ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Сентябрь 1962 Октябрь №5

ОБ ОДНОМ ЭКОНОМИЧНОМ РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

Введение

Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \qquad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha},$$
$$x = (x_1, \ldots, x_p). \tag{1.B}$$

с несколькими пространственными переменными $x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_p$. Пусть $\{x_i = (i_1 h_1, \ldots, i_\alpha h_\alpha, \ldots, i_p h_p),\ t_j = j\cdot\tau;\ i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ j = 0, 1, \ldots\}$ — пространственно-временная разностная сетка с шагами h_α и τ, $y^j = y(x_i, t_j)$ — сеточная функция, Λ_α — разностная аппроксимация оператора L_α $(\Lambda_\alpha \sim L_\alpha)$. Известно, что для численного решения уравнения (1.B) естественные многомерные схемы вида

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \sigma(\Lambda y)^{j+1} + (1-\sigma)(\Lambda y)^j, \qquad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \tag{2.B}$$

оказываются невыгодными: явные схемы ($\sigma = 0$) условно устойчивы лишь при достаточно малом шаге τ по времени, неявные схемы ($\sigma \geqslant 0.5$) абсолютно устойчивы, но в этом случае приходится решать многомерную систему алгебраических уравнений, что даже для двух пространственных переменных ($p = 2$) требует очень много операций. В связи с этим в ряде работ (см. [1] — [11], [20]) были предложены различные так называемые экономичные схемы. Многомерное уравнение решается по этапам путем введения промежуточных (дробных, см. [8]) шагов, на каждом из которых аппроксимация и даже устойчивость, вообще говоря, не имеют места, а достигаются только при переходе с целого шага t_j на шаг t_{j+1}. На дробных шагах применяются схемы, приводящие к одномерным алгебраическим задачам ов одном из пространственных направлений) для трехточечного разностного уравнения, решение которых может быть осуществлено с помощью известных формул прогонки [12]. Наиболее простой алгоритм решения уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \qquad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \tag{3.B}$$

для параллелепипеда $G = (0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p)$ и краевого условия I рода $(u|_\Gamma = \mu)$ предложен Н. Н. Яненко (см. [4]). Этот алгоритм, названный автором методом расщепления, состоит в том, что многомерная схема (2.B) аппроксимируется схемой

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \sigma\Lambda_\alpha y^{j+\alpha/p} + (1-\sigma)\Lambda_\alpha y^{j+(\alpha-1)/p} \qquad (\alpha = 1, \ldots, p). \quad (4.B)$$

Отсюда видно, что значения $y^{j+\alpha/p}$ определяются из одномерного разностного уравнения, для решения которого достаточно использовать граничные условия при $x_\alpha = 0$ и $x_\alpha = l_\alpha$.

Все указанные выше авторы, несмотря на разнообразие алгоритмов и терминологические различия (метод переменных направлений, метод расщепления, метод дробных шагов и др.), изучение устойчивости и сходимости предлагаемых ими методов сводят к изучению устойчивости, аппроксимации и сходимости многомерной схемы, связывающей значения y^j и y^{j+1} на целых шагах и получающейся после исключения значений $y^{j+\alpha/p}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, p-1)$ на промежуточных шагах.

Проводя, например, такое исключение для (4.B), получим

$$\prod_{\alpha=1}^{p} (E - \sigma\tau\Lambda_\alpha)\, y^{j+1} = \prod_{\alpha=1}^{p} (E + (1-\sigma)\,\tau\Lambda_\alpha)\, y^j \qquad (Ey = y). \quad (5.B)$$

Эта схема эквивалентна по порядку аппроксимации многомерной схеме (2.B). В частности, при $p = 2$, $\sigma = 0.5$ схема (5.B) имеет вид

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = 0.5\,(\Lambda y^{j+1} + \Lambda y^j) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2\,(y^{j+1} - y^j). \quad (6.B)$$

Под погрешностью аппроксимации схемы (4.B) понимается погрешность аппроксимации многомерной схемы (5.B).

В [9] указано, что схему (4.B) можно рассматривать как результат факторизации (расщепления) уравнения (5.B), т. е. приближенной факторизации уравнения (4.B). Разностная схема (5.B) имеет неприятную особенность: пространственный оператор имеет порядок $2p$ и не определен, вообще говоря, вблизи границы рассматриваемой области. Отсюда возникает проблема краевых условий даже для простейшей области прямоугольника (см. [10] и [11]). Из наших результатов, в частности, следует, что для схемы расщепления (4.B) указанная проблема краевых условий снимается, что при другой трактовке схемы (4.B) и соответствующем определении понятия аппроксимации она применима для произвольной области и в случае $\sigma = 1$ равномерно сходится со скоростью $O(h^2) + O(\tau)$.

Отметим также, что требование аппроксимации для схемы (5.B) приводит к завышению требований гладкости решения $u = u(x, t)$ дифференциального уравнения.

В настоящей работе рассматривается локально-одномерный метод решения линейных и квазилинейных уравнений параболического типа с любым числом p пространственных переменных, пригодный для произвольной области G. Дадим краткую характеристику метода на примере уравнения (1). В каждом слое

$$t_{j+(\alpha-1)/p} \leqslant t \leqslant t_{j+\alpha/p} = t_j + \tau\alpha/p \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p)$$

решается одномерное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u = 0. \tag{7.B}$$

Для этого используются неявные однородные разностные схемы

$$\Pi_\alpha y = \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \Lambda_\alpha y^{j+\alpha/p} = 0, \tag{8.B}$$

изученные в [13] — [18].

Для частного случая $k_\alpha = 1$, $r_\alpha = 0$ схема (8.B) формально совпадает с (4.B) при $\sigma = 1$.

Разностной схемой Πy, соответствующей уравнению (1), является совокупность (блок) $\Pi = \{\Pi_\alpha, \alpha = 1, \ldots, p\}$ p одномерных схем Π_α. Важной характеристикой всякой схемы является ее погрешность аппроксимации. В данном случае обычное определение погрешности аппроксимации схемы Π, как мы видели на примере схемы (4.B), не является рациональным. Каждая из схем Π_α имеет погрешность аппроксимации

$$\psi_\alpha = \Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}, \qquad \psi_\alpha = O(1),$$

где u — решение уравнения (1.B). Погрешность аппроксимации схемы $\Pi = \{\Pi_\alpha\}$ рационально определить как сумму

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha. \tag{9.B}$$

Если Λ_α есть схема второго порядка аппроксимации, т. е. $\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha^2)$, то

$$\Psi = O(h^2) + O(\tau), \text{ где } h^2 = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2.$$

В § 2 будет доказано, что порядок точности схемы Π совпадает с порядком ее аппроксимации Ψ. Такое определение разностной схемы Π не связано с формой области G и конкретным видом оператора Λ_α.

Уравнение (8.B) в каждый момент времени $t_{j+\alpha/p}$ связывает значения $y^{j+\alpha/p}$ в узлах сетки, лежащих на прямой, параллельной оси $0x_\alpha$. Поэтому в каждый момент времени в каждой точке сетки мы решаем одномерное уравнение теплопроводности для отрезка, концы которого принадлежат границе области. Отсюда сразу следует возможность применения этого метода для произвольной области и параболических уравнений общего вида. Следует отметить, что при решении уравнения (8.B) по каждому направлению x_α в момент $t_{j+\alpha/p}$ используются значения $u|_\Gamma = \mu$ не на всей границе Γ области G, а только в точках пересечения с Γ прямых, параллельных $0x_\alpha$ и проходящих через узлы сетки.

При определении $y^{j+\alpha/p}$ можно использовать граничные данные $\mu(x, t)$ и значения коэффициентов $k_\alpha(x, t)$, $r_\alpha(x, t)$ в любой момент $t_\alpha' \in [t_j, t_{j+1}]$ (например, $t_\alpha' = t_{j+1}$ для всех α). Все получающиеся при этом схемы имеют одинаковый порядок точности. Для определенности мы берем граничные данные при $t_\alpha' = t_{j+\alpha/p}$, что не является ограничением общности.

В § 1 дается формулировка локально-одномерного метода а) для ли-

нейного и б) для квазилинейного уравнений

$$c(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f,$$

$$\text{а)}\ L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \qquad f = f(x, t) - q(x, t)u,$$

$$\text{б)}\ L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \qquad f = f(x, t, u)$$

в случае произвольной области G и краевых условий I рода. Рассматривается некоторое семейство однородных разностных схем (см. [13] — [18]), определяемое заданием класса шаблонных функционалов, при помощи которых вычисляются коэффициенты разностной схемы. В п. 6 рассматривается третья краевая задача для параллелепипеда.

В § 2, п. 1 доказана равномерная устойчивость локально-одномерной схемы по правой части, краевым и начальным данным. Основным результатом работы является теорема 2 о *равномерной сходимости* и точности метода. Показано, что локально-одномерные схемы дают ту же точность $O(h^2) + O(\tau)$, что и многомерные неявные разностные схемы [18].

Мы ограничиваемся здесь случаем гладких коэффициентов. При этом следует подчеркнуть, что максимальный порядок производных, требуемых для сходимости метода, не зависит от числа измерений (ср. [11]). Если коэффициенты дифференциального уравнения разрывны, то порядок точности схемы понижается по аналогии с одномерным случаем $p = 1$ (см. [15], [17], [18]).

Результаты данной работы переносятся на случай произвольных неравномерных сеток.

В § 3 приводятся расчетные формулы для $p = 2$, а также схемы для других уравнений (параболического и гиперболического типов).

§ 1. Локально-одномерный метод переменных направлений

В этом параграфе рассматривается однородная локально-одномерная разностная схема для решения линейного уравнения параболического типа с любым числом пространственных переменных. Изложение проводится для первой краевой задачи и произвольной области. В п. 5 рассмотрена схема для квазилинейного уравнения, а в п. 6 — третья краевая задача в случае параллелепипеда.

1. Исходная задача

Рассмотрим p-мерное линейное уравнение параболического типа

$$c(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f,$$

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right\} - q(x, t)u, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_p)$ — точка p-мерного пространства с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_p$; $c(x, t) = c(x_1, \ldots, x_p, t)$, $k =$

$= k_\alpha(x, t)$, $q = q(x, t)$, $f = f(x, t)$ — заданные функции. Пусть $\bar{G}$ — произвольная замкнутая p-мерная область с границей Γ,

$$\bar{G} = G + \Gamma, \qquad \bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T], \qquad Q_T = G \times (0 < t \leqslant T).$$

Требуется найти в цилиндре $\bar{Q}_T$ решение первой краевой задачи для уравнения (1):

$$c\,\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f \quad \text{в} \quad Q_T, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ при } x \in \bar{G}, \tag{3}$$

где $\mu(x, t)$ и $u_0(x)$ — заданные функции. Коэффициенты k_α и c ограничены снизу:

$$k_\alpha(x, t) \geqslant c_1 > 0, \qquad c(x, t) \geqslant c_2 > 0 \text{ в } Q_T, \tag{4}$$

где c_1, c_2 — постоянные.

