ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Январь 1962 Февраль № 1

ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

В статье рассматриваются однородные разностные схемы сквозного счета (см. [1]—[3]) для нелинейного уравнения параболического типа

$$\mathcal{P}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{1}$$

с разрывным «коэффициентом теплопроводности» $k(x, t)$.

Основное внимание уделяется выяснению порядка точности шеститочечных схем $\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}$ (см. [3]) для третьей краевой задачи в ограниченной области

$$\overline{Д}\,(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T).$$

Исследование проводится сразу для широкого класса однородных разностных схем (см. § 1, п. 4), задаваемых с помощью шаблонных функционалов указанного в [1], [3] вида; эти функционалы удовлетворяют требованиям, обеспечивающим второй порядок аппроксимации (по x) схемы. Аналогичные разностные схемы (в случае первой краевой задачи) для линейного уравнения теплопроводности при

$$f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = f(x,t) - q(x,t)\,u - c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}$$

изучались в [3].

В § 2 дается формулировка разностных краевых условий 3-го рода, имеющих в классе решений уравнения $\mathcal{P}u = 0$ тот же порядок аппроксимации, что и схема.

Вопрос о точности полученной разностной задачи сводится к оценке решения z линейного разностного уравнения с линейными разностными краевыми условиями и нулевым начальным условием через функции Ψ, ν_1 и ν_2, где Ψ — погрешность аппроксимации схемы, ν_1 и ν_2 — погрешности аппроксимации краевых условий в классе решений уравнения $\mathcal{P}u = 0$. Для оценки решения этой задачи используются априорные оценки, являющиеся обобщением оценок [4] и [5] на случай более общего уравнения и условий более общего вида.

В этой статье рассматриваются так называемые «неподвижные разрывы» коэффициента $k(x, t)$, т. е. разрывы на конечном числе прямых $x = \eta_\nu = \text{const}$, параллельных оси t в плоскости (x, t). Путем выделения

ошибки, связанной с погрешностью аппроксимации краевых условий, удается показать, что третья краевая задача имеет тот же порядок точности, что и первая краевая задача (см. § 3).

Основной результат работы сформулирован в виде теоремы 4 в § 3. Доказана равномерная сходимость при независимом стремлении шагов разностной сетки $h = \Delta x$ и $\tau = \Delta t$ к нулю для любой схемы $\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}$ из исходного семейства (см. § 1, п. 4) при $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а также дана оценка порядка точности в классе разрывных коэффициентов. Результаты, относящиеся к явным схемам ($\alpha = 0$), не приводятся, так как их формулировка может быть получена по аналогии со случаем линейного уравнения [3].

Трудность исследования равномерной сходимости в случае разрывных функций $k(x, t)$ и $f(x, t, u, p, q)$, как уже неоднократно указывалось (см. [1], [3], [5]), связана с тем, что вблизи линии разрыва коэффициента $k(x, t)$ разностная схема не аппроксимирует дифференциальный оператор.

Доказательство сходимости для шеститочечных схем оказывается возможным лишь с помощью улучшенной априорной оценки (теорема 2), которая использует нормы $\|\Psi\|_5$ и $\|\Psi\|_{5*}$ специального вида для интегральной оценки погрешности аппроксимации Ψ.

Хотя изложение проводится для равномерных сеток, однако основные результаты работы и, в частности, теорема 4 сохраняют силу для разностных схем на неравномерных сетках. Этот вопрос будет рассмотрен отдельно.

Применяемый в работе метод исследования позволяет доказать теорему 4 и в случае краевых условий более общего вида, в том числе нелинейных краевых условий. При этом содержание § 1 и 3 практически не меняется.

Следует отметить, что имеется ряд работ (например, [6] — [11]), посвященных исследованию разностных схем частного вида для нелинейного и квазилинейного параболического уравнения (1) в классе гладких функций $k(x, t)$ и $f(x, t, u, p, q)$. В большинстве работ изучалась либо сходимость в среднем, либо равномерная сходимость с помощью принципа максимума (что связано с ограничением для τ/h^2) для частных случаев уравнения (1). Наиболее близкой по методу исследования является работа [10], в которой доказана равномерная сходимость одной схемы для случая краевых условий 1-го рода и непрерывных функций $k(x, t)$ и $f(x, t, u, p, q)$. Результаты этой работы следуют из теоремы 3 нашей статьи. Априорные оценки, использованные в [10], непригодны для доказательства сходимости в классе разрывных коэффициентов.

§ 1. Однородные разностные схемы для нелинейного параболического уравнения

1. Постановка задачи

Рассмотрим в прямоугольнике $\bar{D} = (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ конечное число попарно не пересекающихся дифференцируемых кривых Γ_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0 + 1$), заданных уравнениями $x = \eta_\nu(t)$ на отрезке

$0 \leqslant t \leqslant T$; перенумеруем эти кривые так, чтобы $\eta_{\nu_1}(t) < \eta_{\nu_2}(t)$ при $\nu_1 < \nu_2$, и положим $\eta_0(t) = 0$, $\eta_{\nu_0+1}(t) = 1$. Обозначим через Δ_ν и $Д$ области

$$\Delta_\nu = (\eta_\nu(t) < x < \eta_{\nu+1}(t),\ 0 < t \leqslant T), \quad 0 \leqslant \nu \leqslant \nu_0, \qquad Д = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \Delta_\nu.$$

Формулируем исходную задачу:

найти непрерывное в $\overline{Д}$ решение $u(x, t)$ уравнения

$$\mathcal{P}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_1\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \text{ в } Д, \tag{1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$k\frac{\partial u}{\partial x} - \sigma_1(t)\,u = u_1(t), \qquad x = 0, \tag{2}$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_2(t)\,u = u_2(t), \qquad x = 1, \tag{3}$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{4}$$

Коэффициент $k(x, t)$ имеет разрывы 1-го рода на кривых Γ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$). На каждой из этих кривых выполняются условия сопряжения (условия непрерывности предельных значений слева и справа функций $u(x, t)$ и $k\frac{\partial u}{\partial x}$):

$$[u]_\nu = 0, \qquad \left[k\frac{\partial u}{\partial x}\right]_\nu = 0 \quad \text{при } x = \eta_\nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $[u]_\nu = u_{п,\nu} - u_{л,\nu}$, $u_{п,\nu} = u(\eta_\nu(t) + 0, t)$, $u_{л,\nu} = u(\eta_\nu(t) - 0, t)$ и т. д.

Функция $f_1(x, t, u, p, q)$ по переменным (x, t) имеет разрывы 1-го рода на кривых Γ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$, а ее производные по аргументам u, p и q ограничены, точнее,

$$0 < m \leqslant -\frac{\partial f_1}{\partial q} \leqslant M, \qquad \left|\frac{\partial f_1}{\partial u}\right| \leqslant M, \qquad \left|\frac{\partial f_1}{\partial p}\right| \leqslant M, \tag{6}$$

где m и M — положительные постоянные.

Коэффициенты $k(x, t)$ и $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ задачи удовлетворяют условиям

$$0 < m \leqslant k(x, t) \leqslant M, \qquad \sigma_1(t) \geqslant 0, \qquad \sigma_2(t) \geqslant 0, \qquad \sigma_1(t) + \sigma_2(t) \geqslant m > 0 \tag{7}$$

Условие $\sigma_1(t) + \sigma_2(t) \geqslant m > 0$ означает, что случай, когда $\sigma_1(t) = 0$ и $\sigma_2(t) = 0$ одновременно (вторая краевая задача), не рассматривается. Не нарушая общности, положим

$$f_1\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = f\left(x, t, u, 2k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{8}$$

т. е. будем в дальнейшем рассматривать уравнение (1) в форме

$$\mathcal{P}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f\left(x, t, u, 2k\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0. \tag{1'}$$

Такая замена удобна тем, что аргумент $k\frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывен в силу условия (5) на линиях Γ_ν разрыва коэффициента $k(x, t)$. Так как $k(x, t) \geqslant m > 0$, то условия (6) для функции $f(x, t, u, p, q)$ будут выполнены.

Задачу, определяемую условиями (1′), (2)—(7), будем называть задачей (I).

Отметим, что к уравнению (1) сводится уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,\ t)\,\mu^*(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f_1\left(x,\ t,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)=0, \tag{9}$$

если ввести новую функцию

$$\bar{u}=\mu(u)=\int_0^u \mu^*(u)\,du. \tag{10}$$

В работах [12]—[15] изучался вопрос о существовании и единственности решения краевых задач для линейного уравнения параболического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}-q(x,\ t)\,u+f(x,\ t)-c(x,\ t)\,\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{11}$$

с разрывными коэффициентами. Имеется большое число работ, посвященных разрешимости квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x,\ t,\ u)\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,\ t,\ u)-c(x,\ t,\ u)\,\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{12}$$

с гладкими коэффициентами.

В дальнейшем мы всюду предполагаем, что решение задачи (I) существует и имеет нужные по ходу изложения дифференциальные свойства, оставляя в стороне вопрос об условиях, обеспечивающих эти свойства. Формулируются только те требования к коэффициентам задачи, которые непосредственно используются при доказательстве теорем о точности изучаемых разностных схем.

Замечание 1. Производная $\partial u/\partial t$ на линиях Γ_ν разрыва «коэффициента теплопроводности» $k(x,\ t)$ терпит разрыв, равный

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_\nu=-\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_\nu \eta_\nu'(t), \qquad x=\eta_\nu(t). \tag{13}$$

Соотношение (13) следует из тождества

$$\frac{du(\eta_\nu(t),\ t)}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{л,\ \nu}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{л,\ \nu}\eta_\nu'(t)=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{п,\ \nu}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{п,\ \nu}\eta_\nu'(t).$$

Из (13) видно, что производная $\partial u/\partial t$ непрерывна вдоль Γ_ν только при $\eta_\nu'(t)\equiv 0$, т. е. на прямых $\eta_\nu=\mathrm{const}$ (в этом случае мы говорим, что $k(x,\ t)$ имеет неподвижный разрыв).

Замечание 2. Если ввести новую функцию

$$v=u\exp\left(\int_0^x (r/2k)\,d\xi\right),$$

то линейное уравнение (11) преобразуется в линейное уравнение для v, не содержащее члена с первой производной по x ($r\equiv 0$). Однако при таком преобразовании усложняется второе условие сопряжения:

$$\left[k\frac{\partial v}{\partial x}-rv\right]_\nu=0, \qquad x=\eta_\nu(t).$$

2. Интегро-интерполяционный метод

Для получения разностных уравнений, соответствующих дифференциальному уравнению (1), может быть использован интегро-интерполяционный метод (ИИМ) (см. [1], [2]). Поскольку физические процессы

обычно характеризуются интегральными соотношениями, выражающими тот или иной закон сохранения (например, количества тепла, количества движения и др.), то естественно при написании разностных уравнений, приближенно описывающих этот процесс, исходить из интегральных уравнений баланса, написанных для некоторого объема в окрестности узловой точки разностной сетки. Входящие в такое уравнение интегралы от функции и ее производных, взятые по поверхности рассматриваемого объема, мы заменяем разностными выражениями, делая при этом дополнительные предположения о профиле функции в окрестности узловой точки. В результате получаем разностные уравнения, вид которых зависит от характера использованной локальной интерполяции. Выбор интерполяции подчинен требованиям устойчивости, точности и простоты (при одном и том же порядке точности), которым должна удовлетворять искомая разностная схема. Проиллюстрируем ИИМ на примере уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t). \tag{14}$$

Рассмотрим в прямоугольнике ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$) равномерную сетку $\overline{\Omega}$, т. е. совокупность точек (x_i, t_j) с координатами $x_i = ih$, $i = 0,1,\ldots,N$ $(h = 1/N)$; $t_j = j\tau$, $j = 0,1,\ldots,$ L $(\tau = T/L)$. Напишем уравнение баланса тепла для прямоугольника $S_{ij} = (x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2} \leqslant t_{j-1}\ t \leqslant t_j)$, $x_{i-1/2} = x_i - 0.5h$:

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x, t_j) - u(x, t_{j-1})]\,dx + \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} [W(x_{i+1/2}, t) - W(x_{i-1/2}, t)]\,dt = \tag{15}$$

$$= \iint\limits_{S_{ij}} f(x, t)\,dx\,dt,$$

где $W = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$ — тепловой поток.

Будем считать, что значения u берутся в точках (x_i, t_j) сетки, а поток W относится к точке $(x_{i-1/2}, t_j)$.

Предположим, например, что $W = W_{i-1/2} = \text{const}$ на интервале (x_{i-1}, x_i); тогда выражение $W = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$ заменится приближенным соотношением

$$u_{i-1} - u_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (W/k)\,dx \approx W_{i-1/2} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k},$$

т. е.

$$W_{i-1/2} = a_i \frac{u_{i-1} - u_i}{h}, \qquad a_i = \left[\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k}\right]^{-1}. \tag{16}$$

Для вычисления первого интеграла в уравнении баланса (15) предположим, что $u = u_i = \text{const}$ на интервале $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, так что

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u\,dx = u_i. \tag{17}$$

Нетрудно заметить, что предположения $u = \text{const}$ при $x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$ и $W = \text{const}$ при $x_{i-1} < x < x_i$, вообще говоря, не согласуются между собой. Однако последовательное проведение предположения $W = \text{const}$ при $x_{i-1} < x < x_i$ приводит к более сложной схеме без повышения точности.

Возможны и другие интерполяции искомых функций при построении разностного выражения для потока.

Если требовать, чтобы поток выражался через значения u в двух узловых точках, то, как следует из равенства

$$u_{i-1} - u_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W}{k}\, dx,$$

все получаемые при этом формулы для $W_{i-1/2}$ будут иметь вид

$$W_{i-1/2} = a_i^{(h,\,k)} (u_{i-1} - u_i)/h,$$

где $a_i^{(h,\,k)}$ — коэффициент, зависящий, вообще говоря, от h и от функции $k(x, t)$ на интервале (x_{i-1}, x_i), т. е. являющийся функционалом коэффициента k.

