нам понадобятся следующие суммы и нормы:

$$(y, v)^*=\sum_{\omega_h} y_i v_i \hbar_1^{(i_1)}\hbar_2^{(i_2)}, \qquad (y, v)=\sum_{\omega_h} y_i v_i h_1^{(i_1)} h_2^{(i_2)},$$

$$(y, v]_\alpha=\sum_{\omega_h^{(+\alpha)}} y_i v_i h_\alpha^{(i_\alpha)}\hbar_{\alpha\pm 1}^{(i_\alpha\pm 1)} \quad (+\text{ при } \alpha=1, \quad -\text{ при } \alpha=2),$$

$$\|y\|=\sqrt{(y, y)^*}, \qquad \|y\|_2=\sqrt{(y, y)}, \qquad \|y\|_{2_\alpha}=\sqrt{(1, y^2]_\alpha},$$

$$\|y\|_{3_\alpha}=\|\eta_\alpha\|_{2_\alpha}, \text{ где } (\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha}=y,$$

$$\eta_\alpha=0 \text{ при } x\in\gamma_{\alpha,\text{п}}.$$

4. Оператор $L_\alpha u$ заменяем однородной одномерной разностной схемой

$$\Lambda_\alpha y=(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}},$$

имеющей второй порядок аппроксимации на равномерной сетке (см. [4] и [5]), так что $\Lambda_\alpha u-L_\alpha u=O(h_\alpha^2)$.

Класс шаблонных функционалов a_α описан в [4]; в частности, при $a_\alpha=k_\alpha^{(-1/2)}$ получим схему, использованную в [2]. Задаче (1)—(3) ставим в соответствие локально-одномерную схему:

$$y_{\bar{t}_\alpha}=\Lambda_\alpha y^{(\sigma)} \text{ при } (x, t_{j+\alpha/2})\in\Omega, \alpha=1, 2; j=0, 1, 2, \ldots, K-1; \tag{4}$$

$$y(x, t_{j+\alpha/2})=u_1(x, t_{j+\alpha/2}) \text{ при } x\in\gamma_\alpha; \qquad y(x, 0)=u_0(x) \text{ при } x\in\overline{\omega}_h; \tag{5}$$

$$a_\alpha(x, t)\geqslant c_1>0, \ (x, t)\in\omega_h^{(+\alpha)}\times[0\leqslant t\leqslant T]. \tag{6}$$

Здесь $y^{(\sigma)}=\sigma y+(1-\sigma)\hat{y}$, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, $y=y(x, t_{j+\alpha/2})$, $\hat{y}=y(x, t_{j+(\alpha-1)/2})$, $y_{\bar{t}_\alpha}=(y-\hat{y})/\tau$, $\Lambda_\alpha y=(a_\alpha(x, t^*)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}$, $t^*\in[t_j, t_{j+1}]$ — для определенности будем считать, что $t^*=t_{j+1/2}$. Из (4)—(5) видно, что в каждый момент $t_{j+\alpha/2}$ решается первая краевая задача для всех цепочек $Ц_\alpha$ данного направления x_α.

5. Перейдем к изучению сходимости и точности схемы (4)—(6). Пусть u — решение задачи (1)—(3), y — решение задачи (4)—(6). Для $z = y - u$ получаем условия

$$z_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha z^{(\sigma)} + \psi_\alpha, \quad \psi_\alpha = \Lambda_\alpha u^{(\sigma)} - u_{\bar{t}_\alpha}, \tag{7}$$

$$z(x, t_{j+\alpha/2}) = 0, \quad x \in \gamma_\alpha; \quad z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{8}$$

$$a_\alpha(x, t_{j+\alpha/2}) \geqslant c_1 > 0. \tag{9}$$

Пусть выполнены условия А. По аналогии с (7) найдем

$$\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi_{\alpha, a}, \quad \|\mu_\alpha\|_{2_\alpha} = O(\|h_\alpha^2\|_{2_\alpha}), \quad \|\psi_{\alpha, a}\| = O(\|h_\alpha^2\|_{2_\alpha}), \tag{10}$$

где $\|h_\alpha^2\|_{2_\alpha} = \sqrt{(1, h_\alpha^4]_\alpha}$ — среднее квадратичное значение h_α^2.