Будем всюду предполагать: 1) задача (1) — (4) имеет единственное решение $u = u(x, t)$, непрерывное в замкнутой области $\bar{Q}_T$; 2) выполнены следующие

Условия А:

а) функции

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta}, \quad \frac{\partial^2 k_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta}$$

при $\beta \leqslant \alpha$ для $\alpha \leqslant \left[\frac{p}{2}\right]$ и при $\beta > \alpha$ для $\alpha > \left[\frac{p}{2}\right]$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p)$, а также функции $\partial q/\partial x_\beta$, $\partial f/\partial x_\beta$, $\partial^2 u/\partial x_\beta \partial t$, $\partial c/\partial x_\beta$ удовлетворяют условиям Липшица по x_β в $\bar{Q}_T$;

б) функции $\partial u/\partial x_\alpha$, $\partial^2 u/\partial x_\alpha^2$, $\partial u/\partial t$, c, q, f, r_α, k_α, $\partial k_\alpha/\partial x_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, p)$ удовлетворяют в замкнутой области $\bar{Q}_T$ условиям Липшица по t.

Эти условия являются достаточными для доказательства основной теоремы 2 о точности рассматриваемых ниже разностных схем и в ряде случаев могут быть заменены более слабыми требованиями. Требования гладкости, предъявляемые к поверхности Γ, как известно, связаны со свойствами решения $u = u(x, t)$ задачи.

Мы пользуемся только одним предположением: пересечение с областью G любой прямой $\mathcal{L}_\alpha$, проведенной через точку $x \in G$ параллельно оси координат Ox_α, состоит из конечного числа интервалов (мы не исключаем тот случай, когда пересечение этой прямой с границей Γ содержит не только изолированные точки, но и целые сегменты). Для упрощения редакции мы всюду проводим изложение лишь для того случая, когда пересечение $\mathcal{L}_\alpha$ и G состоит из одного интервала, точнее, когда прямая $\mathcal{L}_\alpha$ пересекает Γ в двух точках. Общий случай рассматривается аналогично.

2. Разностные сетки

Поместим начало $O = (0, \ldots, 0)$ прямоугольной системы координат $(x_1, \ldots, x_p)$ внутрь области G и проведем p семейств гиперплоскостей

$$x_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha i_\alpha, \qquad i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Точки $x_i = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_\alpha^{(i_\alpha)}, \ldots, x_p^{(i_p)})$ пересечения этих гиперплоскостей назовем узлами. Два узла обычно называют соседними, если они удалены друг от друга в одном из направлений x_α $(\alpha = 1, \ldots, p)$ на расстояние h_α. Узел $x_i \in G$ называют внутренним, если все его p соседних узлов принадлежат области $\overline{G}$. Узел называется граничным, если хотя бы один из его соседних узлов не принадлежит $\overline{G}$. Множество всех внутренних узлов образует внутреннюю сеточную область ω_h, а множество граничных узлов — границу γ сетки ω_h. Из определения следует, что $\overline{\omega}_h = \omega_h + \gamma \subset \overline{G}$. Проведем через некоторую точку сетки ω_h прямую $\mathscr{L}_\alpha$, параллельную оси координат Ox_α. Множество всех узлов сетки $\overline{\omega}_h$, лежащих на этой прямой, назовем x_α-цепочкой и обозначим через $Ц_\alpha$. Множество граничных узлов всех цепочек $Ц_\alpha$ данного направления x_α обозначим γ_α. Очевидно, что $\gamma_\alpha \subset \gamma$, $\gamma_1 + \cdots + \gamma_p \subset \gamma$. Пусть $\overline{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, \ldots, p\}$ есть p-мерный параллелепипед. Тогда все цепочки $Ц_\alpha$ для данного α имеют одинаковое число узлов, а их граничные точки находятся на плоскостях $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$. В этом случае γ_α есть множество узлов, расположенных на плоскостях $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$, $0 < x_\beta < l_\beta$, $\alpha \neq \beta$

Введем теперь сетку по времени t, разбивая отрезок $0 \leqslant t \leqslant T$ на K равных частей точками $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, \ldots, K$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p (по числу измерений) равных частей, вводя промежуточные (дробные) моменты времени $t_{j+\alpha/p} = t_j + \tau\alpha/p = (j + \alpha/p)\tau$, где $\alpha = 1, \ldots, p$; $j = 0, 1, \ldots, K-1$. Точку $(x_i, t_{j+\alpha/p})$, где $x_i \in \overline{G}$, назовем узлом пространственно-временной сетки. Множество всех узлов $(x_i, t_{j+\alpha/p})$, где $x_i \in \overline{\omega}_h$, $j = 0, 1, \ldots, K-1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, обозначим Ω.

Обозначим теперь $S_{(\alpha)}$ множество точек $(x_i, t_{j'+\alpha/p})$, где $x_i \subset \gamma_\alpha$, $t_{j'+\alpha/p} = (j' + \alpha/p)\tau$, $j' = 0, 1, \ldots, K-1$, а α фиксировано $(1 \leqslant \alpha \leqslant p)$, $S_{(0)}$ — множество точек $(x_i, 0)$, где $x_i \in \gamma$, $S = S_{(0)} + S_{(1)} + \cdots + S_{(p)}$. Множество узлов $S \subset \overline{Q}_T$ является границей сеточной области Ω. Мы будем в дальнейшем рассматривать сеточные функции, определенные на пространственно-временной сетке $\overline{\Omega} = \Omega + S$. При этом мы, в зависимости от обстоятельств, пользуемся одним из обозначений:

$$y = y(x, t) = y(x_i, t_{j+\alpha/p}) = y^{j+\alpha/p}.$$

Будем также писать

$$x^{(\pm m_\alpha)} = x_i^{(\pm m_\alpha)} = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_{\alpha-1}^{(i_{\alpha-1})}, x_\alpha^{(i_\alpha)} \pm mh_\alpha, x_{\alpha+1}^{(i_{\alpha+1})}, \ldots, x_p^{(i_p)}), \quad m > 0,$$

$$y^{(\pm m_\alpha)} = y(x^{(\pm m_\alpha)}, t), \quad y_{\bar{x}_\alpha} = (y - y^{(-1_\alpha)}) / h_\alpha,$$

$$y_{x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y) / h_\alpha, \qquad y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = 0.5\,(y_{\bar{x}_\alpha} + y_{x_\alpha}), y_{\bar{t}_\alpha} = (y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}) / \tau.$$

3. Локально-одномерные однородные разностные схемы

Перейдем теперь к формулировке разностного алгоритма решения задачи (1) — (4) для произвольной области G.

Вместо того чтобы писать многомерную разностную схему, позволяющую найти при $t = t_{j+1}$ (на целых шагах) численное решение уравнения

(1), мы будем в каждый из моментов $t_{j+\alpha/p}$ решать одномерное дифференциальное уравнение параболического типа

$$\frac{1}{p} c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = L_\alpha u + f_\alpha (x, t), \tag{5}$$

где

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha (x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha (x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha (x, t) u. \tag{6}$$

Здесь q_α, f_α — произвольные функции, удовлетворяющие тем же условиям гладкости, что и q, f, и связанные с q, f лишь условиями

$$\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha (x, t) = q (x, t), \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha (x, t) = f (x, t). \tag{7}$$

Например, $q_\alpha = q/p$, $f_\alpha = f/p$ или $q_\alpha = 0$, $f_\alpha = 0$ при $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, $q_p = q$, $f_p = f$. Для каждого α ищется решение уравнения (5) в свой момент времени $t_{j+\alpha/p}$. Чтобы найти решение уравнения (5) внутри G в промежутке времени $t_{j+(\alpha-1)/p} < t \leqslant t_{j+\alpha/p}$, достаточно воспользоваться начальными данными при $t = t_{j+(\alpha-1)/p}$ и граничными условиями (2) только в тех точках границы Г, которые являются точками пересечения прямых, параллельных координатной оси Ox_α, с границей Г. Поясним это на примере. Пусть $\overline{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \ \alpha = 1, 2, \ p = 2\}$ — прямоугольник на плоскости (x_1, x_2). Тогда для решения уравнения (5), например, при $\alpha = 1$ достаточно знать граничные условия только на сторонах $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$ этого прямоугольника. Граничные условия на остальной части границы, т. е. на сторонах $x_2 = 0$ и $x_2 = l_2$, используются при $\alpha = 2$, т. е. при решении уравнения (5) по направлению Ox_2.

Итак, в каждый момент $t_{j+\alpha/p}$ мы должны решать первую краевую задачу для одномерного уравнения (5). Для ее численного решения воспользуемся однородными разностными схемами, изученными в работах [13] — [18]. Дифференциальный оператор $L_\alpha u + f_\alpha$ аппроксимируем трехточечной консервативной разностной схемой второго порядка аппроксимации:

$$\Lambda_\alpha y + \varphi_\alpha (x, t), \text{ где } \Lambda_\alpha y = (a_\alpha (x, t) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha (x, t) y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} - d_\alpha (x, t) y, \tag{8}$$

коэффициенты которой a_α, b_α, d_α, φ_α являются функционалами соответствующих коэффициентов k_α, r_α, q_α, f_α. Мы не будем давать подробного описания свойств шаблонных функционалов, при помощи которых выражаются коэффициенты схемы Λ_α через коэффициенты дифференциального оператора L_α, а сошлемся на статьи [13], [18]. Отметим лишь, что в случае гладких коэффициентов можно пользоваться простейшими выражениями

$$b_\alpha (x, t) = r_\alpha (x, t), \qquad d_\alpha = q_\alpha (x, t), \qquad \varphi_\alpha = f_\alpha (x, t),$$

$$a_\alpha (x, t) = k_\alpha (x^{(-0.5_\alpha)}, t) \text{ или } a_\alpha (x, t) = 0.5 (k_\alpha^{(-1_\alpha)} + k_\alpha),$$

где

$$x^{(-m_\alpha)} = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_{\alpha-1}^{(i_{\alpha-1})}, x_\alpha^{(i_\alpha)} - mh_\alpha, x_{\alpha+1}^{(i_{\alpha+1})}, \ldots, x_p^{(i_p)}),$$

m — любое положительное число (в данном случае $m = 0.5$ и $m = 1$).