Заменяя интегралы по t в уравнении (15), например, по формуле

$$\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} W\, dt = \alpha W^j + (1-\alpha) W^{j-1}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

мы получим разностное уравнение

$$\frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} = \alpha \frac{W_{i-1/2}^j - W_{i+1/2}^j}{h} + (1-\alpha) \frac{W_{i-1/2}^{j-1} - W_{i+1/2}^{j-1}}{h} + F_i^j; \tag{18}$$

$$W_{i-1/2} = a_i^{(h,\,k)} \frac{y_{i-1} - y_i}{h}, \qquad F_i^j = \frac{1}{h\tau} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} j(x, t)\, dx\, dt.$$

Метод баланса (ИИМ) приводит к схемам, сходящимся в классе разрывных коэффициентов, что было показано в [1] для стационарного уравнения теплопроводности и будет показано в этой статье для уравнения параболического типа.

3. Обозначения

Пусть $\bar{\Omega}$ $(x_i = ih,\ t_j = j\tau,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ j = 0, 1, \ldots, L,\ h = 1/N,\ \tau = T/L)$ — разностная сетка, Ω — совокупность ее внутренних точек (x_i, t_j) (где $1 \leqslant i \leqslant N-1,\ 1 \leqslant j \leqslant L$), ω_h $(x_i = ih,\ 0 \leqslant i \leqslant N)$ — сетка по x.

Функцию y_i^j, заданную на сетке $\bar{\Omega}$ или на ее части, будем называть сеточной функцией. Условимся вместо y_i^j писать просто y или $y(x, t)$, не указывая также зависимости сеточной функции от шагов h и τ сетки. Кроме того, будем писать

$$\check{y} = y(x, t-\tau), \qquad y^{(+1)} = y(x+h, t), \qquad y^{(-1)} = y(x-h, t),$$

$$y_{\bar{x}} = (y - y^{(-1)})/h, \qquad y_x = (y^{(+1)} - y)/h = y_{\bar{x}}^{(+1)}, \qquad y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}^j(y_{i+1}^j - y_i^j) - a_i^j(y_i^j - y_{i-1}^j)\right] = (ay_{\bar{x}})_x.$$

Для сумм по сетке ω_h или по ее части введем обозначения

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h; \qquad (y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h; \qquad [y, v) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_i h;$$
$$[y, v] = \sum_{i=0}^{N} y_i v_i h. \tag{19}$$

В дальнейшем мы пользуемся нормой

$$\|z\|_0 = \max_{(x)} |z|,$$

где максимальное значение берется по всем точкам сетки ω_h, в которых задана сеточная функция z.

В зависимости от того, где задана функция ψ, мы пользуемся одним из следующих определений для норм:

$$\|\psi\|_\sigma = (1, |\psi|^\sigma)^{1/\sigma}, \qquad \|\psi\|_\sigma = (1, |\psi|^\sigma]^{1/\sigma}, \qquad \|\psi\|_\sigma = [1, |\psi|^\sigma]^{1/\sigma}, \quad \sigma=1, 2, \tag{20}$$

не оговаривая этого в тех случаях, когда недоразумения не могут возникнуть. Так, например, если функция z задана на всей сетке ω_h, то ее «разностная производная» $z_{\bar{x}}$ определена в точках $x = h, 2h, \ldots$ $\ldots, Nh = 1$; поэтому

$$\|z_{\bar{x}}\|_2 = (1, z_{\bar{x}}^2]^{1/2}, \qquad \text{где } z_{\bar{x}}^2 = (z_{\bar{x}})^2. \tag{21}$$

В предыдущих работах (см. [4], [5]) нами были введены нормы

$$\left.\begin{aligned} &\|\psi\|_3 = \|\mu\|_2, \qquad \mu(x) = \sum_{x'=h}^{x'=x} h\psi(x'), \\ &\|\psi\|_{3^*} = \|\mu\|_1, \qquad \|\psi\|_4 = \|\psi\|_3 + |(\psi, 1)|, \qquad \|\psi\|_{4^*} = \|\psi\|_{3^*} + |(\psi, 1)|. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Положительные постоянные, не зависящие от сеток (т. е. от h и τ), будем обозначать M и m. В дальнейшем всюду будем обозначать $\rho(\delta)$ выражение, равномерно стремящееся к нулю при $\delta \to 0$, так что $|\rho(\delta)| < \rho_0(\delta)$, где $\rho_0(\delta)$ зависит только от δ и $\rho_0(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$; $O(\delta^m)$ $(m > 0)$ — выражение, имеющее при $\delta \to 0$ порядок малости δ^m, так что $|O(\delta^m)| \leqslant M\delta^m$.

В тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, будем писать

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{23}$$

При ссылках на формулы из другого параграфа данной статьи будем пользоваться двойной нумерацией, например (1.20) — формула (20) из § 1.

4. Исходное семейство однородных разностных схем

Интегро-интерполяционный метод, описанный в п. 2, оказывается полезным при выборе исходного класса схем для дифференциального уравнения (1). Как мы видели на примере линейного уравнения теплопро-

водности, этот метод дает шеститочечные схемы, пространственная часть которых является самосопряженной или консервативной схемой вида $(ay_{\bar{x}})_x + \varphi$, а коэффициенты a и φ являются некоторыми функционалами (зависящими от характера интерполяции) коэффициентов k и f дифференциального уравнения.

С другой стороны, в [1] на примере стационарного уравнения теплопроводности $(ku')' + f = 0$ было показано, что только консервативные схемы $(ay_{\bar{x}})_x + \varphi$ сходятся в классе разрывных коэффициентов. Эти два замечания мы учтем при выборе исходного семейства разностных схем для нелинейных уравнений параболического типа.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\mathcal{P}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f\left(x, t, u, 2k\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{24}$$

и поставим ему в соответствие шеститочечную однородную разностную схему

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}\, y = (ay_{\bar{x}})^{(\alpha)}_x + \alpha\,\varphi(x, t, y, a^{(+1)}y_x + ay_{\bar{x}}, y_{\bar{t}}) + \tag{25}$$
$$+ (1-\alpha)\,\varphi(x, \check{t}, \check{y}, \check{a}^{(+1)}\check{y}_x + \check{a}\,\check{y}_{\bar{x}}, y_{\bar{t}_1}) = 0.$$

Индекс α наверху указывает, что выражение суммируется по строкам t и $t - \tau$ с весовыми множителями α и $(1-\alpha)$

$$v^{(\alpha)} = \alpha\, v + (1-\alpha)\check{v},$$

где α — некоторый числовой параметр, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Сеточные функции $a(x, t)$ и $\varphi(x, t, u, p, q)$ вычисляются с помощью шаблонных функционалов (см. [1], [3])

$$A^h[\mu(s)] \quad (-1 \leqslant s \leqslant 0) \quad \text{и} \quad F^h[\mu(s)] \quad (-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5), \tag{26}$$

определенных в классе кусочно-непрерывных функций $Q^{(0)}$ $(\mu(s) \in Q^{(0)})$ и зависящих, вообще говоря, от параметра h:

$$a = A^h[k(x + sh, t)],$$
$$\varphi = \varphi(x, t, y, a^{(+1)}y_x + ay_{\bar{x}}, y_{\bar{t}}) = F^h[f(x + sh, t, y, a^{(+1)}y_x + ay_{\bar{x}}, y_{\bar{t}})].$$

Зависимость a и φ от h явно не указываем.

Для линейного уравнения

$$\mathcal{P}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x, t)\,u + r(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} - c(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

разностная схема (25) принимает вид

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}y = [(ay_{\bar{x}})_x - dy + b(a^{(+1)}y_x + ay_{\bar{x}}) + \varphi]^{(\alpha)} - \rho^{(\alpha)}y_{\bar{t}} = 0;$$

коэффициенты ее определяются с помощью тех же шаблонных функ-

ционалов (26) по формулам:

$$a = A^h[k(x+sh, t)], \quad d = F^h[q(x+sh, t)], \quad b = F^h[\tilde{r}(x+sh, t)], \quad \tilde{r} = r/2k,$$

$$\varphi = F^h[f(x+sh, t)], \qquad \rho = F^h[c(x+sh, t].$$

В работе [3] был введен класс однородных схем для линейного уравнения (11) при $r(x, t) \equiv 0$, отличавшихся от рассматриваемых здесь тем, что коэффициенты d и ρ вычислялись независимо от коэффициента φ с помощью некоторых функционалов $D^h[\mu(s)]$ и $R^h[\mu(s)]$ $(-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5)$ соответственно. Слагаемое $r(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}$ в (11) можно было бы аппроксимировать с помощью более простого выражения, например

$$F^h[r(x+sh, t)] \cdot 0.5(y_x + y_{\bar{x}}).$$

Однако, как выяснится в дальнейшем, аппроксимация с помощью выражения $b(a^{(+1)}y_x + ay_{\bar{x}})$ позволяет получить более высокий порядок точности в классе разрывных коэффициентов.

По этой же причине мы в качестве аргумента у функции f берем не u', а $2ku'$ (см. п. 2).

Класс однородных разностных схем $\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}$ определяется выбором класса шаблонных функционалов A^h и F^h и параметра α. Мы будем предполагать, что выполнены условия (Ф):

(Φ_1) функционал $A^h[\mu]$ имеет третий ранг, а $F^h[\mu]$ — второй ранг;

(Φ_2) $F^h[\mu]$ является линейным функционалом;

(Φ_3) шаблонные функционалы $A^h[\mu]$ и $F^h[\mu]$ удовлетворяют необходимым условиям второго порядка аппроксимации (см. [1], [3]).

В качестве исходного семейства схем будем рассматривать шеститочечные схемы (25), удовлетворяющие условиям (Ф).

Если шаблонные функционалы являются каноническими, т. е. не зависят от h, то и схема называется канонической. Имея в виду эквивалентность неканонической схемы своей канонической части, указанную в [1], [3], мы проведем все изложение только для канонических схем; однако все результаты работы справедливы и для неканонических схем, образующих определенное выше исходное семейство.

Остановимся более подробно на свойствах канонических шаблонных функционалов $A[\mu]$ и $F[\mu]$. В этом случае условия (Ф) означают:

1) $A[\mu]$ есть однородный функционал первого порядка ($A[c\mu] = cA[\mu]$), имеющий дифференциал третьего порядка, т. е.

$$A[\mu + \delta \cdot f] = A[\mu] + \delta \cdot A_1[\mu, f] + \delta^2 A_2[\mu, f] + \delta^3 A_3[\mu, f] + \delta^3 \rho(\delta),$$

где $\rho(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $|f| < M$;

2) $A[\mu]$ и $F[\mu]$ — неубывающие функционалы, т. е.

$$A[\mu_2] \geqslant A[\mu_1], \qquad F[\mu_2] \geqslant F[\mu_1] \qquad \text{при } \mu_2 \geqslant \mu_1;$$

3) $A[\mu]$ и $F[\mu]$ — нормированные функционалы, т. е.

$$A[1] = F[1] = 1;$$

4) $A[\mu]$ и $F[\mu]$ удовлетворяют необходимым условиям второго порядка аппроксимации

$$A_1[s] = -0.5, \qquad F[s] = 0, \tag{27}$$

где

$$A_1[s] = A_1[1, s].$$

Заметим, что симметричные (относительно изменения направления оси x) схемы удовлетворяют условиям (27).

Особое место занимает принадлежащая исходному семейству разностная схема $\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}$, шаблонные функционалы которой имеют вид (см. [16])

$$A[\mu(s)] = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{\mu(s)}\right]^{-1}, \qquad F[\mu(s)] = \int_{-0.5}^{0.5} \mu(s)\, ds, \tag{28}$$

так что

$$a(x, t) = \left[\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} \frac{d\xi}{k(\xi, t)}\right]^{-1}, \qquad \varphi(x, t, y, p, q) = \frac{1}{h}\int_{x-0.5h}^{x+0.5h} f(\xi, t, y, p, q)\, d\xi. \tag{28'}$$

Эту схему мы будем называть наилучшей канонической схемой, так как она дает наилучшую среди исходных схем точность в классе разрывных коэффициентов.

На практике часто используются дискретные схемы [1], коэффициенты которых вычисляются по значениям коэффициентов дифференциального уравнения в отдельных точках. Укажем шаблонные функционалы для некоторых из дискретных схем:

$$A[\mu(s)] = \frac{2\mu(0)\mu(-1)}{\mu(0) + \mu(-1)}, \qquad A[\mu(s)] = 0.5[\mu(0) + \mu(-1)],$$

$$A[\mu(s)] = \mu(-0.5),$$

$$F[\mu(s)] = \mu(0), \qquad F[\mu(s)] = 0.5[\mu(0.5) + \mu(-0.5)] \text{ и др.}$$

Вместо схемы (25) можно рассматривать эквивалентную ей по точности схему

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau} y = (a y_{\bar{x}})^{(\alpha)}_{x} + \varphi(x, t^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, (a^{(+1)} y_x + a y_{\bar{x}})^{(\alpha)}, y_{\bar{t}}) = 0, \tag{25_1}$$

где $t^{(\alpha)} = \alpha t + (1-\alpha)\check{t}$, $\check{t} = t - \tau$.

Разностные уравнения $\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau} y = 0$, где $\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau} y$ определяется выражениями (25) или (25_1), нелинейны относительно значений искомой функции $y(x, t)$ на новой строке. Поэтому их решение может быть найдено лишь с помощью итераций. Разностные уравнения

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau} y = (a y_{\bar{x}})^{(\alpha)}_{x} + \varphi(x, \check{t}, \check{y}, \check{a}^{(+1)} \check{y}_{\bar{x}}, + \check{a} \check{y}_{\bar{x}}, y_{\bar{t}}) = 0 \tag{25_2}$$

линейны относительно $y(x, t)$, если функция $f(x, t, u, p, q)$ линейно зависит от q:

$$f(x, t, u, p, q) = f(x, t, u, p) + \bar{f}(x, t, u, p), q.$$

В этом случае разностные уравнения (25_2) можно решать безытерационным методом прогонки (см. § 2, п. 4). Однако разностная схема (25_2) имеет лишь первый порядок аппроксимации по t при любых α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Следует отметить, что все результаты, полученные ниже для схемы (25), легко переносятся на схемы (25_1) и (25_2).