Представим ψ_α в виде

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^0 + \psi_\alpha^*, \quad \psi_\alpha^0 = \left(L_\alpha u - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1}, \quad \sum_{\alpha=1}^{2} \psi_\alpha^0 = 0, \tag{11}$$

$$\psi_\alpha^* = (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \varphi_\alpha, \quad \|\varphi_\alpha\|_2 = O(\|h_\alpha\|_2^2) + O(\tau). \tag{12}$$

6. При оценке решения задачи (7)—(9) используем метод интегральных неравенств и специальный метод суммирования локальных погрешностей ψ_α, учитывающий соотношение $\psi_1^0 + \psi_2^0 = 0$. Напишем основное интегральное тождество при $\sigma = \frac{1}{2}$. Умножим (7) на $(z + \check{z})\hbar_1\hbar_2$ и просуммируем по ω_h. Пользуясь формулой Грина

$$(z + \check{z}, \Lambda_\alpha z^{(1/2)})^* = \frac{1}{2}\|\sqrt{a_\alpha}(z_{\bar{x}_\alpha} + \check{z}_{\bar{x}_\alpha})\|_{2_\alpha}^2 = I_\alpha, \tag{13}$$

получим следующие тождества:

$$(\|z\|^2)_{\bar{t}_\alpha} + I_\alpha = (\psi_\alpha, z + \check{z})^*, \tag{14}$$

$$(\|z\|^2)_{\bar{t}} + I_1 + I_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} (\psi_\alpha, z + \check{z})^*, \tag{15}$$

где

$$(\|z\|^2)_{\bar{t}} = (\|z^{j+1}\|^2 - \|z^j\|^2)/\tau.$$

Полагая в (15) $\psi_\alpha = 0$, видим, что схема (4)—(6) устойчива по начальным данным (при любых h_α и τ):

$$\|z(x, t_{j^*})\| \leqslant \|z(x, 0)\| \quad \left(t_{j^*} = j^*\tau, \ j^* = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, K - \frac{1}{2}, K\right). \tag{16}$$

7. Лемма 1. *Если ψ_α можно представить в виде*

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^0 + (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \varphi_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^{2} \psi_\alpha^0 = 0, \tag{17}$$

то для решения задачи (7)—(9) *при* $\sigma = \frac{1}{2}$ *и любых* h_α *и* τ *справедлива оценка*

$$\|z(x, t_{j+1})\| \leqslant \tau\|\psi^0(x, t_{j+1})\| + \tau\sqrt{e}\,\overline{\|\psi^0(x, t_j)\|} + \sqrt{1 + e}\sum_{j'=1}^{j+1} \tau Q^{j'}, \tag{18}$$

где

$$\psi^0 = \psi_2^0 = -\psi_1^0, \quad \overline{\|\psi^0(x, t_j)\|} = \left(\frac{1}{t_j}\sum_{j'=1}^{j} \tau\|\psi^0(x, t_{j'})\|^2\right)^{1/2},$$

$$Q^{j'} = \tau^2 t_j \|\psi_{\bar{t}}^0(x, t_{j'})\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} (\|\mu_\alpha(x, t_{j'})\|_{2_\alpha}^2 + \|\varphi_\alpha(x, t_{j'})\|_{3_\alpha}^2). \tag{18'}$$

Подставим (17) в (15) и проведем преобразования:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\psi_\alpha^0,\ z+\check z)^*+(\psi^0,\ z^{j+1}-z^j)=\tau(\psi^0(x,\ t_{j+1}),\ z(x,\ t_{j+1}))^*_{\bar t}-$$
$$-(\psi^*_{\bar t}(x,\ t_{j+1}),\ z(x,\ t_j))^*\tau,$$

$$|((\mu_\alpha)_{\hat x_\alpha},z+\check z)^*|=|(\mu_\alpha,\ z_{\bar x_\alpha}+\check z_{\bar x_\alpha}]_\alpha|\leqslant\frac{1}{2}I_\alpha+\frac{1}{c_1}\|\mu_\alpha\|^2_{2\alpha},\qquad |(\varphi_\alpha,\ z+\check z)^*|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}I_\alpha+\frac{1}{c_1}\|\varphi_\alpha\|^2_{3\alpha},\qquad \tau|(\psi^0_{\bar t},\ z^j)^*|\leqslant\frac{\tau^2}{2c_0}\|\psi^0_{\bar t}\|^2+\frac{c_0}{2}\|z^j\|^2,$$