Если выполнены условия А, то во всякой внутренней точке сетки

$$\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha^2). \tag{9}$$

Дифференциальному уравнению (5) ставим в соответствие 4-точечную неявную однородную разностную схему (схему с опережением или мажорантную схему):

$$\rho y_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha y + \varphi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p), \tag{10}$$

где

$$y_{\bar{t}_\alpha} = (y - \check{y}) / \tau, \qquad y = y^{j+\alpha/p}, \qquad \check{y} = y^{j+(\alpha-1)/p},$$

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t^*)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha(x, t^*)\, y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} - d_\alpha(x, t^*)\, y, \tag{11}$$

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t^*), \qquad \rho = \rho(x, t^{**}) \qquad (t_j \leqslant t^* \leqslant t_{j+1},\ t_j \leqslant t^{**} \leqslant t_{j+1}).$$

Коэффициент ρ, так же как и b_α, d_α, φ_α, является линейным функционалом коэффициента $c(x, t)$, так что

$$\rho(x, t) - c(x, t) = O(h^2), \qquad h^2 = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \tag{12}$$

(в простейшем случае $\rho(x, t) = c(x, t)$). Отметим, что ρ не зависит от индекса α, т. е. для всех направлений x_α берется одно и то же значение ρ в некоторый момент $t^{**} \in [t_j, t_{j+1}]$.

Все коэффициенты берутся в некоторые произвольные моменты t^*; $t_j \leqslant t^* \leqslant t_{j+1}$ (например, $t^* = t_j$, $t^* = t_{j+1}$, $t^* = t_{j+\alpha/p}$ и т. д.) *. Произвол в выборе t^* допустим, так как ниже будет показано, что все получающиеся при различных t^* схемы эквивалентны по порядку аппроксимации (с точностью до $O(\tau)$) и, в силу теоремы 1, имеют один и тот же порядок точности. В каждом конкретном случае t^* следует выбирать из соображений экономии и удобства вычислений. Имеется также произвол в выборе φ_α и d_α, так как мы требуем выполнения лишь условий

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{p} \varphi_\alpha(x, t^*) &= f(x, t^*) + O(h^2) + O(\tau), \\ \sum_{\alpha=1}^{p} d_\alpha(x, t^*) &= q(x, t^*) + O(h^2) + O(\tau). \end{aligned} \tag{13}$$

В частности, можно положить

$$\begin{aligned} &\varphi_\alpha = 0 \text{ при } \alpha = 1, 2, \ldots, p-1, \qquad \varphi_p = \varphi(x, t), \qquad \varphi = f + O(h^2), \\ &d_\alpha = 0 \text{ при } \alpha = 1, 2, \ldots, p-1, \qquad d_p = d(x, t), \qquad d = q + O(h^2). \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем проводить исследования для всего описанного выше класса разностных схем.

Разностной схемой $\Pi = \{\Pi_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$, соответствующей дифференциальному уравнению (1), мы называем совокупность (блок) одномерных схем $\Pi_\alpha y = \rho y_{\bar{t}_\alpha} - \Lambda_\alpha y - \varphi_\alpha$.

Разностная схема $\Pi = \{\Pi_\alpha\}$ является однородной не только по прост-

* Значения t^*, вообще говоря, различны для разных коэффициентов $(a_\alpha, b_\alpha, d_\alpha, \varphi_\alpha)$.

ранству, но и по времени, так как вычислительная процедура повторяется при переходе от j к $j+1$.

Чтобы поставить разностную задачу, соответствующую задаче (1) — (4), необходимо формулировать краевые условия.

4. Постановка разностной задачи

Рассмотрим некоторую цепочку $Ц_\alpha$. Разностное уравнение (10) содержит значения y в точках $x^{(-1_\alpha)}$, x, $x^{(+1_\alpha)}$, этой цепочки в момент $t = t_{j+\alpha/p}$ и значение y в точке x на предыдущем шаге $t = t_{j+(\alpha-1)/p}$. Чтобы определить $y^{j+\alpha/p}$ в узлах $Ц_\alpha$, достаточно задать значения y лишь на концах этой цепочки. Отсюда следует, что функция $y^{j+\alpha/p}$ во всех точках сетки ω_h определяется лишь заданием краевых условий на γ_α, так как каждый внутренний узел ω_h принадлежит некоторой цепочке данного направления Ox_α. Краевая задача будет поставлена, если мы сформулируем краевые условия для отдельной цепочки $Ц_\alpha$.

Проведем прямую $\mathscr{L}_\alpha$, параллельную оси Ox_α, через некоторый узел сетки. Она пересечет границу Г в точках $x_л^*$ и $x_п^*$.

Для упрощения изложения предполагаем, что прямые, параллельные координатным осям, пересекают границу Г только в двух точках. Если пересечение $\mathscr{L}_\alpha$ и G состоит из конечного числа $m > 1$ интервалов, то $Ц_\alpha$ состоит из m частей $Ц_\alpha^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$), для каждой из которых решается своя краевая задача.

Примем, что координата x_α возрастает от точки $x_п^*$ к точке $x_п$. Рассмотрим узел $x_л$, ближайший к точке $x_л^*$, и узел $x_л^{(+1_\alpha)}$, соседний с узлом $x_л$ на цепочке $Ц_\alpha$. Узел x_α, очевидно, является граничным узлом сетки ω_h ($x_л \in \gamma_\alpha$). Значение y в граничном узле $x_л$ определим при помощи линейной интерполяции по значениям y в точках $x_л^*$ и $x_л^{(+1_\alpha)}$, полагая $y = \mu$ в точке $x_л^*$:

$$y = \beta_л y^{(+1_\alpha)} + (1 - \beta_л)\,\mu(x_л^*, t) \quad \text{при } x = x_л \in \gamma_\alpha,\ t = t_{j+\alpha/p}, \tag{14}$$

где $\beta_л = \varkappa_л / (1 + \varkappa_л)$, $\varkappa_л h_\alpha$ — расстояние узла $x_л$ от $x_л^*$, $\mu(x, t)$ — заданная в (3) функция. Аналогично записывается условие на правом конце $x = x_п$ цепочки $Ц_\alpha$:

$$y = \beta_п y^{(-1_\alpha)} + (1 - \beta_п)\,\mu(x_л^*, t) \quad \text{при } x = x_п \in \gamma_\alpha,\ t = t_{j+\alpha/p},$$

где $\beta_л = \varkappa_п / (1 + \varkappa_п)$, $\varkappa_п h_\alpha$ — расстояние узла $x_п$ от $x_п^*$. Отсюда видно, что для одномерной цепочки $Ц_\alpha$ мы получаем краевые условия III рода, причем

$$0 \leqslant \beta_л < 1, \qquad 0 \leqslant \beta_п < 1 \qquad (\varkappa_л \geqslant 0, \quad \varkappa_п \geqslant 0).$$

Значение $\beta_л = 0$ ($\beta_п = 0$) соответствует тому случаю, когда узел $x_л$ ($x_п$) принадлежит границе Г области G.

Такой способ задания граничных условий «со сносом при помощи линейной интерполяции», как известно, имеет второй порядок аппроксимации. Мы не останавливаемся здесь на простейшем условии первого порядка аппроксимации, когда значение y в точке $x_л$ полагается равным значению функции $u = \mu$ в точке $x_л^*$: $y = \mu(x_л^*, t)$ при $x = x_л$ и, аналогично, $y = \mu(x_п^*, t)$ при $x = x_п$.

Перейдем теперь к постановке разностной задачи, соответствующей задаче (1) — (4):

найти функцию y, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую внутри Ω разностным уравнениям

$$\rho y_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha y + \varphi_\alpha \text{ при } x \in \omega_h, \quad t = t_{j+\alpha/p} \text{ при } \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$
$$j = 0, 1, \ldots, K-1 \tag{15}$$

краевым условиям при $x \in \gamma_\alpha$ в момент $t = t_{j+\alpha/p}$

$$\left.\begin{aligned} y &= \beta_л y^{(+1_\alpha)} + (1 - \beta_л)\,\mu\,(x_л^*, t), \quad x = x_л \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \\ y &= \beta_п y^{(-1_\alpha)} + (1 - \beta_п)\,\mu\,(x_п^*, t), \quad x = x_п \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и начальному условию

$$y\,(x, 0) = u_0\,(x), \qquad x \in \omega_h. \tag{17}$$

Отсюда видно, что при фиксированном α мы решаем для каждой цепочки $Ц_\alpha$ одномерное уравнение (15) с краевыми условиями III рода, используя в качестве начальных данных значения $y\,(x,\ t_{j+(\alpha-1)/p})$ во внутренних узлах, найденные при решении такой же задачи в момент $t_{j+(\alpha-1)/p}$ для цепочек $Ц_{\alpha-1}$ по направлению $Ox_{\alpha-1}$. Таким образом, чтобы найти значение y на целом шаге t_{j+1} по данным на шаге t_j, нужно поэтапно решить p одномерных задач по всем координатным направлениям.

Этот метод можно называть и методом дробных шагов, и методом переменных направлений. Однако мы считаем, что название «локально-одномерный метод» лучше отражает существо дела: в любой точке сетки в любой момент времени решается одномерное уравнение. Между тем термин «метод переменных направлений» применяется, например, для многомерной схемы [1], а термин «метод дробных шагов» используется в [11] для характеристики схем, которые лишь при $\alpha > 1$ являются одномерными, а при $\alpha = 1$ — многомерными, и т. д.

Локально-одномерная однородная разностная схема (15) — (17) наиболее экономичная из схем, предложенных в [1] — [3], [5], [6], [11]. Отметим, что для частного случая уравнения с постоянными коэффициентами ($k_\alpha = 1$) и $r_\alpha = q = f = 0$ подобная схема рассматривалась в [4]. Однако при этом обоснование метода проводилось путем исключения $y^{j+\alpha/p}$ при $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$ и изучения получающегося в результате уравнения, связывающего значения y на целых шагах (y^j и y^{j+1}). Так как в это уравнение входил пространственный оператор порядка $2p$, то переход к случаю произвольной области не представлялся очевидным и возникала проблема граничных условий даже для простейшей области — параллелепипеда. Указанный метод в [4] был назван методом расщепления. Происхождение этого названия, как следует из [10], связано с расщеплением или факторизацией (приближенной) многомерного разностного оператора на одномерные.

5. Погрешность аппроксимации

Пусть $u = u\,(x, t)$ — решение задачи (1) — (4), $y = y\,(x, t)$ — решение разностной задачи (15) — (17). Характеристикой точности локально-одномерного метода является разность

$$z = y - u.$$

Подставляя $y = z + u$ в (15) — (17), получим для сеточной функции z,

определенной на $\overline{\Omega}$, следующие условия:

$$\rho z_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha z + \psi_\alpha \text{ на } \Omega, \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} z &= \beta_л z^{(+1_\alpha)} + \nu_л \quad \text{при } x = x_л \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \\ z &= \beta_п z^{(-1_\alpha)} + \nu_п \quad \text{при } x = x_п \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$z(x, 0) = 0, \tag{20}$$

где

$$\psi_\alpha = \Lambda_\alpha u + \varphi_\alpha - \rho u_{\bar{t}_\alpha} \tag{21}$$

означает погрешность аппроксимации одномерной схемы Π_α, $\nu_л$ и $\nu_п$ — погрешность аппроксимации краевых условий.

Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы $\Pi = \{\Pi_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ естественно определить как сумму погрешностей аппроксимации

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha. \tag{22}$$

В самом деле, аппроксимация многомерного уравнения (1) при помощи дномерных схем (15) может быть достигнута только на целом шаге (t_j, t_{j+1}).

Лемма 1. *Если выполнены условия* А, *то*

$$\Psi = O(h^2) + O(\tau) \text{ всюду в } \Omega. \tag{23}$$

Рассмотрим сначала локальную погрешность ψ_α и представим ее в виде

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^0 + \psi_\alpha^*, \text{ где } \psi_\alpha^0 = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} c \frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\beta}, \tag{24}$$

$$\psi_\alpha^* = [\Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} - (L_\alpha u)^{j+\beta}] + \varphi_\alpha - f_\alpha^{j+\beta} - \left[\rho u_{\bar{t}_\alpha} - \frac{1}{p}\left(c \frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\beta}\right], \tag{25}$$

где $\beta \in [0, 1]$ — произвольное число.

Суммируя ψ_α^0 по всем $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ и учитывая уравнение (1) для функции u, получим (при фиксированном j)

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^0 = 0. \tag{26}$$

Покажем теперь, что при любых $t^* \in [t_j, t_{j+1}]$, $t^{**} \in [t_j, t_{j+1}]$

$$\psi_\alpha^* = O(h^2) + O(\tau). \tag{27}$$

В самом деле, если выполнены условия А, то

$$\left(L_\alpha u - \frac{1}{p} c \frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\beta} = L_\alpha^* u^{j+\alpha/p} - \frac{1}{p} c^{**} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\alpha/p} + O(\tau), \tag{28}$$

где

$$L_\alpha^* u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^* \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha^* \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad k_\alpha^* = k_\alpha(x, t^*),$$
$$r_\alpha^* = r_\alpha(x, t^*), \quad c^{**} = c(x, t^{**}).$$

Так как схема $\Lambda_\alpha u$ имеет второй порядок аппроксимации, а

$$\rho - c^{**} = O(h^2), \qquad \rho u_{\bar{t}_\alpha} - \frac{1}{p} c^* \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\alpha/p} =$$
$$= \frac{1}{p}(\rho - c^{**})\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\alpha/p} + \rho\left(u_{\bar{t}_\alpha} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\alpha/p}\right) = O(h^2) + O(\tau),$$

то из (28) и (25) следует (27), а из (26) и (27) — оценка (23).

Таким образом, локально-одномерная схема (15) имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространству. В § 2 будет показано, что порядок точности этой схемы совпадает с порядком аппроксимации.

6. Квазилинейное уравнение

Локально-одномерный метод применим и для решения квазилинейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} c(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f(x, t, u), \\ L_\alpha u &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

В этой статье мы рассмотрим случай, когда «коэффициент теплопроводности» k_α не зависит от u:

$$k_\alpha = k_\alpha(x, t),$$

так как обоснование локально-одномерного метода для такого уравнения проводится так же, как и для линейного уравнения (1). Доказательство сходимости локально-одномерной схемы для уравнения (29) потребует применения довольно громоздкого аппарата интегральных (энергетических) неравенств и будет изложено отдельно.

Итак, рассмотрим в цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ следующую задачу:

$$c(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f(x, t, u) \quad (k_\alpha = k_\alpha(x, t)), \ (x, t) \in Q_T, \tag{30}$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t), \tag{31}$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{32}$$

Коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям:

$$1)\ k_\alpha(x, t) \geqslant c_1 > 0, \qquad c(x, t) \geqslant c_2 > 0 \text{ в } \overline{Q}_T, \tag{33}$$

$$2)\ \frac{\partial r_\alpha}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} \text{ — непрерывные функции аргумента } u. \tag{34}$$

Будем предполагать также, что решение $u = u(x, t)$ задачи (30) — (34) и коэффициенты $k_\alpha(x, t)$, $c(x, t)$, $r_\alpha(x, t, u)$, $f(x, t, u)$, как функции (x, t), удовлетворяют условиям А, формулированным в п. 1.

Однородная локально-одномерная схема в этом случае пишется по аналогии с (15):

требуется найти сеточную функцию y, определенную на $\overline{\Omega}$, удо-

влетворяющую на Ω разностным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\rho y_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha y + \varphi_\alpha, \\ &\Lambda_\alpha y = (a_\alpha (x, t^*)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha (x, t^*, \check{y})\, y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, \qquad \varphi_\alpha = \varphi_\alpha (x, t^*, \check{y}), \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

краевым условиям на S:

$$\left.\begin{aligned} &y = \beta_л y^{(+1_\alpha)} + (1 - \beta_л)\, \mu\, (\overset{*}{x}_л, t), \qquad x = x_л \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p} \\ &y = \beta_п y^{(-1_\alpha)} + (1 - \beta_п)\, \mu\, (\overset{*}{x}_п, t), \qquad x = x_п \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$y\,(x, 0) = u_0\,(x) \tag{37}$$

(см. п. 4, ср. (16) и (36)).

Напомним, что $y_{\bar{t}_\alpha} = (y - \check{y}) / \tau$, $y = y^{j+\alpha/p}$, $\check{y} = y^{j+(\alpha-1)/p}$. Разностное уравнение (35) линейно относительно значений $y = y^{j+\alpha/p}$ на каждом шаге. Поэтому для определения $y^{j+\alpha/p}$ можно воспользоваться известными формулами прогонки для одномерной цепочки $Ц_\alpha$ с краевыми условиями III рода (36) на ее концах.

Этот алгоритм удобен тем, что при определении решения на $j + \alpha/p$-й строке надо помнить значения искомой функции только с предыдущей строки.

Коэффициенты схемы вычисляются по тем же формулам, что и коэффициенты схемы (15) для линейного уравнения (1).

Наряду с (35) можно рассмотреть схему, коэффициенты которой зависят от значений искомой функции на новой строке, так что

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha (x, t^*)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha (x, t^*, y)\, y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, \qquad \varphi_\alpha = \varphi_\alpha (x, t^*, y). \tag{35'}$$

В этом случае для решения получающихся для y нелинейных уравнений нужны итерации, а вычисление итераций следует проводить при помощи формул прогонки. Нелинейная схема (35′) для некоторых задач заслуживает предпочтения, так как в этом случае можно увеличить шаг по времени τ (при заданной точности).

Чтобы найти выражение для погрешности аппроксимации схемы, представим решение задачи (35) — (37) в виде суммы $y = z + u$, где u — решение задачи (30) — (34). Подставляя $y = z + u$ в (35), получим

$$\rho z_{\bar{t}_\alpha} = \overline{\Lambda}_\alpha z + \psi_\alpha, \tag{38}$$

$$\overline{\Lambda}_\alpha z = (a_\alpha (x, t^*)\, z_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha (x, t^*, \check{y})\, z_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + d_\alpha \check{z}, \tag{39}$$

$$\psi_\alpha = (a_\alpha (x, t^*)\, u_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha (x, t^*, \check{u})\, u_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + \varphi_\alpha (x, t^*, \check{u}) - \rho\, (x, t^*)\, u_{\bar{t}_\alpha}, \tag{40}$$

$$d_\alpha = \overline{\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u}(x, t, u)} + \overline{\frac{\partial b_\alpha}{\partial u}(x, t^*, u)}$$

Черта сверху означает, что производные берутся при средних (между $\check{y}$ и $\check{u}$) значениях аргумента u.

При изучении в § 2 сходимости решения задачи (35) — (37) к фиксированному (единственному) решению $u = u\,(x, t)$ ($|u| \leqslant M_0$) задачи (30) — (34) мы предполагаем ограниченность d_α и $b_\alpha\,(x, t, y)$, так как функции r_α и f можно продолжить на область $|u| > M_0$ так, чтобы в этой области r_α, $\partial r_\alpha / \partial u$, $\partial f / \partial u$ были ограничены.

В случае нелинейной схемы (35′) получается уравнение (38), где

$$\bar{\Lambda}_\alpha z = (a_\alpha (x, t^*) z_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha (x, t^*, y) z_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + d_\alpha z. \tag{41}$$

Формулируем теперь условия для погрешности $z = y - u$:

$$\rho z_{\bar{t}_\alpha} = \bar{\Lambda}_\alpha z + \psi_\alpha, \quad (x, t) \in \Omega, \tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned} z &= \beta_л z^{(+1_\alpha)} + \nu_{л,\alpha} \quad \text{при } x = x_л \in \gamma_\alpha, \ t = t_{j+\alpha/p}, \\ z &= \beta_п z^{(-1_\alpha)} + \nu_{п,\alpha} \quad \text{при } x = x_п \in \gamma_\alpha, \ t = t_{j+\alpha/p}, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$z(x, 0) = 0, \tag{44}$$

где $\nu_{л,\alpha}$, $\nu_{п,\alpha}$ — погрешность аппроксимации краевых условий.

Погрешность аппроксимации Ψ однородной локально-одномерной схемы (35) определяется как сумма локальных погрешностей

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha. \tag{45}$$

По аналогии с п. 4 устанавливается справедливость леммы 1:

$$\Psi = O(h^2) + O(\tau), \quad (x, t) \in \Omega, \tag{46}$$

причем

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^0 + \psi_\alpha^*, \quad \psi_\alpha^* = O(h^2) + O(\tau), \quad \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^0 = 0. \tag{47}$$

Напомним, что

$$\nu_{л,\alpha} = O(h_\alpha^2), \quad \nu_{п,\alpha} = O(h_\alpha^2). \tag{48}$$

Для оценки точности схемы (15) — (17) и (30) — (34) необходимо доказать устойчивость решения задач (18) — (20) и (42) — (44) относительно правых частей ψ_α и $\nu_{л,\alpha}$, $\nu_{п,\alpha}$, используя при этом (47).

Соответствующая теорема об устойчивости будет доказана в § 2.

7. Третья краевая задача для параллелепипеда

Пусть $\bar{G} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ есть p-мерный параллелепипед, на границе которого заданы краевые условия III рода

$$\left.\begin{aligned} k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} &= \sigma_{1\alpha} u + \mu_{1\alpha}(x, t) \quad \text{при } x_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \\ -k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} &= \sigma_{2\alpha} u + \mu_{2\alpha}(x, t) \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Коэффициенты $\sigma_{1\alpha}(x, t)$, $\sigma_{2\alpha}(x, t)$ удовлетворяют условиям

$$\sigma_{1\alpha}(x, t) \geqslant c_6 > 0, \quad \sigma_{2\alpha}(x, t) \geqslant c_6 > 0, \tag{50}$$

где c_6 — некоторая постоянная.