Аналогично определяется семейство однородных схем для уравнения

$$\mathcal{P}u = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varkappa(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + f\left(x, t, u, 2\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{29}$$

с коэффициентом теплопроводности $\varkappa$, зависящим от температуры u. В этом случае

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}y = (ay_{\bar{x}})^{(\alpha)}_{x} + \alpha\varphi(x, t, y, a^{(+1)}y_x + ay_{\bar{x}}, y_{\bar{t}}) + \tag{30}$$
$$+ (1-\alpha)\varphi(x, \check{t}, \check{y}, \check{a}^{(+1)}\check{y}_x + \check{a}\check{y}_{\bar{x}}, y_{\bar{t}}) = 0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a = a(x, t, y^*) = A^h[\varkappa(x+sh, t, y^*)], \qquad y^* = 0.5(y + y^{(-1)}),\\ &\varphi(x, t, u, p, q) = F^h[f(x+sh, t, u, p, q)]. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Здесь A^h и F^h — определенные выше функционалы.

5. Уравнение для погрешности решения

Пусть $y = y(x, t)$ — решение разностного уравнения (25), а $u = u(x, t)$ — решение дифференциального уравнения (24). Покажем, что погрешность $z = y - u$ удовлетворяет линейному разностному уравнению. Для этого образуем разность

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}y - (\mathcal{P}u)^{(\alpha)} = [\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}y - \mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}u] + \Psi = 0 \text{ на } \Omega, \tag{32}$$

где

$$\Psi = \mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}u - (\mathcal{P}u)^{(\alpha)}.$$

Преобразуем выражение

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}y - \mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}u = (az_{\bar{x}})^{(\alpha)}_{x} + \alpha B_1 + (1-\alpha)B_2,$$

где

$$B_1 = \varphi(x, t, y, a^{(+1)}y_x + ay_{\bar{x}}, y_{\bar{t}}) - \varphi(x, t, u, a^{(+1)}u_x + au_{\bar{x}}, u_{\bar{t}}),$$

$$B_2 = \varphi(x, \check{t}, \check{y}, \check{a}^{(+1)}\check{y}_x + \check{a}\check{y}_{\bar{x}}, y_{\bar{t}}) - \varphi(x, \check{t}, \check{u}, \check{a}^{(+1)}\check{u}_x + \check{a}\check{u}_{\bar{x}}, u_{\bar{t}}).$$

Учитывая дифференцируемость функции $f(x, t, u, p, q)$ по аргументам u, p и q и применяя теорему о среднем значении, получим

$$B_1 = \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}z + \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}(a^{(+1)}z_x + az_{\bar{x}}) + \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial q}}z_{\bar{t}},$$

где черта сверху указывает, что значение производных берется при некоторых средних значениях аргументов u, p и q. Заметим, что в силу линейности функционала $F[\mu]$ имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = F\left[\frac{\partial f}{\partial u}(x+sh, t, u, p, q)\right], \quad \frac{\partial\varphi}{\partial p} = F\left[\frac{\partial f}{\partial p}(x+sh, t, u, p, q)\right],$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} = F\left[\frac{\partial f}{\partial q}\right].$$

Проводя аналогичные рассуждения для разности B_2, получим из тождества (32) следующее линейное разностное уравнение для сеточной функции $z(x, t)$:

$$\overline{\mathcal{P}}^{\alpha}_{h\tau}z = (az_{\bar{x}})^{(\alpha)}_{x} + Q(z) - \rho z_{\bar{t}} = -\Psi \quad \text{на } \Omega, \tag{33}$$

где

$$Q(z) = b_{11}z_x + b_{12}\check{z}_x + b_{22}z_{\bar{x}} + b_{21}\check{z}_{\bar{x}} + d_1 z + d_2\check{z}, \tag{34}$$

$$\left.\begin{array}{c} b_{11} = \alpha a^{(+1)} \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}, \quad b_{12} = (1-\alpha)\check{a}^{(+1)} \overline{\frac{\partial\varphi^*}{\partial p}}, \quad b_{22} = \alpha a \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}, \\ b_{21} = (1-\alpha)\check{a} \overline{\frac{\partial\varphi^*}{\partial p}}, \\ d_1 = \alpha \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}, \quad d_2 = (1-\alpha) \overline{\frac{\partial\varphi^*}{\partial u}}, \quad \varphi^* = \varphi(x, \check{t}, \check{u}, \check{p}, q), \\ \rho = -\alpha \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial q}} - (1-\alpha) \frac{\partial\varphi^*}{\partial q}. \end{array}\right\} \tag{35}$$

Сеточная функция $\Psi = \Psi(x, t)$, очевидно, представляет собой погрешность аппроксимации в классе решений $u = u(x, t)$ дифференциального уравнения (24) и может быть записана в виде:

$$\Psi = \psi^{(\alpha)} + \psi_q, \qquad \psi = \psi_a + \psi_p + \psi_\varphi, \qquad \psi_q = \alpha\overset{*}{\psi}_q + (1-\alpha)\overset{**}{\psi}_q, \tag{36}$$

$$\psi_a = (a u_{\bar{x}})_x - (ku')', \tag{37}$$

$$\psi_p = \varphi(x, t, u, a^{(+1)} u_x + a u_{\bar{x}}, \dot{u}) - \varphi(x, t, u, 2ku', \dot{u}), \tag{38}$$

$$\psi_\varphi = \varphi(x, t, u, 2ku', \dot{u}) - f(x, t, u, 2ku', \dot{u}), \tag{39}$$

$$\overset{*}{\psi}_q = \varphi(x, t, u, a^{(+1)} u_x + a u_{\bar{x}}, u_{\bar{t}}) - \varphi(x, t, u, a^{(+1)} u_x + a u_{\bar{x}}, \dot{u}), \tag{40}$$

$$\overset{**}{\psi}_q = \varphi(x, \check{t}, \check{u}, \check{a}^{(+1)} \check{u}_x + \check{a}\check{u}_{\bar{x}}, u_{\bar{t}}) - \varphi(x, \check{t}, \check{u}, \check{a}^{(+1)} \check{u}_x + \check{a}\check{u}_{\bar{x}}, \check{\dot{u}}). \tag{41}$$

6. Погрешность аппроксимации исходных схем

Выясним асимптотическое поведение при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ погрешности аппроксимации Ψ для любой схемы $\mathcal{P}^{\alpha}_{h\tau}$ исходного семейства. Асимптотический порядок ψ зависит от свойств шаблонных функционалов схемы, а порядок ψ_q — от значений параметра α (разумеется, при условии, что решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения (1) и функции $k(x, t)$, $f(x, t, u, p, q)$ дифференцируемы нужное число раз).

Лемма 1. *Если в некоторой фиксированной окрестности точки (x, t) сетки Ω функции*

$$k''(x, t), \qquad f'(x, t, u, p, q), \qquad u'''(x, t)$$

удовлетворяют условию Липшица по x, а функция $\dot{u}(x, t)$ — условию Липшица по t, то при достаточно малых h и τ

$$\Psi = O(h^2) + O(\tau) \text{ для } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{42}$$

(Здесь штрих означает частную производную по аргументу x, $\dot{u} = \partial u/\partial t$.)

Напомним прежде всего, что, по предположению, функция $f(x, t, u, p, q)$ имеет ограниченные при любых значениях u, p и q производные $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial p$, $\partial f/\partial q$.

Для любой исходной схемы имеем

$$a = k - 0.5hk' + h^2\left(\frac{k''}{2} A_1[s^2] + \frac{(k')^2}{k} A_2[s]\right) + Q(h^3), \qquad a^{(+1)} = a + hk' + O(h^3),$$

$$\varphi(x, t, u, p, q) = f(x, t, u, p, q) + hf'(x, t, u, p, q)\, F[s] + O(h^2) = f(x, t, u, p, q) + O(h^2),$$

т. е. $\psi_\varphi = O(h^2)$. Учитывая затем разложения

$$u_x = u' + 0.5hu'' + \frac{h^2}{6} u''' + O(h^3), \qquad u_{\bar{x}} = u' - 0.5hu'' + \frac{h^2}{6} u''' + O(h^3),$$

находим

$$\psi_a = O(h^2), \qquad a^{(+1)} u_x = a u_{\bar{x}} - 2ku' = O(h^2)$$

и, следовательно,

$$\psi_p = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial p}} (a^{(+1)} u_x + a u_{\bar{x}} - 2ku') = O(h^2),$$

где черта сверху означает, что производная берется при некотором среднем значении аргумента p. Таким образом, при любых значениях параметра α

$$\psi = \psi_a + \psi_p + \psi_\varphi = O(h^2).$$

Пользуясь теоремой о среднем значении, получаем

$$\psi_q = \alpha \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial q}} (u_{\bar{t}} - \dot{u}) + (1-\alpha) \overline{\frac{\partial \varphi^*}{\partial q}} (u_{\bar{t}} - \check{\dot{u}}) = O(\tau),$$

так как $u_{\bar{t}} = \dot{u} + O(\tau) = \check{\dot{u}} + O(\tau)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если выполнены условия леммы* 1 *и, кроме того, функции* k, u', $\ddot{u}$ *удовлетворяют условию Липшица по* t, *а производная* $\partial f/\partial q$ — *условию Липшица по* t, u, p *и* q, *то*

$$\Psi = O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha}) + O(h\tau), \text{ т. е. } |\Psi| \leqslant M(h^2 + \tau^{m_\alpha}),$$

где

$$m_\alpha = \begin{cases} 2, & \alpha = 0.5, \\ 1, & \alpha \neq 0.5. \end{cases}$$

Для доказательства леммы достаточно убедиться, что

$$\psi_q = O(\tau^{m_\alpha}) + O(h\tau).$$

В силу условий леммы можно написать

$$\varphi(x, t, u, a^{(+1)} u_x + a u_{\bar{x}}, u_{\bar{t}}) - \varphi(x, t, u, a^{(+1)} u_x + a u_{\bar{x}}, \dot{u}) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial q}(x, t, u, a^{(+1)} u_x + a u_{\bar{x}}, \dot{u})(u_{\bar{t}} - \dot{u}) + O(\tau^2),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q}(x, \check{t}, \check{u}, \check{a}^{(+1)} \check{u}_x + \check{a} \check{u}_{\bar{x}}, \check{\dot{u}}) = \frac{\partial \varphi}{\partial q}(x, t, u, a^{(+1)} u_x + a u_{\bar{x}}, \dot{u}) + O(\tau) + O(h),$$

учитывая при этом, что $a u_{\bar{x}} - \check{a} \check{u}_{\bar{x}} = ku' - \check{k} \check{u}' + O(h) = O(\tau) + O(h)$.

Для ψ_q получаем выражение

$$\psi_q = \alpha \psi_q^* + (1-\alpha) \psi_q^{**} = \frac{\partial \varphi}{\partial q}(x, t, u, a^{(+1)} u_x + a u_{\bar{x}}, \dot{u})(\alpha - 0.5) \ddot{u} \tau + O(\tau^2) + O(h\tau). \tag{43}$$

Отсюда видно, что только при $\alpha = 0.5$

$$\psi_q = O(\tau^2) + O(h\tau).$$

Замечая, что $h\tau < h^2 + \tau^2$, получим $|\Psi| \leqslant M(h^2 + \tau^2)$.

Как показывает (43), леммой 2 имеет смысл пользоваться только для симметричных (по t) схем при $\alpha = 0.5$, так как при $\alpha \neq 0.5$ повышение гладкости решения $u(x, t)$ и функций $k(x, t)$ и $f(x, t, u, p, q)$ не приводит к повышению порядка аппроксимации схемы. Поэтому в дальнейшем мы будем всегда предполагать, что условия леммы 2 выполнены только для схем $\mathscr{P}_{h\tau}^{0.5}$ $(\alpha = 0.5)$, а условия леммы 1 — для всех схем $\mathscr{P}_{h\tau}^{\alpha}$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Мы будем также предполагать, что условия лемм 1

и 2 выполнены в каждой из областей Δ_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0$), на которые разбивается основная область $\overline{Д}$ линиями разрыва Γ_ν коэффициента $k(x, t)$ (подробнее об этом см. п. 2, § 3).

Леммы 1 и 2 справедливы и для схемы (25_1), а лемма 1 — для схемы (25_2).

§ 2. Разностная краевая задача

1. Разностные краевые условия третьего рода

Чтобы формулировать разностную задачу, соответствующую краевой задаче (I) для дифференциального уравнения $\mathcal{P}u = 0$, надо написать разностные краевые условия при $x = 0$ и $x = 1$. Условия 1-го рода $u(0, t) = u_1(t)$, $u(1, t) = u_2(t)$, рассмотренные в [3], аппроксимируются точно на разностной сетке, если положить $y(0,t) = y_0 = u_1(t)$ и $y(1,t) = y_N = u_2(t)$; для функции $z = y - u$, где y — решение разностной задачи, а u — решение задачи (I), получаем однородные краевые условия $z_0 = 0$, $z_N = 0$. Поэтому величина погрешности z для решения первой разностной краевой задачи зависит только от погрешности аппроксимации Ψ схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{\alpha}$. Краевым условиям 3-го рода удовлетворить точно на разностной сетке мы не можем. Поэтому функция z будет зависеть также и от погрешности, допускаемой при аппроксимации краевых условий разностными условиями. Естественно требовать, чтобы разностные краевые условия имели тот же порядок аппроксимации, что и схема. Между тем непосредственная замена производных, входящих в условия 3-го рода, приводит к разностным краевым условиям, имеющим лишь первый порядок аппроксимации. Поясним это на примере краевой задачи 3-го рода для обыкновенного дифференциального уравнения

$$(k(x)u')' = -f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$ku' - \sigma_1 u = u_1, \qquad x = 0, \tag{2}$$

$$ku' + \sigma_2 u = u_2, \qquad x = 1. \tag{3}$$

Рассуждения проведем для краевого условия при $x = 0$. Рассмотрим разностное краевое условие

$$a_1 y_{x,0} - \sigma_1 y_0 = u_1$$

и вычислим погрешность аппроксимации

$$\nu = (a_1 u_{x,0} - \sigma_1 u_0) - (k_0 u_0' - \sigma_1 u_0) = a_1 u_{x,0} - k_0 u_0' \qquad (k_0 = k(0) \text{ и т. д.}).$$

Учитывая, что $a_1 = k_0 + 0.5hk_0' + O(h^2)$, $u_{x,0} = u_0' + 0.5hu_0'' + O(h^2)$, находим

$$\nu = 0.5h(ku')_0' + O(h^2) = O(h).$$

Исходя из выражения для ν, нетрудно написать разностное краевое условие, имеющее второй порядок аппроксимации в классе решений $u = u(x)$ дифференциального уравнения (1). Пользуясь (1), напишем

$$\nu = -0.5hf_0 + O(h^2)$$

и рассмотрим разностный оператор

$$a_1 y_{x,0} - \sigma_1 y_0 + 0.5hf_0 = u_1. \tag{4}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что этот оператор имеет второй порядок аппроксимации в классе решений дифференциального уравнения, удовлетворяющих условию (2).