где c_0 — произвольная положительная постоянная, которую позже мы положим равной $1/t_j$. В результате получим неравенство:

$$\|z(x,\ t_{j+1})\|^2\leqslant(1+0.5c_0\tau)\|z(x,\ t_j)\|^2+0.5\tau Q^{j+1}+\tau^2(\psi^0(x,\ t_{j+1}),\ z(x,\ t_{j+1}))^*_{\bar t}.$$

Учитывая неравенство $\tau|(\psi^0,\ z)^*|\leqslant0.5\|z\|^2+0.5\tau^2+0.5\tau^2\|\psi^0\|^2$, а также начальное условие $z(x,\ 0)=0$, находим:

$$\|z(x,\ t_{j+1})\|^2\leqslant c_0\tau\sum_{j'=1}^{j}\|z(x,\ t_{j'})\|^2+\tau^2\|\psi^0(x,\ t_{j+1})\|^2+\sum_{j'=1}^{j}\tau Q^{j'}. \tag{19}$$

Воспользуемся теперь следующей простой леммой, доказательство которой мы опускаем:

Лемма 2. *Если* $\rho(t_j)$ *и* $\sigma(t_j)$ — *неотрицательные функции* ($t_j=j\tau$, $j=1, 2,\ldots$), *то неравенство*

$$\rho(t_{j+1})\leqslant c_0\tau\sum_{j'=1}^{j}\rho(t_{j'})+\sigma(t_{j+1}),\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\qquad (c_0>0)$$

влечет за собой

$$\rho(t_{j+1})\leqslant\sigma(t_{j+1})+c_0e^{c_0t_j}\sum_{j'=1}^{j}\tau\sigma(t_{j'}). \tag{20}$$

Из неравенства (19), в силу леммы 2, следует

$$\|z(x,\ t_{j+1})\|^2\leqslant\tau^2\|\psi^0(x,\ t_{j+1})\|^2+\tau^2e\overline{\|\psi^0(x,\ t_j)\|}^2+(1+e)\sum_{j'=1}^{j+1}\tau Q^{j'},$$

$$\overline{\|\varphi^0(x,\ t_j)\|}^2=\frac{1}{t_j}\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\varphi^0(x,\ t_{j'})\|^2.$$

Лемма 1 доказана.

8. Теорема 1. *Если выполнены условия* А, *то разностная схема* (5)—(7) *сходится в среднем со скоростью* $O(\|h^2\|_2)+O(\tau)$ *при* $\sigma=0.5$ *и независимом стремлении* h_α, τ *к нулю на любой неравномерной пространственной сетке*:

$$\|y(x,\ t_{j+\alpha/2})-u(x,\ t_{j+\alpha/2})\|\leqslant M(\|h^2\|_2+\tau),\qquad \alpha=1,\ 2,\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ K-1, \tag{21}$$
$$\|h^2\|_2=\|h_1^2\|_{2_1}+\|h_2^2\|_{2_2},\quad \|h_\alpha^2\|_{2_\alpha}=\sqrt{(1,\ h_\alpha^4]_\alpha},\qquad \alpha=1,\ 2,$$

где M — *положительная постоянная, не зависящая от выбора сетки.*

В самом деле, оценка (21) для $\alpha=2$ (на целом шаге) следует из (18), так как, в силу (10) и (12), имеем $Q^{j'}=O(\|h^2\|_2^2)+O(\tau^2)$. Для оценки $\|z(x,\ t_{j+1/2})\|$ на дробном шаге используем (18) при $\alpha=2$ и тождество (14) при $\alpha=1$. Таким образом, схема (5)—(7) и на дробных шагах имеет тот же порядок точности, что и на целых шагах.