Простейшим разностным аналогом этих условий являются краевые условия

$$\left.\begin{aligned} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} &= \sigma_{1\alpha} y + \mu_{1\alpha}(x, t) \quad \text{при } x_\alpha = 0, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \\ -a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} &= \sigma_{2\alpha} y + \mu_{2\alpha}(x, t) \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Эти краевые условия имеют первый порядок аппроксимации. Пусть $u = u(x, t)$ — решение уравнения (1) (или (29)) с краевыми условиями (49)

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{3}$$

а $y = y(x, t)$ $((x, t) \in \overline{\Omega})$ — решение уравнений (15) (или (35)) с краевыми условиями (51) и начальным условием

$$y(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \omega_h. \tag{52}$$

Тогда для разности $z = y - u$ получим уравнение (18) с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha} &= \sigma_{1\alpha} z - \overset{*}{\nu}_{1\alpha} \quad \text{при } x_\alpha = 0, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \\ -a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha} &= \sigma_{2\alpha} z + \overset{*}{\nu}_{2\alpha} \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

где

$$\overset{*}{\nu}_{1\alpha} = \left(a_\alpha^{(+1_\alpha)} u_{x_\alpha} - k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)_{x_\alpha=0} = O(h_\alpha),$$

$$\overset{*}{\nu}_{2\alpha} = \left(a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} - k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)_{x_\alpha=l_\alpha} = O(h_\alpha).$$

Перепишем условия (53) в виде

$$\begin{aligned} z &= \beta_л z^{(+1_\alpha)} + \nu_{1\alpha} \quad \text{при } x_\alpha = 0, \quad 0 < x_\beta < l_\beta, \ \beta \neq \alpha, \ t = t_{j+\alpha/p}, \\ z &= \beta_п z^{(-1_\alpha)} + \nu_{2\alpha} \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha, \quad 0 < x_\beta < l_\beta, \ \beta \neq \alpha, \ t = t_{j+\alpha/p}, \end{aligned} \tag{53'}$$

где

$$\beta_л = \frac{a_{\alpha,0}^{(+1_\alpha)}}{\Delta_{1\alpha}}, \qquad \beta_п = \frac{a_{\alpha,N_\alpha}}{\Delta_{2\alpha}}, \qquad \nu_{1\alpha} = \frac{h_\alpha \overset{*}{\nu}_{1\alpha}}{\Delta_{1\alpha}}, \qquad \nu_{2\alpha} = -\frac{h_\alpha \overset{*}{\nu}_{2\alpha}}{\Delta_{2\alpha}},$$

$$a_{\alpha,0} = a_\alpha|_{x_\alpha=0}, \qquad a_{\alpha,N_\alpha} = a_\alpha|_{x_\alpha=N_\alpha h_\alpha=l_\alpha}, \qquad \Delta_{1\alpha} = a_{\alpha,0}^{(+1_\alpha)} + \sigma_{1\alpha} h_\alpha,$$

$$\Delta_{2\alpha} = a_{\alpha,N_\alpha} + \sigma_{2\alpha} h_\alpha.$$

Таким образом, погрешность решения разностной краевой задачи (15), (51), (52) также удовлетворяет уравнению (18), нулевому начальному условию $z(x, 0) = 0$ и краевым условиям (53), по форме аналогичным условиям (19). Поэтому изучение сходимости нашего разностного метода будет проводиться одновременно для первой краевой задачи в случае произвольной области и для третьей краевой задачи в случае параллелепипеда.

§ 2. О равномерной сходимости и точности локально-одномерной схемы

В этом параграфе будет доказана равномерная сходимость и дана равномерная оценка порядка точности локально-одномерного метода для линейного уравнения (1) и квазилинейного уравнения (29) в случае произвольной области.

1. Равномерная устойчивость

Покажем, что разностная задача (15) — (18) поставлена корректно, т. е. ее решение непрерывно зависит от правой части уравнения (15), начальных и граничных данных. Рассмотрим следующую задачу: найти функцию z, определенную на сетке $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую внутри Ω уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \rho z_{\bar{t}_\alpha} &= \Lambda_\alpha z + \psi(x, t) \quad \text{при } x \in \omega_h, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \\ \Lambda_\alpha z &= (a_\alpha(x, t)\, z_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_{1\alpha} z_{x_\alpha} + b_{2\alpha} z_{\bar{x}_\alpha} - d_{1\alpha} z - d_{2\alpha} \check{z}, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

краевым условиям на границе S сеточной области

$$\left.\begin{aligned} z &= \beta_л z^{(+1_\alpha)} + \nu_л \quad \text{при } x = x_л \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \\ z &= \beta_п z^{(-1_\alpha)} + \nu_п \quad \text{при } x = x_п \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p} \end{aligned}\right\}. \tag{55}$$

и начальному условию

$$z(x, 0) = z_0(x). \tag{56}$$

Коэффициенты a_α, $b_{1\alpha}$, $b_{2\alpha}$, $d_{1\alpha}$, $d_{2\alpha}$, $\beta_л$, $\beta_п$ удовлетворяют условиям

$$a_\alpha \geqslant c_1 > 0, \qquad \rho \geqslant c_2 > 0, \qquad |d_{s\alpha}| \leqslant c_3, \qquad |b_{s\alpha}| \leqslant c_4, \qquad s = 1, 2, \tag{57}$$

$$0 \leqslant \beta_л \leqslant \beta^* < 1, \qquad 0 \leqslant \beta_п \leqslant \beta^* < 1, \tag{58}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4, β^* — положительные постоянные, не зависящие от шагов h_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$ и τ разностной сетки. Возможны два случая:

1) краевая задача I рода для произвольной области: $\beta = \varkappa / (1 + \varkappa)$ (индексы л, п, α пока опускаем), где $0 \leqslant \varkappa \leqslant c_5$, $c_5 > 0$ — постоянная, не зависящая от сетки; при этом

$$\begin{gathered} 1 - \beta = 1 / (1 + \varkappa) \geqslant 1 / (1 + c_5) = \beta_* > 0, \\ 1 - \beta_л \geqslant \beta_*, \qquad 1 - \beta_п \geqslant \beta_*; \end{gathered} \tag{59}$$

2) краевая задача III рода для параллелепипеда:

$$\beta = \frac{a}{a + \sigma h}$$

все индексы также опускаем).

В случае первой краевой задачи ($z = \nu_л$, $z = \nu_п$) для параллелепипеда

$$\beta_л = 0, \quad \beta_п = 0, \quad \beta_* = 1.$$

Все рассмотренные в § 1 схемы $\Lambda_\alpha z$ являются частным случаем схемы (54). Поэтому полученные ниже результаты справедливы для задач (18) — (20), (38) — (40) и (38), (53), (40).

Теорема 1. *Пусть $z = z(x, t)$ — решение задачи* (54) — (58). *Тогда при достаточно малом $\tau < \tau_0$ и любом h_α справедлива оценка*

$$z(x, t)\|_0 \leqslant M_1 (\| z(x, 0)\|_0 + \|\nu(x, t)\|_{0,s}) + M_2 \Big(\sum_{t'=\tau/p}^{t} \tau \|\psi(x, t')\|_0^2 \Big)^{1/2}, \tag{60}$$

где

$$\|z(x, t)\|_0 = \max_{x \in \overline{\omega}_h} |z(x, t)|, \qquad \|\nu(x, t)\|_{0,s} = \max_{(x,t) \in S} |\nu(x, t)|,$$

$$\nu(x, t) = \nu_{л,\alpha}; \quad x = x_л \in \gamma_\alpha; \qquad \nu = \nu_{п,\alpha}, \qquad x = x_п \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p},$$

M_1, M_2 — положительные постоянные, зависящие только от c_1, c_2, c_3, c_4, β_*, T.

Доказательство теоремы проводится методом, изложенным в § 1 статьи [18], и основано на использовании принципа максимума для разностных параболических уравнений. Введем новую функцию v, полагая

$$z^{j+\alpha/p} = (1 + \overline{M}\tau)^{pj+\alpha} v^{j+\alpha/p}, \tag{61}$$

где $\overline{M}$ — произвольная положительная постоянная, которую мы выбе-

рем позже. Для сеточной функции v получим уравнение

$$\bar{\rho} v_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha^* v - d_\alpha v + \bar{\psi}, \ \Lambda_\alpha^* v = (a_x v_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_{1\alpha} v_{x_\alpha} + b_{2\alpha} v_{\bar{x}_\alpha} - \bar{d}_{2\alpha} \check{v}, \tag{62}$$

краевые условия

$$\left.\begin{aligned} v &= \beta_л v^{(+1_\alpha)} + \bar{\nu}_л \quad \text{при} \quad x = x_л \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \\ v &= \beta_п v^{(-1_\alpha)} + \bar{\nu}_п \quad \text{при} \quad x = x_п \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

и начальное условие

$$v(x, 0) = z(x, 0). \tag{64}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\rho} = \rho\varepsilon, \quad \bar{d}_{2\alpha} = d_{2\alpha}\varepsilon, \quad d_\alpha = d_{1\alpha} + \bar{M}\bar{\rho}, \quad \varepsilon = (1 + \bar{M}\tau)^{-1}, \\ &\bar{\psi} = \psi\varepsilon^{jp+\alpha} \quad (\psi = \psi^{j+\alpha/p} = \psi(x, t_{j+\alpha/p}), \quad \bar{\nu} = \nu\varepsilon^{jp+\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Умножая (62) и (63) на $2v$ и проводя рассуждения по аналогии с [18], получим уравнение первого ранга

$$\bar{\rho}(v^2)_{\bar{t}_\alpha} - (a_\alpha (v^2)_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + R_\alpha(v) + 2d_\alpha v^2 = 2v(b_{1\alpha} v_{x_\alpha} + b_{2\alpha} v_{\bar{x}_\alpha}) -$$

$$- (2\bar{d}_{2\alpha}\check{v}v + 2v\bar{\psi},$$

$$\left.\begin{aligned} 2(1 - \beta_л) v^2 + \beta_л h_\alpha v_{x_\alpha}^2 &= \beta_л (v^2)_{x_\alpha} + 2v\bar{\nu}_л, \\ 2(1 - \beta_п) v^2 + \beta_п h_\alpha v_{\bar{x}_\alpha}^2 &= \beta_п (v^2)_{\bar{x}_\alpha} + 2v\bar{\nu}_п, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

$$R_\alpha(v) = \tau\bar{\rho} v_{\bar{t}_\alpha}^2 + a_\alpha v_{\bar{x}_\alpha}^2 + a_\alpha^{(+1_\alpha)} v_{x_\alpha}^2 \quad (v_{\bar{t}_\alpha}^2 = (v_{\bar{t}_\alpha})^2, \ v_{x_\alpha}^2 = (v_{x_\alpha})^2 \text{ и т. д.}).$$

Рассуждая по аналогии с [18], приходим к неравенству

$$\bar{\rho}(v^2)_{\bar{t}_\alpha} - (a_\alpha (v^2)_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + 2d_* v^2 \leqslant \frac{\bar{\psi}^2}{c_0}, \text{ где } d_* > 0, \tag{67}$$

или

$$\bar{\rho} v^2 - \tau (a_\alpha (v^2)_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + 2d_* \tau v^2 \leqslant \bar{\rho}\check{v}^2 + \frac{\bar{\psi}^2}{c_0}\tau, \tag{68}$$

которое выполняется при достаточно малом τ и достаточно большом $\bar{M}$:

$$\tau < \tau_0, \qquad \tau_0 \leqslant \frac{c_2}{c_*}\left(1 - \frac{M_*}{\bar{M}}\right), \quad \bar{M} > M_* = \frac{(c_3 + c_*)c_* + 0.5\, c_3^2}{c_2 c_*},$$

$$c_* = \frac{c_4^2}{c_1} + c_3 + 0.5\, c_0.$$

Здесь c_0 — произвольная положительная постоянная, которая выбирается так, чтобы постоянная M_2 в (60) была минимальной.