Рассмотрим теперь третью краевую задачу для уравнения (1.1):

$$\mathcal{P}u = (ku')' + f(x, t, u, 2ku', \dot{u}) = 0, \tag{5}$$

$$l^{(1)}u = ku' - \sigma_1(t)\,u = u_1(t), \qquad x = 0, \tag{6}$$

$$l^{(2)}u = ku' + \sigma_2(t)\,u = u_2(t), \qquad x = 1 \tag{7}$$

(здесь $u' = \partial u/\partial x$, $\dot{u} = \partial u/\partial t$).

Разностные краевые условия, соответствующие (6) и (7), можно написать сразу по аналогии с (4). Они имеют вид

$$l_h^{(1)}y = (a^{(+1)}y_x - \sigma_1 y)^{(\alpha)} + 0.5h\,[\alpha f(0, t, y, 2ky_x, y_{\bar{t}}) + \tag{8}$$
$$+ (1-\alpha) f(0, \check{t}, \check{y}, 2\check{k}\check{y}_x, y_{\bar{t}})] = u_1^{(\alpha)}(t) \quad \text{при } x = 0,$$

$$l_h^{(2)}y = (ay_{\bar{x}} + \sigma_2 y)^{(\alpha)} - 0.5\,h\,[\alpha f(1, t, y, 2ky_{\bar{x}}, y_{\bar{t}}) + \tag{9}$$
$$+ (1-\alpha) f(1, \check{t}, \check{y}, 2\check{k}\check{y}_{\bar{x}}, y_{\bar{t}})] = u_2^{(\alpha)}(t) \quad \text{при } x = 1,$$

где $\check{t} = t - \tau$ (аргументы функций k, y, y_x, $y_{\bar{x}}$ не будем указывать). Заметим, что в (8) и (9) вместо $2ky_x$ (или $2ky_{\bar{x}}$) можно также писать $2a^{(+1)}y_x$ (или $2ay_{\bar{x}}$) (см. п. 4).

Укажем ряд других краевых условий, эквивалентных (8) по порядку аппроксимации:

$$l_h^{(1)}y = (a^{(+1)}y_x - \sigma_1 y)^{(\alpha)} + 0.5hf(0, t^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, 2(k, y_x)^{(\alpha)}, y_{\bar{t}}) = u_1^{(\alpha)}, \tag{8_1}$$

$$l_h^{(1)}y = (a^{(+1)}y_x - \sigma_1 y)^{(\alpha)} + 0.5hf(0, \check{t}, 2\check{k}\check{y}_x, y_{\bar{t}}) = u_1^{(\alpha)}. \tag{8_2}$$

Учитывая краевое условие (6), будем иметь

$$f(0, t, u, 2ku', \dot{u}) = f(0, t, u, 2\sigma_1 u + 2u_1, \dot{u}).$$

Поэтому в (8) вместо $2ky_x$ (или $2a^{(+1)}y_x$) можно написать $2\sigma_1 y + 2u_1$; тогда краевое условие при $x = 0$ примет вид

$$l_h^{(1)}y = (a^{(+1)}y_x - \sigma_1 y)^{(\alpha)} + 0.5h\,[\alpha f(0, t, y, 2\sigma_1 y + 2u_1, y_{\bar{t}}) + \tag{8_3}$$
$$+ (1-\alpha) f(0, \check{t}, \check{y}, 2\check{\sigma}_1\check{y} + 2\check{u}_1, y_{\bar{t}})] = u_1^{(\alpha)},$$

или

$$l_h^{(1)}y = (a^{(+1)}y_x - \sigma_1 y)^{(\alpha)} + 0.5hf(0, t, \check{y}, 2\check{\sigma}_1\check{y} + 2\check{u}_1, y_{\bar{t}}) = u_1^{(\alpha)}. \tag{8_4}$$

Краевые условия (8), (8_1) — (8_4), как мы уже отмечали, имеют одинаковый порядок аппроксимации.

Предпочтение, оказанное нами краевому условию в форме (8) (хотя (8_2), (8_3) и (8_4) проще), связано с удобством перехода к случаю нелинейного краевого условия вида

$$ku' = \chi(t, u, \dot{u}).$$

Отметим, что все результаты, полученные ниже для условия (8), легко переносятся на случай любого из краевых условий (8_1)—(8_4).

Погрешность аппроксимации краевого условия

$$\nu_1 = l_h^{(1)} u - (l^{(1)} u)^{(\alpha)}$$

представим в виде суммы

$$\nu_1 = (\nu_a + \nu_p)^{(\alpha)} + \nu_q, \tag{10}$$

где

$$\nu_a = a^{(+1)} u_x - ku' + 0.5hf\,(0,\, t,\, u,\, 2ku_x,\, \dot{u}), \tag{11}$$

$$\nu_p = 0.5h\,[f\,(0,\, t,\, u,\, 2ku_x,\, \dot{u}) - f\,(0,\, t,\, u,\, 2ku',\, \dot{u})], \tag{12}$$

$$\nu_q = \alpha \overset{*}{\nu_q} + (1-\alpha)\, \overset{**}{\nu_q}, \tag{13}$$

$$\overset{*}{\nu_q} = 0.5h\,[f\,(0,\, t,\, u,\, 2ku_x,\, u_{\bar{t}}) - f\,(0,\, t,\, u,\, 2ku_x,\, \dot{u})], \tag{14}$$

$$\overset{**}{\nu_q} = 05h\,[f\,(0,\, \check{t},\, \check{u},\, 2\check{k}\,\check{u}_x,\, u_{\bar{t}}) - f\,(0,\, \check{t},\, \check{k}\,\check{u}_x,\, \check{\dot{u}})]. \tag{15}$$

Найдем условие для $z = y - u$, где u — решение дифференциального уравнения (5), удовлетворяющее краевому условию $l^{(1)} u = u_1$, а y — сеточная функция, удовлетворяющая условию $l_h^{(1)} y = u_1^{(\alpha)}$. Для этого воспользуемся тождеством

$$l_h^{(1)} y - l_h^{(1)} u = -\nu_1. \tag{16}$$

Применяя теорему о среднем, будем иметь

$$f\,(0,\, t,\, y,\, 2ky_x,\, y_{\bar{t}}) - f\,(0,\, t,\, u,\, 2ku_x,\, u_{\bar{t}}) = \frac{\overline{\partial f}}{\partial u} z + \frac{\overline{\partial f}}{\partial p} 2kz_x + \frac{\overline{\partial f}}{\partial q} z_{\bar{t}}, \tag{17}$$

$$f\,(0,\, \check{t},\, \check{y},\, 2\check{k}\check{y}_x,\, y_{\bar{t}}) - f\,(0,\, \check{t},\, \check{u},\, 2\check{k}\check{u}_x,\, u_{\bar{t}}) = \frac{\overline{\partial f^*}}{\partial u} \check{z} + \frac{\overline{\partial f^*}}{\partial p} 2\check{k}\check{z}_x + \frac{\overline{\partial f^*}}{\partial q} z_{\bar{t}}, \tag{18}$$

где

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}(0,\, t,\, \bar{u},\, \bar{p},\, \bar{q}), \qquad \frac{\overline{\partial f^*}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}(0,\, \check{t},\, \overline{u^*},\, \overline{p^*},\, \overline{q^*}) \quad \text{и т. д.},$$

$$\bar{u} = u + \theta_1 z, \qquad \bar{p} = 2k\,(u_x + \theta_1 z_x), \qquad \bar{q} = u_{\bar{t}} + \theta_1 z_{\bar{t}}, \qquad 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1,$$

$$\overline{u^*} = \check{u} + \theta_2 \check{z}, \qquad \overline{p^*} = 2\check{k}\,(\check{u}_x + \theta_2 \check{z}_x), \qquad \overline{q^*} = u_{\bar{t}} + \theta_2 z_{\bar{t}}, \qquad 0 \leqslant \theta_2 \leqslant 1.$$

После подстановки (17) и (18) в (16) получим для z линейное краевое условие

$$l_1 z = (a^{(+1)} z_{\bar{x}} - \sigma_1 z)^{(\alpha)} + hq_1(z) - \mathscr{E}_1 z_{\bar{t}} = -\nu_1 \quad \text{при } x = 0, \tag{19}$$

где

$$q_1(z) = \zeta_{11} z + \zeta_{12} \check{z} + \lambda_{11} z_x + \lambda_{12} \check{z}_x, \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_{11} = 0.5\alpha \frac{\overline{\partial f}}{\partial u}, \qquad \zeta_{12} = 0{,}5\,(1-\alpha) \frac{\overline{\partial f^*}}{\partial u}, \qquad \lambda_{11} = \alpha k \frac{\overline{\partial f}}{\partial p}, \\ &\lambda_{12} = (1-\alpha)\, \check{k} \frac{\overline{\partial f^*}}{\partial p}, \quad \mathscr{E}_1 = -0.5h \left(\alpha \frac{\overline{\partial f}}{\partial q} + (1-\alpha) \frac{\overline{\partial f^*}}{\partial q}\right). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial f}{\partial q} \leqslant -m \quad \text{или} \quad -\frac{\partial f}{\partial q} \geqslant m > 0,$$

находим

$$\mathscr{E}_1 \geqslant mh > 0,$$

где m — положительная постоянная, не зависящая от h. Так как производные $\partial f/\partial u$ и $\partial f/\partial p$ ограничены, то

$$|\zeta_{sk}| \leqslant M, \qquad |\lambda_{sk}| \leqslant M, \qquad s, k = 1, 2.$$

На втором конце при $x = 1$ имеет место аналогичное условие

$$\begin{gathered} l_2 z = (a z_{\bar{x}} + \sigma_2 z)^{(\alpha)} - h q_2(z) + \mathscr{E}_2 z_{\bar{t}} = -\nu_2 \quad \text{при } x = 1, \\ q_2(z) = \zeta_{22} z + \zeta_{21} \check{z} + \lambda_{22} z_{\bar{x}} + \lambda_{21} \check{z}_{\bar{x}}. \end{gathered} \tag{19'}$$

Погрешность аппроксимации ν_2 определяется формулами, аналогичными (10) — (15).

При изучении порядка точности разностной задачи, соответствующей задаче (I), нам понадобится асимптотическое разложение ν_1 и ν_2 при $h \to 0$ и $\tau \to 0$.

Лемма 3. *Если выполнены условия:*

1) *функция* $\frac{\partial f}{\partial p}(0, t, u, p, q,)$ *удовлетворяет условию Липшица по* p, $\frac{\partial f}{\partial q}(0, t, u, p, q)$ — *по* q,

2) *в некоторой фиксированной окрестности границы* $x = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \bar{x},\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ *функции* k'', u''' *удовлетворяют условию Липшица по* x,

3) $\dot{u}(0, t)$ *удовлетворяет условию Липшица по* t,

то погрешность аппроксимации краевого условия (8) *в классе решений* $u(x, t)$ *дифференциального уравнения* (5), *удовлетворяющих условию* (6), *имеет вид*

$$\nu_1 = \bar{\nu}_1^{(\alpha)} + O(h\tau) + O(h^3), \tag{22}$$

где

$$\bar{\nu}_1 = h^2 \left\{ \frac{k u'''}{6} + \frac{k' u''}{4} + \left(\frac{k''}{2} A_1[s^2] + \frac{(k')^2}{k} A_2[s] \right) u' + \right. \tag{23}$$
$$\left. + \frac{1}{4} \frac{\partial f}{\partial p}(0, t, u, 2ku', \dot{u}) k u'' \right\}_{x=0};$$

и если, кроме того, $\frac{\partial f}{\partial q}(0, t, u, p, q)$ *удовлетворяет условию Липшица по* t, u, p, *а* $\ddot{u}(0, t)$ — *по* t, *то*

$$\nu_1 = \bar{\nu}_1^{(\alpha)} + O(h\tau^{m_\alpha}) + O(h^3), \tag{24}$$

где

$$m_\alpha = \begin{cases} 2, & \alpha = 0.5, \\ 1, & \alpha \neq 0.5. \end{cases}$$

Аналогичные оценки имеют место и для ν_2.