Сходимость схемы (5)—(7) может быть доказана при значительно более слабых требованиях, чем условия А.

Теорема 2. *Если выполнены условия:* 1) $\partial k_\alpha/\partial x_\alpha$, $\partial^2 u/\partial x_\alpha^2$ *удовлетворяют в* $\overline{Q}_T$ *условиям Гёльдера порядка* γ, $0<\gamma\leqslant 1$, 2) $\partial u/\partial x_\alpha$, $\partial^2 u/\partial x_\alpha^2$, $\partial u/\partial t$, k_α, $\partial k_\alpha/\partial x_\alpha$ — условиям Гёльдера порядка $\gamma>0$ по t в $\overline{Q}_T$, то схема (4)—(6) при $\sigma=0.5$ и любых h_α и τ *сходится* в среднем, так что

$$\| y(x, t_{j+\alpha/2}) - u(x, t_{j+\alpha/2}) \| \leqslant M (\| h^\gamma \|_2 + \tau^\gamma). \tag{22}$$

Для доказательства теоремы 2 надо учесть, что $\| \varphi_\alpha \|_{3_\alpha} = O(\| h_\alpha^\gamma \|_{2_\alpha}) + O(\tau^\gamma)$, $\| \mu_\alpha \|_{2_\alpha} = O(\| h_\alpha^{1+\gamma} \|_{2_\alpha})$ и воспользоваться леммой 1.

9. Мы провели все предыдущие рассуждения для простейшего уравнения теплопроводности (1). Однако теоремы 1 и 2 сохраняют силу и для уравнений общего вида

$$c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u + f(x, t) - q(x, t) u; \qquad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha},$$

$$c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u + f(x, t, u); \qquad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}.$$

Соответствующие выражения для $\Lambda_\alpha y$ даны в [3], и мы не будем их здесь приводить. Там же доказана равномерная сходимость локально-одномерного метода при $\sigma=1$. Если $r_\alpha \not\equiv 0$, $q_\alpha \not\equiv 0$, то оценка верна при $\tau<\tau_0$, где τ_0 зависит от c_1 и $\max|r_\alpha|$, $\max|q_\alpha|$

10. Применяемый здесь метод суммирования локальных погрешностей ψ_α, приводящий к априорной оценке (18), не удается распространить на случай $p>2$. В этом случае вместо (21) нам удалось получить лишь оценку

$$\| y - u \| \leqslant M (\sqrt{\tau} + h^2).$$

Если предположить, что $\tau/h_\alpha^2 \leqslant [2(1-\sigma) \max a_\alpha]^{-1}$, то методом работы [3] может быть доказана равномерная сходимость схемы (5)—(7) при $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ и любом $p>1$ со скоростью $O(\bar{h}^2)+O(\tau)$, где $h^2=\bar{h}_1^2+\bar{h}_2^2$, $\bar{h}_\alpha$ — максимальное значение шага $h_\alpha^{(i_\alpha)}$ на сетке $\omega_h^{(+1_\alpha)}$. Для случая $\sigma=1$ эта оценка имеет место при любых h_α и τ (теорема 2 работы [3]).

Следует подчеркнуть, что мы пользуемся здесь граничными условиями без сноса (в отличие от [3]). Такая формулировка разностных краевых условий всегда приводит к разностным схемам на неравномерных сетках. Мы доказали, что и в этом случае достигается второй порядок точности по пространству.

Поступила в редакцию
9. 06. 1962

Цитированная литература

1. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, 125, № 6, 1207—1210.
2. Н. Н. Яненко. О сходимости метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 933—937.
3. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерных параболических уравнений в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5,787—811.
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 5—63.
5. А. А. Самарский. О сходимости и точности однородных разностных схем для одномерных и многомерных параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 4, 603—634.
6. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и математ. физ., 1961, 1, № 3, 441—460.
7. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 812—832.