Учитывая, что $2|v\bar{\nu}| \leqslant \beta_* v^2 + \bar{\nu}^2/\beta_*$, получим из (14)

$$\left.\begin{aligned} v^2 - \beta_л \beta_*^{-1} (v^2)_{x_\alpha} &\leqslant \bar{\nu}_л^2/\beta_*^2, \\ v^2 + \beta_п \beta_*^{-1} (v^2)_{\bar{x}_\alpha} &\leqslant \bar{\nu}_п^2/\beta_*^2, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

где $\beta_* = 1 - \beta^* > 0$.

Представим v в виде суммы $v = v^{(1)} + v^{(2)}$, где $v^{(1)}$ — решение задачи (62) — (64) при $\bar{\psi} = 0$, а $v^{(2)}$ — решение той же задачи с однородными граничными и начальными условиями ($\nu_л = 0$, $\nu_п = 0$, $v^{(2)}(x, 0) = 0$). Функция $w = (v^{(1)})^2$ принимает свое максимальное значение на границе области Ω. В самом деле, пусть w имеет максимум в некоторой точке P внутри Ω. Тогда в этой точке $w_{\bar{t}_\alpha} \geqslant 0$, $(a_\alpha w_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} \leqslant 0$, что противоречит неравенству $\bar{\rho} w_{\bar{t}_\alpha} - (a_\alpha w_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + 2d_* w \leqslant 0$. Если $P = P(x, 0)$, то $\|w\|_0 \leqslant \|z(x, 0)\|_0^2$. Если $P = P(x_л, t_{j+\alpha/p})$, то в этой точке $w_{x_\alpha} \leqslant 0$ и первое из неравенств (69) дает $w \leqslant \|\bar{\nu}_л\|_0^2 / \beta_*^2$. Полагая затем $P = P(x_п, t_{j+\alpha/p}$ и учитывая, что $w_{\bar{x}_\alpha} \geqslant 0$, из второго неравенства (69) получим $w \leqslant \|\bar{\nu}_п\|_0^2 / \beta_*^2$ Отсюда следует, что всегда выполнено неравенство

$$\|v^{(1)}(x, t)\|_0 \leqslant \|z(x, 0)\|_0 + \frac{1}{\beta_*} \|\bar{\nu}(x, t)\|_{0, s}. \tag{70}$$

Для функции $\bar{w} = (v^{(2)})^2$ выполняется неравенство (68). В силу однородности краевых условий функция $\bar{w}$ должна принимать максимальное значение в некоторой внутренней точке области ω_h. Так как в этой точке $(a_\alpha w_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} \leqslant 0$, то из неравенства (68) должно следовать

$$\|\bar{w}\|_0 \leqslant \|\check{\bar{w}}\|_0 + \bar{c}\tau \|\bar{\psi}\|^2, \qquad \bar{c} = (c_0 c_2)^{-1} (1 + \bar{M}\tau),$$

где

$$\bar{w} = \bar{w}(x, t_{j+\alpha/p}), \quad \check{\bar{w}} = \bar{w}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}); \quad \begin{array}{l} j = 0, 1, \ldots, \\ \alpha = 1, 2, \ldots, p. \end{array}$$

Суммируя эти неравенства по всем значениям $t' \leqslant t_{j+\alpha/p} = t$ и учитывая начальное условие $\bar{w}(x, 0) = 0$, находим

$$\|v^{(2)}(x, t)\|_0 \leqslant \sqrt{\bar{c}} \left[\sum_{t'=\tau/p}^{t} \tau \|\bar{\psi}(x, t')\|_0^2 \right]^{1/2}. \tag{71}$$

Из (18) и (20) следует

$$\|v(x, t)\|_0 \leqslant \|v(x, 0)\|_0 + \frac{1}{\beta_*} \|\bar{\nu}(x, t)\|_{0, s} + \sqrt{\bar{c}} \left[\sum_{t'=\tau/p}^{t} \tau \|\bar{\psi}(x, t')\|_0^2 \right]^{1/2}. \tag{72}$$

Возвращаясь к функции $z(x, t)$, в соответствии с (61) и (65), получаем из (72) оценку (60).

Тем самым теорема доказана.

Замечания. 1. Теорема 1 справедлива для первой краевой задачи ($z = \nu_1$, $z = \nu_2$). В этом случае

$$\beta_л = \beta_п = 0, \quad \beta_* = 1.$$

2. Теорема 1 справедлива для третьей краевой задачи в параллелепипеде $\bar{G}$ ($0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$):

$$\left.\begin{array}{ll} a_\alpha^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha} = \sigma_{1\alpha} z - \nu_{1\alpha} & \text{при } x_\alpha = 0, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \\ -a_\alpha z_{\bar{x}_\alpha} = \sigma_{2\alpha} z + \nu_{2\alpha} & \text{при } x_\alpha = l_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \end{array}\right\} \tag{73}$$

если $\sigma_{1\alpha} \geqslant c_6 > 0$, $\sigma_{2\alpha} \geqslant c_6 > 0$. В этом случае в (70) следует формально положить $\beta_* = c_6 h_\alpha$, $\bar{\nu}$ заменить на $\bar{\nu} h_\alpha$. Поэтому в (60) будут фигурировать те ν, которые входят в условия (73).

3. Если $b_{1\alpha} = b_{2\alpha} = d_{2\alpha} = 0$, $d_{1\alpha} \geqslant c_7 > 0$, где c_7 — некоторая положительная постоянная, не зависящая от h_α и τ, то оценка (60) теоремы 1 справедлива при любых τ и h_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$. В этом случае нет необходимости переходить к функции v при помощи (61), а c_0 можно положить, например, равным $0.5\, c_7$.

2. Точность локально-одномерной схемы

Вернемся теперь к задаче (18) — (20) для погрешности $z = y - u$, где u — решение исходной задачи (1) — (4), а y — решение разностной задачи (15)—(18). Чтобы оценить функцию z, положим

$$z = v + \eta,$$

где η — сеточная функция, определяемая условиями

$$\left.\begin{aligned} &\rho\eta_{\bar{t}_\alpha} = \psi_\alpha^0 \quad \text{внутри } \Omega, \\ &\eta(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Функция η вводится для того, чтобы использовать свойство

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^0 = 0. \tag{75}$$

Уравнение (74) позволяет определить $\eta = \eta^{j+\alpha/p}$ только внутри области Ω. Доопределим η на границе S сетки $\overline{\Omega}$, полагая

$$(a_\alpha \eta_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = 0 \tag{76}$$

в узлах $x_л^{(+1_\alpha)}$, $x_п^{(-1_\alpha)}$ цепочки $Ц_\alpha$, соседних с ее граничными узлами $x_л$ и $x_п$. Условие (76) позволяет определить η в граничных узлах $x_л$ и $x_п$:

$$\begin{aligned} &\eta = \eta^{(+1_\alpha)} - a_\alpha^{(+2_\alpha)} (\eta^{(+2_\alpha)} - \eta^{(+1_\alpha)})/a_\alpha^{(+1_\alpha)} \quad \text{при } x = x_л \in \gamma_\alpha, \\ &\eta = \eta^{(-1_\alpha)} + a_\alpha^{(-1_\alpha)} (\eta^{(-1_\alpha)} - \eta^{(-2_\alpha)})/a_\alpha \quad \text{при } x = x_п \in \gamma_\alpha. \end{aligned} \tag{77}$$

Лемма 2. *Если выполнено условие* (75), *то функция* η, *определяемая на* Ω *условиями* (74) *и* (76), *имеет вид*

$$\begin{gathered} \eta(x, t_{j+\alpha/p}) = \frac{\tau}{\rho} \sum_{\sigma=1}^{\alpha} \psi_\sigma^0 = -\frac{\tau}{\rho} \sum_{\sigma=\alpha+1}^{p} \psi_\sigma^0, \\ \eta(x, t_{j+1}) = 0 \end{gathered} \tag{78}$$

для любых j, *т. е.* $\eta = 0$ *на целых шагах и* $\eta = O(\tau)$ *на дробных шагах.*

Отметим прежде всего, что при фиксированном j коэффициент ρ не меняется при изменении α, т. е. на всех шагах $j + \alpha/p$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ (j фиксировано) ρ имеет одно и то же значение. Из уравнения (74) следует

$$\eta^{j+\alpha/p} = \eta^{j+(\alpha-1)/p} + \psi_\alpha^0/\rho.$$

Полагая $j = 0$, суммируя по α и учитывая условия (75) и $\eta(x, 0) = 0$, находим $\eta^1 = 0$. Продолжая рассуждения, приходим к (78).

Формулируем теперь условия для функции $v = z - \eta$. Для этого подставим $z = v + \eta$ в (18) и (19) и учтем условия (74). Тогда получим

$$\rho v_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha v + \tilde{\psi}_\alpha \quad \text{на } \Omega, \tag{79}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \beta_л v^{(+1_\alpha)} + \tilde{\nu}_л \quad \text{при } x = x_л \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \\ v &= \beta_п v^{(-1_\alpha)} + \tilde{\nu}_п \quad \text{при } x = x_п \in \gamma_\alpha, \quad t = t_{j+\alpha/p}, \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

$$v(x, 0) = 0, \tag{81}$$

где

$$\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^* + \Lambda_\alpha \eta,$$

$$\tilde{\nu}_л = \nu_л + (\beta_л \eta^{(+1_\alpha)} - \eta), \qquad \tilde{\nu}_п = \nu_п + (\beta_п \eta^{(-1_\alpha)} - \eta).$$

Значения η при $x = x_л$ и $x = x_п$ определяются по формулам (77). В узле $x_л^{(+1_\alpha)}$, соседнем на цепочке $Ц_\alpha$ с узлом $x_л$, имеем

$$\eta_{\bar{x}_\alpha} = (\eta^{(+2_\alpha)} - \eta)\frac{1}{2h_\alpha} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)}}{a_\alpha}\right)\eta_{x_\alpha}$$

и, следовательно,

$$\Lambda_\alpha \eta = \frac{1}{2} b_\alpha \left(1 + \frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)}}{a_\alpha}\right)\eta_{x_\alpha} - d_\alpha \eta. \tag{82}$$

Аналогичное выражение получается для $\Lambda_\alpha \eta$ в узле $x_п^{(-1_\alpha)}$. Отсюда и из (78) следует, что $\Lambda_\alpha \eta = O(\tau)$, если выполнены условия А.