Погрешность ν_1 определяется формулами (10) — (15). Покажем, что $\nu_a + \nu_p = \bar{\nu}_1 + O(h^3)$. Пользуясь разложениями

$$a^{(+1)} = k + 0.5hk' + h^2\left(\frac{k''}{2} A_1[s^2] + \frac{(k')^2}{k} A_2[s]\right) + O(h^3),$$

$$u_x = u' + 0.5hu'' + \frac{h^2}{6} u''' + O(h^3),$$

находим

$$\nu_a = \left[\frac{ku''}{6} + \frac{k'u''}{4} + \left(\frac{k''}{2} A_1[s^2] + \frac{(k')^2}{k} A_2[s]\right)u'\right] h^2 + O(h^3). \tag{25}$$

Из соотношений

$$u_x - u' = O(h), \qquad a^{(+1)} u_x - ku' = 0.5\, h\,(ku')' + O(h^2),$$

$$\nu_p = 0.5\, h\,[f(0, t, u, 2ku_x, \dot{u}) - f(0, t, u, 2ku', \dot{u})] =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial p}(0, t, u, 2ku', \dot{u})\,(ku_x - ku')\cdot h + O(h^3)$$

следует, что

$$\nu_p = \frac{\partial f}{\partial p}(0, t, u, 2ku', \dot{u})\, ku''\,|_{x=0}\, h^2 + O(h^3).$$

Отсюда и из (25) получаем $\nu_a + \nu_p = \bar{\nu}_1 + O(h^3)$. Оценка ν_q также не представляет труда.

Замечание. Если $\partial f / \partial q$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\gamma \geqslant 0.5$ по t, u, p и q, то

$$\nu_1 = \bar{\nu}_1^{(\alpha)} + O(h\tau^{1+\gamma}) + O(h^3).$$

Эта оценка достаточна для доказательства леммы 4 в § 3.

2. Постановка разностной краевой задачи

После того, как выбрано исходное семейство однородных разностных схем (см. п. 4, § 1) и написаны разностные краевые условия, можно перейти к формулировке разностной краевой задачи, соответствующей задаче (I):

найти функцию $y = y(x, t)$, определенную на сетке $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющую разностному уравнению

$$\mathcal{P}_{h\tau}^{\alpha} y = (a y_{\bar{x}})_x^{(\alpha)} + \alpha\varphi(x, t, y, a^{(+1)} y_x + \hat{a} y_{\bar{x}}, y_{\bar{t}}) +$$
$$+ (1-\alpha)\,\varphi(x, \check{t}, \check{y}, \check{a}^{(+1)} \check{y}_x + \check{a}\check{y}_{\bar{x}}, y_{\bar{t}}) = 0 \text{ на } \Omega, \tag{26}$$

краевым условиям

$$l_h^{(1)} y = u_1^{(\alpha)}(t), \qquad x = 0, \tag{8}$$

$$l_h^{(2)} y = u_2^{(\alpha)}(t), \qquad x = 1, \tag{9}$$

начальному условию

$$y(x, 0) = u_0(x). \tag{27}$$

Условия сопряжения (1.5) в постановке разностной краевой задачи отсутствуют, так как мы рассматриваем схемы сквозного счета, не предусматривающие явного выделения линий разрыва коэффициента $k(x, t)$.

В силу условий (1.6) и (1.7), а также нормировки и монотонности шаблонных функционалов (см. § 1, п. 5) должны выполняться нера-

венства

$$M \geqslant a(x, t) \geqslant m > 0, \quad 0 < m \leqslant -\frac{\partial \varphi}{\partial q} \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right| \leqslant M, \tag{28}$$

$$\sigma_1 \geqslant 0, \quad \sigma_2 \geqslant 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant m > 0. \tag{29}$$

Разностную задачу, определяемую условиями (26), (8), (9), (27) — (29), будем называть задачей (II).

3. Разностная краевая задача для погрешности решения

Для выяснения вопроса о сходимости и точности решения $y(x, t)$ задачи (II) относительно решения $u = u(x, t)$ задачи (I) необходимо оценить сеточную функцию $z = y - u$ через погрешности аппроксимации Ψ, ν_1 и ν_2. Учитывая результаты, полученные в п. 6 § 1 и в п. 1 § 2, видим, что $z(x, t)$ является решением следующей разностной краевой задачи:

$$(az_{\bar{x}})_x^{(\alpha)} + Q(z) - \rho z_{\bar{t}} = -\Psi, \tag{30}$$

$$l_1 z = (a^{(+1)} z_x - \sigma_1 z)^{(\alpha)} + hq_1(z) - \mathscr{E}_1 z_{\bar{t}} = \nu_1, \qquad x = 0, \tag{31}$$

$$l_2 z = (az_{\bar{x}} + \sigma_2 z)^{(\alpha)} - hq_2(z) + \mathscr{E}_2 z_{\bar{t}} = -\nu_2, \qquad x = 1, \tag{32}$$

$$z(x, 0) = 0, \tag{33}$$

где

$$Q(z) = b_{11} z_x + b_{12} \check{z}_x + b_{22} z_{\bar{x}} + b_{21} \check{z}_{\bar{x}} + d_1 z + d_2 \check{z}, \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} q_1(z) &= (\zeta_{11} z + \zeta_{12} \check{z} + \lambda_{11} z_x + \lambda_{12} \check{z}_x)\big|_{x=0}, \\ q_2(z) &= (\zeta_{22} z + \zeta_{21} \check{z} + \lambda_{22} z_{\bar{x}} + \lambda_{21} \check{z}_{\bar{x}})\big|_{x=1}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Коэффициенты ρ, a, b_{sk}, d_s $(s, k = 1, 2)$, определяемые по формулам (1.35), и коэффициенты $\mathscr{E}_s$ ζ_{sk}, λ_{sk} $(s, k = 1, 2)$, определяемые по формулам (20) — (21), удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} &0 < m \leqslant \rho \leqslant M, \quad 0 < m \leqslant a \leqslant M, \quad |b_{sk}| \leqslant M, \quad |d_s| \leqslant M, \\ &\mathscr{E}_s \geqslant mh > 0, \quad \sigma_s \geqslant 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant m > 0, \quad |\zeta_{sk}| \leqslant M, \\ &|\lambda_{sk}| \leqslant M \quad (s, k = 1, 2). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Задачу (30) — (36) будем называть в дальнейшем задачей (III).

Здесь Ψ — погрешность аппроксимации схемы $\mathscr{P}_{h\tau}^{\alpha}$, ν_1 и ν_2 — погрешности аппроксимации краевых условий в классе решений дифференциального уравнения (1.1). Эти функции определяются с помощью формул (1.36) — (1.41) и (10) — (15).

4. О решении разностных уравнений

Приведем счетную схему решения разностной задачи (II)

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{P}_{h\tau}^{\alpha} y = [(ay_{\bar{x}})_x + b(x, t)(a^{(+1)} y_x + ay_{\bar{x}}) - d(x, t)\, y + \varphi(x, t)]^{(\alpha)} - \\ - (\rho(x, t))^{(\alpha)} \cdot y_{\bar{t}} = 0, \\ l_h^{(1)} y = u_1^{(\alpha)} \text{ при } x = 0, \quad l_h^{(2)} y = u_2^{(\alpha)} \text{ при } x = 1, \\ y(x, 0) = u_0(x) \text{ при } t = 0, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

соответствующей задаче (I) для линейного уравнения (1.11). Предположим, что $q(x, t) \geqslant 0$ и, следовательно, $d(x, t) \geqslant 0$. Перепишем разностные уравнения и краевые условия (37) в виде

$$(ay_{\bar{x}})_x - (d + \rho^{(\alpha)} / \alpha\tau)\, y + b\,(a^{(+1)}\, y_x + ay_{\bar{x}}) = -F^*, \tag{38}$$

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1, \qquad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2, \tag{39}$$

где

$$F^* = \rho^{(\alpha)} \check{y} / \alpha\tau + \frac{1-\alpha}{\alpha}\,[(\check{a}\,\check{y}_{\bar{x}})_x - \check{d}\,\check{y} + \check{\varphi} + \check{b}\,(\check{a}^{(+1)}\check{y}_x + \check{a}\,\check{y}_{\bar{x}})] + \varphi(x, t),$$

$$\varkappa_1 = \bar{a}_1 / (\bar{a}_1 + \bar{\sigma}_1 h + \mathscr{E}_1 h / \alpha\tau), \qquad \varkappa_2 = \bar{a}_N / (\bar{a}_N + \bar{\sigma}_2 h + \mathscr{E}_2 h / \alpha\tau),$$

$$\bar{a}_1 = a_1 (1 + 0.5 h b_1), \qquad \bar{a}_N = a_N (1 - 0.5 h b_{N-1}), \qquad \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + 0.5\, h q_0, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 + 0.5\, h q_N,$$

$$\mu_1 = \varkappa_1 \{h\mathscr{E}_1 / \alpha\bar{a}_1\tau + (\check{a}_1\check{y}_{x,\,0} + \check{\sigma}_1\check{y}_0)\,(1-\alpha) / \alpha\bar{a}_1 + (u_1 + 0.5\, h f_0)^{(\alpha)} / \alpha\},$$

$$f_0 = f(0, t), \qquad q_0 = q(0, t) \qquad q_N = q(1, t), \qquad y_0 = y(0, t), \qquad a_1 = a(h, t) \quad \text{и т. д.}$$

Выражение для μ_2 не выписываем.

В силу условий $\sigma_1 \geqslant 0$, $\sigma_2 \geqslant 0$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant m > 0$, $\mathscr{E}_1 \geqslant mh > 0$, $\mathscr{E}_2 \geqslant mh > 0$, $q \geqslant 0$ возможен один из двух случаев (при $\bar{a} > 0$, см. (43)):

$$1)\ 0 \leqslant \varkappa_1 < 1, \quad 0 \leqslant \varkappa_2 \leqslant 1; \qquad 2)\ 0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varkappa_2 < 1. \tag{40}$$

В момент $t - \tau$ решение задачи известно. Поэтому при определении значений $y = y(x, t)$ на новой строке t правая часть F^* и коэффициенты $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, μ_1 и μ_2 известны. В результате все вычисления на каждой строке сводятся к решению разностной краевой задачи

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad 0 < i < N, \tag{41}$$

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1, \qquad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2, \tag{42}$$

где

$$F_i = h^2 F_i^*, \qquad A_i = a_i (1 - 0.5\, h b_i), \qquad B_i = a_{i+1} (1 + 0.5\, h b_i),$$

$$C_i = A_i + B_i + h^2 D_i, \qquad D_i = d_i + \rho_i^{(\alpha)} / \alpha\tau,$$

$$a_i = a(x_i, t), \qquad b_i = b(x_i, t) \quad \text{и т. д.}$$

Задача (41) — (42) разрешима, если

$$A_i > 0, \qquad B_i > 0, \qquad D_i \geqslant 0. \tag{43}$$

Условия $A_i > 0$, $B_i > 0$ будут выполнены, если $1 - 0.5\, h b_i > 0$ или $h < h_0 = \min 2/|b_i|$, т. е. сетка по x достаточно подробна. Если $b_i \equiv 0$, то условие $h < h_0$ отсутствует.

Разностная краевая задача (41) — (42), коэффициенты которой удовлетворяют условиям (43) и, следовательно, условиям (40), может быть решена либо одним из итерационных методов, либо безытерационным методом цепочки или прогонки, нашедшим в последние годы широкое применение в вычислительной практике (см. [17]—[19], [2], [11]). Остановимся на этом методе подробнее.

1. *Формулы правой прогонки* имеют вид

$$\vec{\alpha}_{i+1} = \frac{B_i}{B_i + (1 - \alpha_i)\, A_i + h^2 D_i}, \qquad 1 < i < N, \ \alpha_1 = \varkappa_1, \tag{44}$$

$$\vec{\beta}_{i+1} = \frac{\alpha_{i+1}}{B_i}\,(A_i \beta_i + F_i), \qquad 1 < i < N, \ \beta_1 = \mu_1, \tag{45}$$

$$\overleftarrow{y}_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad 0 \leqslant i < N, \ y_N = (\mu_2 + \varkappa_2 \beta_N) / (1 - \varkappa_2 \alpha_N). \tag{46}$$

Стрелки $\rightarrow$ и $\leftarrow$ указывают направление счета: $\rightarrow$ от i к $i+1$, $\leftarrow$ от $i+1$ к i.

Для вывода формул (44) — (46) можно использовать либо метод факторизации [17], либо метод исключения (см. [18], [19]) который состоит в следующем. Будем искать решение нашей задачи в виде (46), где α_i и β_i — коэффициенты, подлежащие определению. Подставим $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ в уравнение (41):

$$(A_i\alpha_i - C_i)\, y_i + B_i y_{i+1} + A_i\beta_i + F_i = 0;$$

затем при помощи (46) исключим y_i:

$$[(A_i\alpha_i - C_i)\,\alpha_{i+1} + B_i]\, y_{i+1} + [(A_i\alpha_i - C_i)\,\beta_{i+1} + (A_i\beta_i + F_i)] = 0.$$

Формулы (44) и (45) получаются из условия равенства нулю выражений в квадратных скобках. Начальные условия $\alpha_1 = \varkappa_1$, $\beta_1 = \mu_1$ следуют из условий $y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$, а выражение для y_N — из формулы $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$ и краевого условия $y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2$ после исключения отсюда y_{N-1}.

Вычисления по формулам (44) — (46) устойчивы, если выполнены условия (40) и (43). При этом все $\alpha_i \leqslant 1$, причем $\alpha_N < 1$, если $\varkappa_1 < 1$, и $\alpha_N = 1$, если $\varkappa_1 = 1$, $D_i = 0$. Поэтому выражение $1 - \varkappa_2\alpha_N$ всегда положительно.

2. *Формулы левой прогонки:*

$$\overleftarrow{\xi}_i = \frac{A_i}{A_i + (1 - \xi_{i+1})\, B_i + h^2 D_i}, \qquad 1 < i < N, \quad \xi_N = \varkappa_2, \tag{47}$$

$$\overleftarrow{\eta}_i = \frac{\xi_i}{A_i}\,(B_i\eta_{i+1} + F_i), \qquad 1 < i < N, \quad \eta_N = \mu_2, \tag{48}$$

$$\overrightarrow{y}_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}, \qquad 0 \leqslant i < N, \qquad y_0 = (\mu_1 + \varkappa_1\eta_1) / (1 - \varkappa_1\xi_1). \tag{49}$$

3. *Метод встречных прогонок.* Иногда, особенно при ручном счете (или в случае малой емкости внутренней памяти вычислительной машины), удобно пользоваться методом встречных прогонок (челночным методом), при котором вычисления ведутся независимо по формулам (44), (45) и (47), (48) до некоторого $i = n$, затем из условий сопряжения определяется y_n и снова вычисления продолжаются направо от точки $i = n$ по формуле (49) и, независимо, налево по формуле (46). Итак, пусть найдены величины α_{n+1}, β_{n+1}, ξ_{n+1} и η_{n+1}. Тогда будем иметь

$$y_n = \alpha_{n+1}\, y_{n+1} + \beta_{n+1}, \qquad y_{n+1} = \xi_{n+1}\, y_n + \eta_{n+1}.$$

Исключая отсюда y_{n+1}, определим

$$y_n = \frac{\beta_{n+1} + \alpha_{n+1}\eta_{n+1}}{1 - \alpha_{n+1}\,\eta_{n+1}}.$$

Зная y_n, по формуле (46) найдем все y_i для $i < n$, а по формуле (49) — все y_i для $i > n$.

При решении нелинейных разностных уравнений обычно применяются различные итерационные методы, а для счета итераций — метод прогонки. Мы не имеем возможности останавливаться здесь на этом вопросе (см., например, [10], [11] и др.). Иногда с целью избежать итераций берут коэффициенты схемы, зависящие от искомой функции на предыдущей строке, чтобы получить для значения y на новой строке линейное уравнение. При этом, конечно, получается схема первого порядка аппроксимации относительно τ.

§ 3. О точности схем сквозного счета

1. Оценки решения задачи (III)

Вопрос о порядке точности решения разностной задачи (II) сведен в § 2 к оценке решения задачи (III) для $z = y - u$ через погрешности аппроксимации Ψ, ν_1 и ν_2.

Оценки решения задачи (III) в несколько менее общей постановке были получены в [4] и [5].

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$a \leqslant M, \qquad |a_{\bar t}| \leqslant M, \qquad \sigma_s \leqslant M, \qquad |(\sigma_s)_{\bar t}| \leqslant M, \qquad s = 1, 2, \tag{1}$$

$$0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{2}$$

то для решения задачи (III) *с начальным условием*

$$z|_{t=0} = z(x, 0)$$

при достаточно малом $\tau < \tau_0$ *имеет место неравенство*

$$z(x, t)\|_0 \leqslant \left[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \|z_{\bar t}(x, t')\|_2^2\right]^{1/2} + \widetilde{M}\left(\|z(x, t)\|_{\bar 2} + \|z_{\bar x}(x, t)\|_2\right) \leqslant \tag{3}$$

$$\leqslant M\left\{\|z(x, 0)\|_{\bar 2} + \|z_{\bar x}(x, 0)\|_2 + \left[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \overline{\|\Psi(x, t')\|_2^2}\right]^{1/2}\right\},$$

где M *и* $\widetilde{M}$ — *положительные постоянные, не зависящие от* h *и* τ,

$$\|z(x, t)\|_{\bar 2} = \|z(x, t)\|_2 + \gamma_1 |z(0, t)| + \gamma_2 |z(1, t)|, \tag{4}$$

$$\gamma_s = 0 \text{ при } \sigma_s = 0, \ \gamma_s = 1 \text{ при } \sigma_s \geqslant m > 0,$$

$$\overline{\|\Psi(x, t)\|_2} = \|\Psi(x, t)\|_2 + |\nu_1^*(t)| + |\nu_2^*(t)|, \tag{5}$$

$$\nu_s^*(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \nu_s(t) \text{ при } \mathscr{E}_s \geqslant mh > 0,$$

$$(s = 1, 2),$$

$$\nu_s^*(t) = \nu_s(t) \text{ при } \mathscr{E}_s \geqslant m > 0.$$

Для первой краевой задачи ($z(0, t) = z(1, t) = 0$) оценка (3) сохраняет силу, если формально положить $\nu_s \equiv 0$, $s = 1, 2$.

Теорема 1 была доказана в [4], [5] для случая $\zeta_{sk} = 0$, $\lambda_{sk} = 0$ ($s, k = 1, 2$), т. е. для краевых условий

$$\left.\begin{aligned} l_1^* z &= (a^{(+1)} z_x - \sigma_1 z)^{(\alpha)} - \mathscr{E}_1 z_{\bar t} = \nu_1, & x = 0, \\ l_2^* z &= (a z_{\bar x} + \sigma_2 z)^{(\alpha)} + \mathscr{E}_2 z_{\bar t} = -\nu_2, & x = 1, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

а также для операторов

$$Q(z) = b_1 z_{x^*} + b_2 \check{z}_{x^*} + d_1 z + d_2 \check{z}, \quad z_{x^*} = 0.5\,(z_{\bar x} + z_x) \tag{7}$$

и

$$Q(z) = b_1 z_{\bar x} + b_2 \check{z}_{\bar x} + d_1 z + d_2 \check{z}. \tag{8}$$

Метод вывода оценки (3), предложенный в [5], оказывается полностью пригодным и в нашем случае, причем изменение доказательства, связанное с усложнением оператора $Q(z)$, настолько несущественно, что мы не будем на нем останавливаться. В результате замены условий (6) условиями (2.31) и (2.32) в правой части тождества (2.11) работы [5] появится дополнительное слагаемое

$$\bar R = \tau h\,(\zeta_{11} z_0 + \zeta_{12} \check{z}_0 + \lambda_{11} z_{x,0} + \lambda_{12} \check{z}_{x,0})\, z_{\bar t,0} + \tau h\,(\zeta_{22} z_N +$$

$$+ \zeta_{21} \check{z}_N + \lambda_{22} z_{\bar x, N} + \lambda_{21} \check{z}_{\bar x, N})\, z_{\bar t, N} \quad (z_0 = z(0, t),\ z_N = z(1, t) \text{ и т. д.}).$$

Для него с помощью обычных для метода работы [4] рассуждений получаем оценку

$$|\overline{R}| \leqslant \frac{\tau}{8}(\mathscr{E}_1 z_{\bar{t},0}^2 + \mathscr{E}_2 z_{\bar{t},N}^2) + M\tau(I + \check{I}).$$

Основное интегральное неравенство (2.17) из [5] и все последующие вычисления остаются без изменений.

Оценка правой части по норме $\|\Psi\|_2$ является слишком грубой для доказательства сходимости решения задачи (II) в случае разрывного коэффициента теплопроводности $k(x, t)$. В [5] для решения задачи (III) при дополнительных предположениях

$$\Psi = \overline{\psi}^{(\alpha)}, \quad \nu_1 = \overline{\nu}_1^{(\alpha)}, \quad \nu_2 = \overline{\nu}_2^{(\alpha)}, \tag{9}$$

$$\rho \leqslant M, \quad \mathscr{E}_1 \leqslant M, \quad \mathscr{E}_2 \leqslant M \tag{10}$$

была получена так называемая улучшенная оценка, использующая нормы

$$|||\overline{\psi}||_5 = |||\overline{\psi}||_4 + |\overline{\nu}_1| + |\overline{\nu}_2|, \qquad \|\overline{\psi}\|_{5^*} = \|\overline{\psi}\|_{4^*} + |\overline{\nu}_1| + |\nu_2|. \tag{11}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* (1), (2), (9) *и* (10), *то при достаточно малом* $\tau < \tau_0$ *для решения задачи* (III) *имеет место априорная оценка*

$$\|z(x, t)\|_0 \leqslant M\Big\{\|\overline{\psi}(x, 0)\|_5 + |||\overline{\psi}(x, t)\|_{5^*} + \tag{12}$$

$$+ \Big[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau(\|\overline{\psi}(x, t')\|_{5^*} + \|\overline{\psi}_{\bar{t}}(x, t')\|_{5^*})^2\Big]^{1/2}\Big\} + \overline{M}\Big[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau\|\overline{\psi}(x, t')\|_5^2\Big]^{1/2},$$

где $\overline{M} = 0$ *при* $b_{11} = b_{12} = b_{22} = b_{21} = 0$.

Эта теорема соответствует теореме 6 статьи [5] с учетом сделанных выше замечаний относительно $Q(z)$ и краевых условий. При ее доказательстве решение задачи (III) следует представить в виде суммы $z = v + w$, где w — решение «стационарной» задачи

$$(aw_{\bar{x}})_x = -\overline{\psi}, \qquad a_1 w_{x,0} - \sigma_1 w_0 = -\overline{\nu}_1, \qquad a_N w_{\bar{x},N} + \sigma_2 w_N = \overline{\nu}_2.$$

Тогда для v получим следующие условия:

$$(av_{\bar{x}})_x^{(\alpha)} + Q(v) - \rho v_{\bar{t}} = -\Psi^*, \qquad \Psi^* = Q(w) - \rho(w_{\bar{t}}),$$

$$l_1 v = \nu_1^*, \qquad \nu_1^* = \mathscr{E}_1 w_{\bar{t},0} - 0.5h(\zeta_{11}w_0 + \zeta_{12}\check{w}_0 + \lambda_{11}w_{x,0} + \lambda_{12}\check{w}_{x,0}),$$

$$l_2 v = -\nu_2^*, \qquad \nu_2^* = \mathscr{E}_2 w_{\bar{t},N} - 0.5h(\zeta_{22}w_N + \zeta_{21}\check{w}_N + \lambda_{22}w_{\bar{x},N} + \lambda_{21}\check{w}_{\bar{x},N}).$$

Для оценки функции $v(x, t)$ воспользуемся теоремой 1. Учитывая оценки, полученные в § 1 статьи [5],

$$\|w\|_0 \leqslant M\|\overline{\psi}\|_{5^*}, \qquad \|w_{\bar{t}}\|_0 \leqslant M\|\overline{\psi}\|_{5^*}, \qquad |w_{x,0}| \leqslant M\|\overline{\psi}\|_{5^*},$$

$$|w_{\bar{x},N}| \leqslant M\|\overline{\psi}\|_{5^*}, \qquad \|w_{\bar{x}}\|_2 \leqslant M\|\overline{\psi}\|_5,$$

находим

$$\|Q(w)\|_2 \leqslant M(\|\overline{\psi}\|_{5^*} + \|\overline{\psi}_{\bar{t}}\|_{5^*}) + \overline{M}\|\overline{\psi}\|_5.$$

Замечание. Из (12) видно, что при $b_{sk} = 0$ $(s, k = 1, 2)$ и $\overline{\psi}(x, 0) = 0$ неравенство (12) содержит только $\|\psi\|_{5^*}$ и $\|\overline{\psi}_{\bar{t}}\|_{5^*}$.

2. Свойства решения и коэффициентов задачи (I)

Чтобы упростить формулировки последующих теорем, будем всегда предполагать, что решение задачи (I), а также функции, входящие в

дифференциальное уравнение $\mathcal{P}u = 0$ и краевые условия, обладают дифференциальными свойствами (во всей области $\overline{Д}$ или в каждой из областей $\Delta_\nu = (\eta_\nu(t) < x < \eta_{\nu+1}(t),\ 0 < t \leqslant T)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \nu_0$), обеспечивающими максимальный порядок аппроксимации для схемы и разностных краевых условий. Эти свойства будут сформулированы ниже.

Предполагается всюду, что функция $f(x, t, u, p, q)$ имеет ограниченные для всех значений аргументов производные $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial p$, $\partial f/\partial q$ (см. (1.6)).

Функции $k(x, t)$ и $f(x, t, u, p, q)$ имеют разрывы 1-го рода по переменным (x, t) на конечном числе кривых Γ_ν $(x = \eta_\nu(t), \nu = 1, 2, \ldots, \nu_0)$, которые разбивают область $\overline{Д}$ на подобласти Δ_ν. Обозначим

$$k_{л,\nu} = k(\eta_\nu(t) - 0, t), \qquad k_{п,\nu} = k(\eta_\nu(t) + 0, t),$$

$$f_{л,\nu} = f(\eta_\nu(t) - 0, t, u(\eta_\nu(t), t), 2(ku')_{л,\nu}, \dot{u}_{л,\nu}) \quad \text{и т. д.}$$

Если некоторая функция $v(x, t)$ рассматривается в замкнутой области

$$\overline{\Delta}_\nu = (\eta_\nu(t) \leqslant x \leqslant \eta_{\nu+1}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T),$$

то при этом предполагается, что $v(\eta_\nu(t), t) = v_{п,\nu}$, $v(\eta_{\nu+1}(t), t) = v_{л,\nu+1}$.

Кривая Γ_ν пересекает каждую из прямых $t = j\tau$, $j = 0, 1, \ldots$, в точке $x = \eta_\nu(t) = x_{n_\nu} + \theta_\nu h$, где $0 \leqslant \theta_\nu \leqslant 1$, $x_{n_\nu} = n_\nu h$, n_ν — целое число, (x_{n_ν}, t) — точка сетки Ω. Числа n_ν и θ_ν, вообще говоря, являются функциями h и t, $n_\nu = n_\nu(h, t)$ и $\theta_\nu = \theta_\nu(h, t)$. Если линия Γ_ν параллельна оси t (неподвижный разрыв), то n_ν и θ_ν зависят только от h; $n_\nu = n_\nu(h)$, $\theta_\nu = \theta_\nu(h)$.

В этой статье рассматриваются лишь неподвижные разрывы, т. е.

$$x = \eta_\nu = \text{const} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0) \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

В дальнейшем будем предполагать:

(K_1). В каждой из областей $\overline{\Delta}_\nu$ выполнены условия лемм 1 и 2. Тогда погрешность аппроксимации схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{\alpha}$ в классе решений уравнения $\mathcal{P}u = 0$

$$\Psi = O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha}), \text{ где } m_\alpha = \begin{cases} 2, & \alpha = 0.5, \\ 1, & \alpha \neq 0.5, \end{cases} \tag{13}$$

во всех точках сетки Ω, кроме точек

$$(x_{n_\nu}, t) \text{ и } (x_{n_\nu+1}, t), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \nu_0; \qquad t = \tau, 2\tau, \ldots, L\tau = T.$$

Асимптотический порядок Ψ при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ в указанных точках исследуется в п. 4.