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\tilde{\psi}_\alpha = O(h^2) + O(\tau), \qquad \tilde{\nu}_л = O(h^2) + O(\tau), \qquad \tilde{\nu}_п = O(h^2) + O(\tau). \tag{83}$$

Для оценки функции v воспользуемся теоремой 1, учитывая при этом, что из условий А и свойств шаблонных функционалов схемы следует ограниченность коэффициентов

$$a_\alpha \geqslant c_1 > 0, \qquad \rho \geqslant c_2 > 0, \qquad |d_\alpha| \leqslant c_3, \qquad |b_\alpha| \leqslant c_4,$$
$$0 \leqslant \beta_л \leqslant \beta^* < 1, \qquad 0 \leqslant \beta_п \leqslant \beta^* < 1$$

и потому теорема 1 применима. Пользуясь оценками (60), (83) и леммой 2, заключаем, что справедлива следующая

Теорема 2. *Локально-одномерная разностная схема* (15) — (17) *равномерно в* $\bar{\Omega}$ *сходится со скоростью* $O(h^2) + O(\tau)$ *при независимом стремлении* h *и* τ *к нулю; точнее, если выполнены условия* А (п. 1, § 1), *то при достаточно малом* $\tau < \tau_0$ *справедлива оценка*

$$\|y(x, t) - u(x, t)\|_0 \leqslant M(h^2 + \tau), \qquad h^2 = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2 \tag{84}$$

для всех $t = t_{j+\alpha/p}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, *где* u — *решение задачи* (1) — (4), y — *решение разностной задачи* (15) — (18), M — *положительная постоянная, не зависящая от выбора разностной сетки.*

В самом деле, в силу леммы 2

$$\eta = O(\tau) \quad \text{или} \quad \|\eta\|_0 < M\tau.$$

Из теоремы 1 и (83) следует, что

$$\|v(x, t)\|_0 \leqslant M(h^2 + \tau).$$

Отсюда заключаем, что

$$\|z(x, t)\|_0 = \|y(x, t) - u(x, t)\|_0 \leqslant \|\eta(x, t)\|_0 + \|v(x, t)\|_0 \leqslant M(h^2 + \tau).$$

Аналогично доказывается

Теорема 3. *Если выполнены условия А, то локально-однородная разностная схема* (35) — (37) *равномерно сходится со скоростью* $O(h^2) + O(\tau)$, *так что при достаточно малом* $\tau < \tau_0$ *справедлива оценка* (84), *где* u — *решение задачи* (30) — (34), *а* y — *решение соответствующей задачи* (35) — (37).

Замечания. 1. Решение разностной краевой задачи для параллелепипеда с краевыми условиями III рода (51) равномерно сходится со скоростью $O(h) + O(\tau)$ как в случае уравнения (1), так и в случае уравнения (29).

Порядок точности по h в этом случае можно повысить, выбирая более мелкую сетку вблизи границы. Если, например, первый шаг вблизи границы имеет порядок $O(h^2)$, то величина погрешности за счет аппроксимации краевых условий будет $O(h^2)$. В результате мы получим неравномерную сетку, на которой порядок аппроксимации для схемы Λ_α, вообще говоря, понижается, в связи с чем требуется новое исследование для выяснения интегрального порядка точности разностной схемы. Для этой цели необходимы специальные априорные оценки, которые будут получены во второй части нашей статьи. Изучение сходимости однородных разностных схем на произвольных неравномерных сетках будет рассмотрено отдельно.

2. Если $p = 2$, то условия А могут быть ослаблены. В этом случае существование смешанных производных функций u, k_α не используется.

§ 3. Дополнение

1. Для иллюстрации локально-одномерного метода выпишем счетные формулы для двумерного уравнения теплопроводности и прямоугольника ($0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $p = 2$):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + f(x_1, x_2, t), \\ &u(0, x_2, t) = \mu_{11}(x_2, t), \qquad u(l_1, x_2, t) = \mu_{12}(x_2, t), \\ &u(x_1, 0, t) = \mu_{21}(x_1, t), \qquad u(x_1, l_2, t) = \mu_{22}(x_1, t), \\ &u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2). \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Рассмотрим сетку $x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $t_j = j\tau$, где $i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha$, $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$, $j = 0, 1, \ldots, K$, $\tau = T/K$. В этом случае вводится один дробный шаг $t_{j+1/2} = t_j + 0.5\tau$. Обозначим $y_{i_1 i_2}^{j+\alpha/2} = y^{j+\alpha/2} = y(i_1 h_1, i_2 h_2, (j + 0.5\alpha)\tau)$, $\alpha = 1, 2$, сеточную функцию

Напишем локально-одномерную схему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \varphi_1, \\ &\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 y^{j+1} + \varphi_2, \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

$$\left.\begin{aligned} &y_{0 i_2}^{j+1/2} = \mu_{11}(i_2 h_2, t_{j+1/2}), \qquad y_{N_1, i_2}^{j+1/2} = \mu_{12}(i_2 h_2, t_{j+1/2}), \\ &y_{i_1 0}^{j+1} = \mu_{21}(i_1 h_1, t_{j+1}), \qquad y_{i_1, N_2}^{j+1} = \mu_{22}(i_1 h_1, t_{j+1}), \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

$$y_{i_1 i_2}^0 = u_0(i_1 h_1, i_2 h_2), \tag{88}$$

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)}(y^{(+1_\alpha)} - y) - a_\alpha(y - y^{(-1_\alpha)})}{h_\alpha^2},$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2} f(x_1, x_2, t_{j+0.5\alpha}) \text{ или } \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = f(x_1, x_2, t_{j+1}) \text{ и др.},$$

$$a_1(x_1, x_2, t) - k_1(x_1 - 0.5h_1, x_2, t) = O(h^2),\ a_2 - k_2^{(-0.5\alpha)} = O(h^2).$$

Приведем простейшие выражения для a_α:

$$a_\alpha = k_\alpha^{(-0.5\alpha)}, \text{ т. е. } a_1 = k_1(x_1 - 0.5h_1, x_2, t),\ a_2 = k_2(x_1, x_2 - 0.5h_2, t) \quad (x_\alpha = i_\alpha h_\alpha),$$

$$a_\alpha = 2k_\alpha^{(-1\alpha)} k_\alpha / (k_\alpha^{(-1\alpha)} + k_\alpha), \qquad a_1 = \frac{1}{2}[k_1(x_1 - 0.5h_1, x_2 - 0.5h_2, t) +$$

$$+ k_1(x_1 - 0.5h_1, x_2 + 0.5h_2, t)] \text{ и др.}$$

Приведем счетные формулы для решения задачи (86) — (88). Разностные уравнения (86) перепишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &(a_1)_{i_1 i_2} y_{i_1-1, i_2}^{j+1/2} - \left((a_1)_{i_1 i_2} + (a_1)_{i_1+1, i_2} + \frac{h_1^2}{\tau}\right) y_{i_1 i_2}^{j+1/2} + (a_1)_{i_1+1, i_2} y_{i_1+1, i_2}^{j+1/2} = -F_{i_1 i_2}^{j+1/2} \\ &\qquad (0 < i_1 < N_1), \\ &y_{i_1 i_2}^{j+1/2} = \mu_{11}(i_2 h_2, t_{j+1/2}), \qquad y_{N_1, i_2}^{j+1/2} = \mu_{12}(i_2 h_2, t_{j+1/2}), \\ &F_{i_1 i_2}^{j+1/2} = \frac{h_1^2}{\tau} y_{i_1 i_2}^j + h_1^2 \varphi_{1, i_1 i_2}, \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

$$\left.\begin{aligned} &(a_2)_{i_1 i_2} y_{i_1, i_2-1}^{j+1} - \left((a_2)_{i_1 i_2} + (a_2)_{i_1 i_2+1} + \frac{h_2^2}{\tau}\right) y_{i_1 i_2}^{j+1} + (a_2)_{i_1 . i_2+1} y_{i_1, i_2+1}^{j+1} = -F_{i_1 i_2}^{j+1} \\ &\qquad (0 < i_2 < N_2), \\ &y_{i_1, 0}^{j+1} = \mu_{21}(i_1 h_1, t_{j+1}), \qquad y_{i_1, N_2}^{j+1} = \mu_{22}(i_1 h_1, t_{j+1}), \\ &F_{i_1 i_2}^{j+1} = \frac{h_2^2}{\tau} y_{i_1 i_2}^{j+1/2} + h_2^2 (\varphi_2)_{i_1 i_2}. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Отсюда видно, что для $y_{i_1 i_2}^{j+1/2}$ и $y_{i_1 i_2}^{j+1}$ получаются аналогичные задачи: задача (89) решается для отрезков $0 \leqslant x_1 \leqslant l_1$ при различных $i_2 = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$, а задача (90) — для отрезков $0 \leqslant x_2 \leqslant l_2$ при различных $i_1 = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$. Вводя обозначения $y^{(\alpha)} = y_{i_1 i_2}^{j+\alpha/2}$ $(\alpha = 1, 2)$, $a_\alpha = (a_\alpha)_{i_1 i_2}$, $a_1^{(\pm 1_1)} = (a_1)_{i_1 \pm 1, i_2}$, $a_2^{(\pm 1_2)} = (a_2)_{i_1, i_2 \pm 1}$, можно записать формулы (89) — (90) в виде

$$\left.\begin{aligned} &a_\alpha y^{(-1\alpha)} - \left(a_\alpha + a_\alpha^{(+1\alpha)} + \frac{h_\alpha^2}{\tau}\right) y + a_\alpha^{(+1\alpha)} y^{(+1\alpha)} = -\overset{(\alpha)}{F} \qquad (y = \overset{(\alpha)}{y}), \\ &\overset{(\alpha)}{y}\Big|_{x_\alpha = 0} = \mu_{\alpha 1}^{j+\alpha/2}, \qquad \overset{(\alpha)}{y}\Big|_{x_\alpha = l_\alpha} = \mu_{\alpha 2}^{j+\alpha/2}, \qquad \alpha = 1, 2, \\ &\overset{(\alpha)}{F} = \frac{h_\alpha^2}{\tau} \overset{(\alpha-1)}{y} + h_\alpha^2 \varphi_\alpha, \qquad \overset{(0)}{y} = y^j. \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Краевые задачи (91) могут быть решены при помощи известных формул прогонки

$$\xi_\alpha^{(+1\alpha)} = \frac{a_\alpha^{(+1\alpha)}}{a_\alpha^{(+1\alpha)} + (1 - \xi_\alpha) a_\alpha + h_\alpha^2/\tau}, \qquad \xi_\alpha = 0 \text{ при } x_\alpha = h_\alpha, \tag{92}$$

$$\eta_\alpha^{(+1\alpha)} = \frac{\xi_\alpha^{(+1\alpha)}}{a_\alpha^{(+1\alpha)}} (a_\alpha \eta_\alpha + \overset{(\alpha)}{F}), \qquad \eta_\alpha = \overset{(\alpha)}{\mu}_{\alpha 1} \text{ при } x_\alpha = h_\alpha \tag{93}$$

$$y = \xi_\alpha^{(+1\alpha)} y^{(+1\alpha)} + \eta_\alpha^{(+1\alpha)},\ y = \overset{(\alpha)}{y} = \overset{(\alpha)}{\mu}_{\alpha 2} \text{ при } x_\alpha = l_\alpha = N_\alpha h_\alpha. \tag{94}$$

Формулы в такой записи удобны для программирования. В момент $t = t_{j+0.5}$ вычисления проводятся по формулам (92) — (94) при $\alpha = 1$, в момент $t = t_{j+1}$ в формулах (92) — (94) полагается $\alpha = 2$.