(K_2). Выполнены условия леммы 3, в силу которых погрешности аппроксимации краевых условий имеют порядок

$$\nu_s = \overline{\nu}_s^{(\alpha)} h^2 + O(h\tau^{m_\alpha}) + O(h^3), \qquad s = 1, 2, \tag{14}$$

где $\overline{\nu}_s$ определяется по формуле (2.23).

(K_3). Условию Липшица по t удовлетворяют функции $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и $k(x, t)$ — в каждой из областей $\overline{\Delta}_\nu$.

(K_4). Предельные значения функций

$$k,\ k',\ k'',\ u',\ u'',\ u'''$$

удовлетворяют вдоль каждой из линий Γ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0, \nu_0 + 1)$ условию Липшица по t, а предельные значения функции $\partial^2 u/\partial x \partial t$ — только вдоль внутренних линий для $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$.

В случае гладких функций $k(x, t)$ и $f(x, t, u, p, q)$ условие (K_1) выполнено во всей области $\overline{Д}$, а условие (K_4) — только при $\nu = 0$ $(x = 0)$ и $\nu = \nu_0 + 1$ $(x = 1)$.

Из перечисленных условий следует, что для коэффициентов задачи (III) справедливы неравенства

$$0 < mh \leqslant \mathscr{E}_s \leqslant Mh, \quad 0 < m \leqslant \rho \leqslant M, \quad 0 < m \leqslant a \leqslant M, \quad 0 \leqslant \sigma_s(t) \leqslant M, \tag{15}$$

$$|\zeta_{sk}| \leqslant M, \quad |\lambda_{sk}| \leqslant M, \quad s, k = 1, 2, \tag{16}$$

$$|a_{\bar{t}}| \leqslant M, \qquad |(\sigma_s)_{\bar{t}}| \leqslant M, \tag{17}$$

обеспечивающие применимость теорем 1 и 2 при $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

3. Влияние погрешности аппроксимации краевых условий на точность решения разностной задачи

Решение задачи (III) можно представить в виде суммы двух частных решений $z = z_1 + z_2$, где z_1 — решение задачи с однородными краевыми условиями $(\nu_1 \equiv 0, \nu_2 \equiv 0)$, а z_2 — решение задачи (III) с однородным уравнением $(\Psi = 0)$.

Как было уже отмечено в п. 2, мы рассматриваем лишь неподвижные разрывы коэффициента $k(x, t)$.

Лемма 4. *Для погрешности z_2 решения задачи* (II) *за счет погрешности аппроксимации краевых условий при достаточно малом $\tau < \tau_0$ имеет место оценка*

$$\|z_2(x, t)\|_0 \leqslant M(h^2 + \tau^{m_\alpha}), \qquad \text{если } 0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{18}$$

Для доказательства леммы 4 надо оценить решение z_2 задачи (III) при $\Psi \equiv 0$. Представим ν_s и, соответственно, z_2 в виде

$$\nu_s = \nu_s^{(1)} + \nu_s^{(2)}, \qquad z_2 = z_2^{(1)} + z_2^{(2)}, \qquad \nu_s^{(1)} = \bar{\nu}_s^{(\alpha)},$$

$$\bar{\nu}_s = \bar{\nu}_s^{(0)} h^2, \qquad \nu_s^{(2)} = O(h\tau^{m_\alpha}) + O(h^3),$$

где $\bar{\nu}_1^{(0)}$ определяется по формуле (2.23) и зависит от значений $k, k', k'', u', u'', u''', \dot{u}$ при $x = 0$ (аналогичной формулой выражается $\bar{\nu}_2^{(0)}$).

Пользуясь теоремой 1, находим

$$\|z_2^{(2)}\|_0 \leqslant M(\sqrt{h}\,\tau^{m_\alpha} + h^{3/2}). \tag{19}$$

Для оценки $\|z_2^{(1)}\|_0$ используем теорему 2, которая дает

$$\|z_2^{(1)}\|_0 \leqslant M \{\max_{0<t'\leqslant t} [|\bar{\nu}_1^{(0)}(t')| + |\bar{\nu}_2^{(0)}(t')| + |(\bar{\nu}_1^{(0)})_{\bar{t}}| + |(\bar{\nu}_2^{(0)}(t')_{\bar{t}}|] + \\ + |\bar{\nu}_1^{(0)}(0)| + |\bar{\nu}_2^{(0)}(0)|\} h^2.$$

Отсюда в силу ограниченности $|\bar{\nu}_s^{(0)}|$ и $|(\bar{\nu}_s^{(0)})_{\bar{t}}|$ следует

$$\|z_2^{(1)}(x, t)\|_0 \leqslant Mh^2.$$

Учитывая (19), получаем (18).

4. Точность в классе непрерывных коэффициентов

Предположим теперь, что коэффициенты $k(x, t)$ и $f(x, t, u, p, q)$ не имеют линий разрыва ($\nu_0 = 0$) и условия, сформулированные в п. 2, выполнены во всей области $\bar{Д}$. В этом случае

$$\Psi = O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha}) \text{ во всех точках сетки } \Omega. \tag{20}$$

Теорема 3. *Решение y задачи* (II) *равномерно сходится к решению $u(x, t)$ задачи* (I) *при независимом стремлении к нулю h и τ, так что при $\tau < \tau_0$ справедливо неравенство*

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^2 + \tau^{m_\alpha}) \text{ для } 0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{21}$$

если выполнено условие (20).

Для доказательства теоремы 3 достаточно оценить z_1 — решение задачи (III) при $\nu_1 \equiv 0$, $\nu_2 \equiv 0$ — по теореме 1 и воспользоваться затем леммой 4.

Замечая, что $\|\Psi(x, t)\|_2 = O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha})$, и пользуясь теоремой 1, находим

$$\|z_1(x, t)\|_0 \leqslant M(h^2 + \tau^{m_\alpha}).$$

5. Погрешность аппроксимации в окрестности линии разрыва

Пусть на некоторой кривой $x = \eta_\nu(t)$, принадлежащей семейству $\{\Gamma_\nu\}$ (см. п. 2, § 1), функции $k(x, t)$ и $f(x, t, u, p, q)$ (вместе со своими производиыми $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial p$ и $\partial f/\partial q$) имеют разрывы 1-го рода по (x, t). Найдем асимптотическое поведение погрешности аппроксимации Ψ схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{\alpha}$ в точках (x_{n_ν}, t) и $(x_{n_\nu+1}, t)$ сетки Ω.

Для упрощения записи индекс ν будем опускать и писать η, n, θ вместо η_ν, n_ν и θ_ν, полагая $\eta = x_n + \theta h$, $x_n = nh$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ (см. п. 2). Сеточная функция

$$\Psi = (\psi_a + \psi_p + \psi_\varphi)^{(\alpha)} + \psi_q \tag{22}$$

определяется по формулам (1.36) — (1.41).

Разложение для ψ_a в точках $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$ получено в [1]:

$$h\psi_{a,\,n} = O(1), \qquad h\psi_{a,\,n+1} = O(1), \qquad \psi_{a,\,n} + \psi_{a,\,n+1} = O(1) \tag{23}$$
$$(\psi_{a,\,n} = \psi_a(x_n, t))$$

для любой схемы из исходного семейства. Для наилучшей канонической схемы (1.28) с шаблонными функционалами

$$A[\mu(s)] = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{\mu(s)}\right]^{-1}, \qquad F[\mu(s)] = \int_{-0.5}^{0.5} \mu(s)\, ds \tag{24}$$

имеем

$$\psi_{a,\,n} = O(1), \qquad \psi_{a,\,n} + \psi_{a,\,n+1} = (0.5 - \theta)\,[(ku')'_{\text{п}} - (ku')'_{\text{л}}] + O(h). \tag{25}$$

Рассмотрим теперь погрешность ψ_p при $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$:

$$\psi_{p,\,n} = \left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}\right)_n (a_{n+1}u_{x,\,n} + a_n u_{\bar{x},\,n} - 2\,(ku')'_n),$$

$$\psi_{p,\,n+1} = \left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}\right)_{n+1} (a_{n+2}u_{x,\,n+1} + a_{n+1}u_{x,\,n} - 2\,(ku')_{n+1})$$

где $(\overline{\partial\varphi/\partial p})_n$ и $(\overline{\partial\varphi/\partial p})_{n+1}$ — значения производной $\partial\varphi/\partial p$ при некоторых средних значениях $\bar{p}_n$ и $\bar{p}_{n+1}$ аргумента p; так, например,

$$\bar{p}_n = 2\,(ku')_n + \theta_1\,(a_{n+1}u_{x,\,n} + a_n u_{\bar{x},\,n} - 2\,(ku')_n), \qquad 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1.$$

Из разложений $u_{x,\,n} = \theta u'_{\text{л}} + (1-\theta)\,u'_{\text{п}} + O(h)$, $u_{\bar{x},\,n} = u'_{\text{л}} + O(h)$, $u_{x,\,n+1} = u'_{\text{п}} + O(h)$, $a_n = k_{\text{л}} + O(h)$, $a_{n+2} = k_{\text{п}} + O(h)$ следует:

$$a_{n+1}u_{x,\,n} + a_n u_{\bar{x},\,n} - 2\,(ku')_n = \left[a_{n+1}\left(\frac{\theta}{k_{\text{л}}} + \frac{1-\theta}{k_{\text{п}}}\right) - 1\right] W + O(h),$$

$$a_{n+2}u_{x,\,n+1} + a_{n+1}u_{x,\,n} - 2\,(ku')_{n+1} = \left[a_{n+1}\left(\frac{\theta}{k_{\text{л}}} + \frac{1-\theta}{k_{\text{п}}}\right) - 1\right] W + O(h),$$

где $W = k_{\text{л}}u'_{\text{л}} = k_{\text{п}}u'_{\text{п}}$ (см. (1.5)).

Отсюда видно, что

$$\psi_{p,\,n} = O(1), \qquad \psi_{p,\,n+1} = O(1) \tag{26}$$

в исходном классе схем, а для наилучшей канонической схемы

$$\psi_{p,\,n} = O(h), \qquad \psi_{p,\,n+1} = O(h), \tag{27}$$

так как в этом случае

$$a_{n+1}\left(\frac{\theta}{k_{\text{л}}} + \frac{1-\theta}{k_{\text{п}}}\right) - 1 = O(h).$$

Нетрудно убедиться, что справедлива

Лемма 5. *Если* $\eta = \text{const}$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T$ (*разрыв неподвижен*) *и функция* $\dfrac{\partial f^{\varkappa-1}}{\partial p^{\varkappa-1}}(x, t, u, p, q)$ *удовлетворяет условию Липшица по* t, u, p *и* q, *то справедливы оценки*

$$|(\psi_{p,\,n})_{\bar{t}}| \leqslant Mh^{\varkappa-1}, \qquad |(\psi_{p,\,n+1})_{\bar{t}}| \leqslant Mh^{\varkappa-1}, \tag{28}$$

где $\varkappa = 1$ *для всего класса исходных схем,* $\varkappa = 2$ *для схемы* (24).

Перейдем теперь к оценке в точках $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$ выражения

$$\psi_\varphi = F\,[f\,(x + sh,\, t,\, u,\, 2ku',\, \dot{u})] - f\,(x,\, t,\, u,\, 2ku',\, \dot{u}) \qquad (-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5).$$

При этом будем предполагать, что разрыв неподвижен, т. е. $\eta = \text{const}$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. В силу замечания 1 (п. 1, § 1) производная $\dot{u}$ непрерывна при $x = \eta$ ($\dot{u}_{\text{л}} = \dot{u}_{\text{п}}$).

Возможны два случая: $\theta < 0.5$ и $\theta > 0.5$. Проведем все рассуждения, предполагая, что $\theta < 0.5$. Так как разрыв находится вне интервала $(x_n + 0.5h,\ x_{n+1} + 0.5h)$, то сразу находим $\psi_{\varphi,\,n+1} = O(h^2)$ для любой исходной схемы.

Рассмотрим теперь наилучшую схему (24), для которой

$$\psi_{\varphi,n}=\int_{-0.5}^{0.5} f(x_n+sh,t,u_n,2(ku')_n,\dot{u}_n)\,ds-f(x_n,t,u_n,2(ku')_n,\dot{u}_n), \tag{29}$$

и будем предполагать, что разрыв неподвижен.

Разложим подынтегральную функцию в окрестности точки $x=\eta$:

1) если $s<\theta$, то

$$f(x_n+sh,t,u_n,2(ku')_n,\dot{u}_n)=f_л+\left\{(s-\theta)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_л-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_л u'_л+\right.\right. \tag{30}$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_л 2(ku')'_л+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_л \dot{u}'_л\right]\theta\right\}h+O(h^2)\qquad\left(\dot{u}'=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right);$$

2) если $s>\theta$, то

$$f(x_n+sh,t,u_n,2(ku')_n,\dot{u}_n)=f_п+\left\{(s-\theta)\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)_п-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_п u'_л+\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_п 2(ku')'_л+\right. \tag{31}$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_п \dot{u}'_л\right]\theta\right\}h+O(h^2)=f_п+h(s-\theta)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_п+\beta h+O(h^2).$$

Разложение для второго слагаемого в (29) получается по формуле (30) при $s=0$. После подстановки этих выражений в (29) находим

$$\psi_{\varphi,n}=(0.5-\theta)(f_п-f_л)+ \tag{32}$$
$$+0.5(0.5-\theta)\left[(0.5+\theta)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_л+(0.5-\theta)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_п+2\beta\right]h+O(h).$$

Чтобы получить разложение для $\psi_{\varphi,n}$ в случае произвольной схемы из исходного семейства, воспользуемся формулами (30) и (31), выписывая в них только главные члены:

$$f(x_n+sh,t,u_n,2(ku')_n,\dot{u}_n)=f^*(s)+O(h), \tag{33}$$

где

$$f^*(s)=\begin{cases} f_л, & s<\theta,\\ f_п, & s>\theta.\end{cases}$$

Тогда можно написать

$$\psi_{\varphi,n}=F[f^*(s)]-f_л+O(h)=O(1). \tag{34}$$

Собирая все результаты, получаем для ψ_n и ψ_{n+1} следующие разложения по степеням h:

$$\psi_n=\left(\frac{\beta_{-1}}{h}+\beta_0+\beta_1 h\right)+O(h^2)=\bar{\psi}_n+O(h^2)\qquad(\psi=\psi_a+\psi_p+\psi_\varphi), \tag{35}$$

$$\psi_n+\psi_{n+1}=(\gamma_0+\gamma_1 h)+O(h^2)=(\bar{\psi}_n+\bar{\psi}_{n+1})+O(h^2), \tag{36}$$

где β_{-1} — выражение, зависящее от левого и правого предельных значений функций k, u' на линии $x=\eta$; β_0 и γ_0 — от предельных значений k, k', u', $\dot{u}''$, β_1; γ_1 — от предельных значений k, k', k'', u', u'', $\dot{u}'''$, $\dot{u}'$.

При этом β_{-1}, β_0, γ_0, β_1 и γ_1 удовлетворяют условиям Липшица по всем своим аргументам. Для наилучшей канонической схемы (24)

$$\beta_1=0,\qquad \gamma_0=(0.5-\theta)[(\mathscr{P}u)_п-(\mathscr{P}u)_л]=0.$$

Тем самым доказана следующая

Лемма 6. *Если* $k(x, t)$ *и* $f(x, t, u, p, q)$ *имеют разрывы* 1-*го рода на прямой* $x = \eta = \text{const}$ *и выполнены все указанные выше* (*в* п. 2 *и* п. 5) *условия, то*

$$\left.\begin{aligned} &h\bar{\psi}_n = O(h^{\varkappa-1}), \qquad \bar{\psi}_n + \bar{\psi}_{n+1} = O(h^{\varkappa-1}),\\ &h(\bar{\psi}_n)_{\bar{t}} = O(h^{\varkappa-1}), \qquad (\bar{\psi}_n + \bar{\psi}_{n+1})_{\bar{t}} = O(h^{\varkappa-1}),\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где $\varkappa = 1$ *для всего класса исходных схем,* $\varkappa = 2$ *для схемы* (24).

Так как в случае неподвижного разрыва производная $\dot{u}$ непрерывна при $x = \eta$, то

$$\psi_q = O(\tau^{m_\alpha}) \quad \text{во всех точках сетки } \Omega. \tag{38}$$

Если разрыв движущийся, то $\dot{u}_л \neq \dot{u}_п$ и $\gamma_0 \neq 0$ даже для схемы (24) (условие $\beta_{-1} = 0$ для схемы (24) выполняется всегда).

Замечание. Как показывают предыдущие рассуждения, если линия разрыва проходит через точки (x_n, t) или (x_{n+1}, t) сетки Ω ($\theta = 0$ или $\theta = 1$) и функция $f(x, t, u, p, q)$ непрерывна при $x = \eta$, то для любой исходной схемы

$$\bar{\psi}_n = O(h), \qquad \bar{\psi}_{n+1} = O(h).$$

Однако если точка $x = \eta$ иррациональна, то и величина θ должна быть иррациональной, т. е. в этом случае условия $\theta = 0$ или $\theta = 1$ не могут быть реализованы ни при каком $h = 1/N$.

6. Точность в классе коэффициентов, имеющих неподвижные разрывы

Перейдем теперь к оценке порядка точности разностной задачи (II), предполагая, что $k(x, t)$ и $f(x, t, u, p, q)$ имеют разрывы 1-го рода на прямых $x = \eta_\nu = \text{const}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$), $0 \leqslant t \leqslant T$. В этом случае Ψ нужно представить в виде суммы

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \tag{39}$$

где

$$\Psi_1 = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} (\psi_\nu^*)^{(\alpha)}, \qquad \psi_\nu^* = \bar{\psi}_{n_\nu} \cdot \delta(x, x_{n_\nu}) + \bar{\psi}_{n_\nu+1}\, \delta(x, x_{n_\nu+1}), \tag{40}$$

$\delta(x, \xi)$ — символ Кронекера ($\delta(x, \xi) = 0$ при $x \neq \xi$, $\delta(\xi, \xi) = 1$).

Для функции Ψ_2 во всех точках сетки Ω справедлива оценка

$$\Psi_2 = O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha}). \tag{41}$$

Выражения для $\bar{\psi}_{n_\nu}$ и $\bar{\psi}_{n_\nu+1}$ дают формулы (35) и (36).

Поскольку влияние граничных условий учтено леммой 4, то остается найти оценку для функции z_1, являющейся решением задачи

$$\left.\begin{aligned} &(az_{\bar{x}})_x^{(\alpha)} + Q(z) - \rho z_{\bar{t}} = -\Psi,\\ &l_1 z = 0 \text{ при } x = 0, \qquad l_2 z = 0 \text{ при } x = 1, \qquad z = 0 \text{ при } t = 0.\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

В соответствии с (39) положим

$$z_1 = z_{11} + z_{12},$$

где z_{11} — решение задачи (42) с правой частью Ψ_1, а z_{12} — решение задачи (42) с правой частью Ψ_2. Замечая, что $\|\Psi_2\|_2 = O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha})$,

и пользуясь теоремой 1, находим

$$\|z_{12}\|_0 \leqslant M(h^2 + \tau^{m_\alpha}). \tag{43}$$

Для оценки z_{11} нам понадобится

Лемма 7. *Пусть z^* — решение задачи* (42), *где*

$$\Psi = (\psi^*)^{(\alpha)}, \qquad \psi^* = \bar{\psi}_n \delta(x, x_n) + \bar{\psi}_{n+1}\delta(x, x_{n+1}). \tag{44}$$

Тогда при достаточно малом $\tau < \tau_0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\|z^*(x,t)\|_0 \leqslant M\{&h^{3/2}|\bar{\psi}_n(0)| + h|\bar{\psi}_n(0) + \bar{\psi}_{n+1}(0)| + \\ &+ \max_{0<t'\leqslant t}[h^2(|\bar{\psi}_n(t')| + |(\bar{\psi}_n(t'))_{\bar{t}}|) + h(|\bar{\psi}_n(t') + \bar{\psi}_{n+1}(t')|) + \\ &+ |(\bar{\psi}_n(t'))_{\bar{t}} + (\bar{\psi}_{n+1}(t'))_{\bar{t}}|]\} + \bar{M}h^{3/2}\max_{0<t'\leqslant t}|\bar{\psi}_n(t')|,\end{aligned} \tag{45}$$

где $\bar{M} = 0$ при $b_{sk} = 0$, $s = 1, 2$; $k = 1, 2$.

В самом деле, для оценки $\|z^*(x,t)\|_0$ надо воспользоваться неравенством (12) теоремы 2, в которое будут входить $\|\psi^*\|_4$, $\|\psi^*\|_{4^*}$, $\|\psi^*_{\bar{t}}\|_{4^*}$. Вычислим эти величины. Для этого оценим сначала функцию

$$\mu(x,t) = \sum_{x'=h}^{x'=x} h\psi^*(x', t).$$

Подставляя сюда выражение (44) для ψ^*, находим

$$\mu(x,t) = \begin{cases} 0, & x < x_n, \\ h\bar{\psi}_n, & x = x_n, \\ h(\bar{\psi}_n + \bar{\psi}_{n+1}), & x > x_n. \end{cases} \tag{46}$$

В частности, $\mu(x_{N-1}, t) = h(\bar{\psi}_n + \bar{\psi}_{n+1})$; поэтому

$$|(\psi^*, 1)| = h|\bar{\psi}_n + \bar{\psi}_{n+1}|. \tag{47}$$

Пользуясь (46), находим

$$\|\psi^*\|_4 = \|\mu\|_2 + |(\psi^*, 1)| \leqslant h^{3/2}|\bar{\psi}_n| + 2|\bar{\psi}_n + \bar{\psi}_{n+1}|h,$$

$$\|\psi^*\|_{4^*} = \|\mu\|_1 + |(\psi^*, 1)| \leqslant h^2|\bar{\psi}_n| + 2|\bar{\psi}_n + \bar{\psi}_{n+1}|h,$$

$$\|\psi^*_{\bar{t}}\|_{4^*} \leqslant h^2|(\bar{\psi}_n)_{\bar{t}}| + 2h|(\bar{\psi}_n + \bar{\psi}_{n+1})_{\bar{t}}|.$$

Отсюда и из неравенства (12) следует (45).

В силу леммы 7 для z_{11} имеет место оценка

$$\|z_{11}(x,t)\|_0 \leqslant Mh^{\varkappa - 1/2} \tag{48}$$

и, следовательно,

$$\|z_1(x,t)\|_0 \leqslant M(h^{\varkappa - 1/2} + \tau^{m_\alpha}). \tag{49}$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 4. *Если $k(x,t)$ и $f(x,t,u,p,q)$ имеют разрывы 1-го рода на конечном числе прямых $x = \eta_\nu = \text{const}$, $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$ и выполнены все указанные выше* (*в* п. 2 *и* п. 5) *условия, то решение $y(x,t)$ разностной задачи* (II) *равномерно сходится к решению $u(x,t)$ задачи* (I) *при*

независимом стремлении h и τ к нулю, так что для любой схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{\alpha}$ из исходного семейства при достаточно малом $\tau < \tau_0$ имеет место оценка

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^{1/2} + \tau^{m_\alpha}) \text{ при } 0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1 \tag{50}$$

и для наилучшей канонической схемы (24) — *оценка*

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^{3/2} + \tau^{m_\alpha}). \tag{51}$$

В самом деле, для доказательства теоремы достаточно, в соответствии с п. 3, оценить функцию $z_1(x, t)$ и воспользоваться леммой 4.

Замечания

1. Сходимость решения задачи (II) для произвольной разностной схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{\alpha}$ из исходного семейства в классе разрывных коэффициентов $k(x, t)$ имеет место при значительно более слабых требованиях: 1) $k, k', f(x, t, u, p, q), u'', \dot{u}$ непрерывны в $\overline{\Delta}_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0)$, 2) k, u' удовлетворяют вдоль Γ_ν условию Липшица по t, 3) $k(x, t)$ в $\overline{\Delta}_\nu$ и $\sigma_s(t)$ при $0 \leqslant t < T$ удовлетворяют условию Липшица по t. При этих условиях

$$\|y - u\|_0 \leqslant \rho_0(h) + \rho_0(\tau),$$

где $\rho_0(h) \to 0$ при $h \to 0$ и $\rho_0(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$.

2. Для упрощения изложения всюду сформулированы лишь достаточные условия, обеспечивающие выполнение полученных выше оценок. Некоторые требования, накладываемые на решения $u(x, t)$ и коэффициенты задачи (I), могут быть ослаблены. Так, например, теорема 4 сохраняет силу, если отказаться от требования, чтобы предельные значения функций k'', u''', $\dot{u}'$ на прямых Γ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0)$ удовлетворяли условию Липшица по t.

3. Если $\frac{\partial f}{\partial p}(x, t, u, p, q) \equiv 0$ и выполнено одно из условий: 1) $u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0$, 2) коэффициент теплопроводности k не зависит от t,— то вместо (50) — (51) выполняется неравенство

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^{\varkappa} + \tau^{m_\alpha}),$$

т. е. схема (24) имеет в классе разрывных коэффициентов тот же порядок точности, что и в классе гладких коэффициентов $k(x, t)$ и $f(x, t, u, p, q)$ уравнения $\mathcal{P}u = 0$.

4. Теорема 4 справедлива и для первой краевой задачи $(u(0, t) = u_1(t),\ u(1, t) = u_2(t))$. Отсюда, в частности, следуют соответствующие результаты работы [3] для линейного уравнения теплопроводности. В случае четырехточечный схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{(1)}$ $(\alpha = 1)$ теорема 4 может быть усилена с помощью специальных априорных оценок, которые будут рассмотрены отдельно.

5. Аналогичными методами исследуются дифференциально-разностные уравнения, получаемые методом Роте и методом прямых.

В заключение автор пользуется возможностью выразить благодарность А. Н. Тихонову за обсуждение полученных результатов.

Поступила в редакцию
30.09.1961

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 4—63.
2. А. А. Самарский. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения. Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям (Ереван, 1958). Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960, 148—160.
3. А. А. Самарский, И. В. Фрязинов. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 5, 806—824.
4. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 441—460.
5. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 6, 971—1000.
6. J. Douglas. On the numerical integration of quasi-linear parabolic differential equations. Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 35—42.
7. J. Douglas. The application of stability in the numerical solution of quasi-linear parabolic differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 89, № 2, 484—518.
8. E. C. Du Fort, S. P. Frankel. Stability condition in the numerical treatment of parabolic differential equations. Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, 7, № 43, 135—152.
9. M. Rose. On the integration of non-linear parabolic equations by implicit difference methods. Quart. Appl. Math., 1956, 14, № 3, 237—248.
10. M. Lees. Approximate solutions of parabolic equations. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, № 2, 167—183.
11. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.— Л., Физматгиз, 1960.
12. А. А. Самарский. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1958, 121, № 2, 225—228.
13. О. А. Олейник. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1961, 25, № 1, 3—20.
14. Л. И. Камынин, В. Н. Масленникова. О некоторых свойствах решения смешанной задачи для параболического уравнения с разрывными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1960, 133, № 5, 1003—1006.
15. Л. И. Камынин. О решении краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1961, 139, № 5, 1048—1051.
16. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об одной наилучшей разностной схеме. Докл. АН СССР, 1959, 124, № 4, 779—782.
17. Г. И. Марчук. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
18. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. II. М., Физматгиз, 1959.
19. О. В. Локуциевский. Численные методы решения уравнений в частных производных. Успехи матем. наук., 1956, 11, вып. 3 (69), 224.