В частном случае уравнения с постоянными коэффициентами $k_\alpha = 1$ будем иметь $a_\alpha = 1$ и формулы (92) — (94) упрощаются.

2. Приведем для сравнения другие экономичные схемы, рассматривавшиеся в [1], [2], [4], для уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

В работе [1]: $\dfrac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = 0.5\,(\Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j)$, $\quad \dfrac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = 0.5\,(\Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^{j+1})$.

В работе [2]: $\dfrac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j$, $\quad \dfrac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 y^{j+1} - \Lambda_2 y^j$.

В работе [4]:

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda_1\,(\sigma y^{j+1/2} + (1-\sigma)\,y^j),$$
$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \Lambda_2\,(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma)\,y^{j+1/2}), \qquad \text{где} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1. \tag{95}$$

Так как каждое уравнение содержит значения с двух слоев $j + \alpha/2$ и $j + (\alpha - 1)/2$ ($\alpha = 1, 2$), то краевые условия (при $\sigma \neq 1$) в точках $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$ нужны при $t = t_j$ и $t = t_{j+1/2}$ для определения $y^{j+1/2}$, а значения при $x_2 = 0$, $x_2 = l_2$ нужны при $t = t_{j+1/2}$ и $t = t_{j+1}$ для определения y^{j+1}.

В работе [11]: $\dfrac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = 0.5\,(\Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_1 y^j) + 0.5\,\Lambda_2 y^j + \dfrac{\tau}{4}\,\Lambda_1\Lambda_2 y^j$,

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = 0.5\;\Lambda_2 y^{j+1/2}.$$

В этом случае при $t = t_j$ и $t = t_{j+1}$ используются краевые условия на всей границе, а при $t = t_{j+1/2}$ краевые условия при $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$ определяются через μ_{21}^{j+1} и μ_{22}^{j+1} по формуле

$$y^{j+1/2} = y^{j+1} - 0.5\,\tau\Lambda_2 y^{j+1}.$$

Эти значения используются для определения $y^{j+1/2}$ из первого уравнения. Усложнение первого уравнения для $y^{j+1/2}$ вызвано стремлением повысить порядок точности по τ.

Все эти схемы являются абсолютно устойчивыми и сходящимися в среднем.

3. Для параболического уравнения общего вида

$$c\,(x, t)\,\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\beta=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\,(x, t)\,\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + \sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha\,(x, t)\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha},$$

где

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} k_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant c_0 \sum_{\alpha=1}^{p}\xi_\alpha^2, \qquad c_0 = \text{const} > 0,$$

также может быть написан ряд абсолютно устойчивых и сходящихся (в среднем) экономичных схем.

Приведем несколько схем для случая $p = 2$, $k_{\alpha\beta} = \text{const}$, $k_{12} = k_{21}$:

1) $y_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_{11}\bar{y} + \sigma\Lambda_{12}^{*}y$, $\quad y_{\bar{t}_2} = \Lambda_{22}y + (1-\sigma)\,\Lambda_{12}^{**}\bar{y}$, $\quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1$,

где $y = y^{j+1}$, $\quad \bar{y} = y^{j+1/2}$, $\quad \check{y} = y^j$, $\quad \Lambda_{\alpha\alpha}y = k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + r_\alpha y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}$, $\quad y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y^{(-1_\alpha)})\,/\,2h_\alpha$, $\quad \Lambda_{12}^{*}y = 2\,k_{12}y_{x_1\bar{x}_2}$, $\quad \Lambda_{12}^{**}y = 2k_{12}y_{\bar{x}_1 x_2}$, $\quad y_{\bar{t}_\alpha} = (y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p})\,/\,\tau$ ($\alpha = 1, 2$; $p = 2$);

2) $y_{\bar{t}_1} = \Lambda_{11}\bar{y} + \sigma\Lambda_{12}\check{y}$, $y_{\bar{t}_2} = \Lambda_{22}y + (1-\sigma)\Lambda_{12}\bar{y}$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $\Lambda_{12} = \Lambda_{12}^{*} + \Lambda_{12}^{**}$;

3) $y_{\bar{t}_1} = 0.5\,\Lambda_{11}\bar{y}$, $y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau = 0.5\,\Lambda_2(y - \check{y}) + \Lambda\bar{y}$, $\Lambda\bar{y} = \Lambda_{11}y + \Lambda_{22}y + \Lambda_{12}y$.

В работе [7] была предложена схема (при $r_\alpha = 0$)

$$y_{\bar{t}_1} = \Lambda_{11}\bar{y} + \Lambda_{12}\check{y}, \quad y_{\bar{t}_2} = \Lambda_{22}y + \Lambda_{12}\bar{y}, \quad \Lambda_{12}y = k_{12}y_{\overset{\circ}{x}_2\overset{\circ}{x}_1}.$$

Если $p = 3$ и $k_{\alpha\beta} = \text{const}$, то можно пользоваться следующей абсолютно устойчивой и сходящейся в среднем схемой:

$$y_{\bar{t}_1} = \Lambda_{11}\bar{y}, \quad y_{\bar{t}_2} = \Lambda_{22}\bar{\bar{y}} + \Lambda_{12}\bar{y}, \quad y_{\bar{t}_3} = \Lambda_{33}y + \Lambda_{23}\bar{\bar{y}} + \Lambda_{13}\bar{y},$$

где

$$\Lambda_{\alpha\beta}y = k_{\alpha\beta}(y_{\bar{x}_\alpha x_\beta} + y_{x_\alpha \bar{x}_\beta}), \quad k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha} \text{ при } \alpha \neq \beta, \quad \bar{y} = y^{j+1/3}, \quad \bar{\bar{y}} = y^{j+2/3}.$$

В случае $p = 3$ и $k_{\alpha\beta} = \text{const}$, $r_\alpha = 0$ в [9] была предложена схема, использующая 5 дробных шагов (мы используем 2 дробных шага). Аналогично записываются схемы для уравнения с переменными коэффициентами.

4. Для уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \quad (p = 2)$$

можно пользоваться локально-одномерной схемой

$$\frac{y^{j+\alpha/2} - 2y^{j+(\alpha-1)/2} + y^{j-1+\alpha/2}}{\tau^2} = 0.5\,[(\Lambda_\alpha y)^{j+\alpha/2} + (\Lambda_\alpha y)^{j-1+\alpha/2}], \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}$, в случае краевых условий (2) и произвольной области G. Эта схема абсолютно устойчива и имеет второй (в случае прямоугольной области G) порядок точности по τ и h^2. Схемы другого типа для уравнения с постоянными коэффициентами рассматривались в [19].

5. Укажем, наконец, абсолютно устойчивую и сходящуюся в среднем схему для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_p}\right), \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right).$$

Эта схема имеет вид

$$y_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha y^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p-1,$$

$$y_{\bar{t}_p} = \Lambda_p y^{j+1} + f(x, t_{j+1}, y^{j+(p-1)/p}, y^{j+1/p}_{\overset{\circ}{x}_1}, \ldots, y^{j+(p-1)/p}_{\overset{\circ}{x}_{p-1}}, y^{j}_{\overset{\circ}{x}_p}), \quad \alpha = p.$$

Доказательство сходимости и устойчивости указанных в п. 3, 4 и 5 схем будет изложено отдельно.

В заключение автор выражает благодарность А. Н. Тихонову за обсуждение результатов работы и Б. М. Будаку за ряд замечаний по редакции статьи.

Поступила в редакцию
31.03.1962

Цитированная литература

1. J. Douglas. On the numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ by implicit methods. J. Industr. Math. Soc., 1955, **3**, 42—65.
2. D. W. Peaceman, H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J. Industr. Math. Soc., 1955, **3**, № 1, 28—41.
3. J. Douglas, H. H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **82**, № 2, 421—439.
4. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1207—1210.
5. G. A. Baker, Jr, T. A. Oliphant. An implicit numerical method for solving the two-dimensional heat equation. Quart. Appl. Math., 1960, **17**, № 4, 361—373.
6. G. A. Baker, Jr. An implicit numerical method for solving the n-dimensional heat equation. Quart. Appl. Math., 1960, **17**, № 4, 440—443.
7. Н. Н. Яненко, В. А. Сучков, Ю. Я. Погодин. О разностном решении уравнения теплопроводности в криволинейных координатах. Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 5, 903—905.
8. Н. Н. Яненко. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов). Докл. АН СССР, 1960, **134**, № 5, 1034—1036.
9. Н. Н. Яненко. О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности. Изв. высш. учебных заведений. Сер. матем., 1961, **4**(23), 148—157.
10. Г. Е. Дьяконов. О некоторых разностных схемах для решения краевых задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 1, 57—79.
11. Г. Е. Дьяконов. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 4, 549—568.
12. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 2. М., Физматгиз, 1960.
13. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 5—64.
14. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 3, 441—460.
15. А. А. Самарский, И. В. Фрязинов. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 5, 806—824.
16. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 6, 972—1000.
17. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 1, 25—56.
18. А. А. Самарский, О сходимости и точности однородных разностных схем для одномерных и многомерных параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 4, 603—634.
19. Н. Н. Анучина, Н. Н. Яненко. Неявные схемы расщепления для гиперболических уравнений и систем. Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 6, 1103—1105.
20. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.