Мы приносим глубокую благодарность А. А. Абрамову, под руководством которого была выполнена эта работа.

Поступила в редакцию 29. 11. 1960

Цитированная литература

1. Я. Б. Зельдович. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, **22**, № 1, 27—47.
2. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович. Об устойчивости распространения пламени. Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, вып. 6, 856—859.
3. Я. И. Канель. О поведении решений задачи Коши при неограниченном возрастании времени для квазилинейных уравнений, встречающихся в теории горения. Докл. АН СССР, 1960, **132**, № 2, 268—271.
4. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 2. М., Физматгиз, 1959.
5. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюлл. МГУ, 1937, **А1**, вып. 6.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ВЯЗКОСТИ*

А. А. САМАРСКИЙ, В. Я. АРСЕНИН

(Москва)

Рассматриваются конечно-разностные схемы сквозного счета (без выделения линий разрыва) уравнений газовой динамики для плоского одномерного изэнтропического движения газа с различными типами вязкости. Дается определение бегущей разностной волны. Устанавливается, что разностные уравнения допускают решение в виде бегущей разностной волны. Требование монотонности профиля бегущей волны позволяет получить условие для выбора коэффициента вязкости.

§ 1

1. Уравнения плоского одномерного изэнтропического движения газа в переменных Лагранжа имеют вид

$$v_t + (p+q)_x = 0,\quad \theta_t = v_x,\quad (E + 0{,}5v^2)_t + [(p+q)^v]_x = 0,\quad p\theta = (\gamma - 1)E, \tag{1}$$

где q — вязкость [1], p — давление, v — скорость, θ — удельный объем, E — внутренняя энергия, f_x, f_t — частные производные по x и t, $\gamma = c_p/c_v$.

Рассмотрим задачу о движении стационарной ударной волны, распространяющейся с постоянной скоростью D. При этом $p(+\infty) = p_1 = 0$; $p(-\infty) = p_2$, $\theta(+\infty) = \bar\theta_1$, $\theta(-\infty) = \bar\theta_2$, $v(-\infty) = v_2$, $v(+\infty) = v_1 = 0$. Ищем решение как функцию от s, $f = f(s)$, где $s = x - Dt$. Задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Легко находим интеграл этой системы

$$q\theta = 0{,}5(\gamma + 1)D^2(\bar\theta_1 - \theta)(\theta - \bar\theta_2),\quad q(+\infty) = 0. \tag{2}$$

Требования на $q(s)$: 1) система обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой свелась наша задача, должна иметь непрерывное решение; 2) действие $q(s)$ должно быть пренебрежимо малым вне ударного слоя и в области волны разрежения; 3) когда размеры области движения велики по сравнению с толщиной ударного слоя, должны выполняться условия Гюгонио.

---

* Настоящая работа была доложена на Всесоюзном совещании по вычислительной математике и вычислительной технике в 1959 г.

Вообще говоря, q может быть функцией v, p, θ, E и их производных. Мы рассмотрим здесь следующее выражение для q:

$$\theta q = -0{,}5\,\nu\,|v_x|^{\mu}\,(v_x - \varkappa\,|v_x|), \quad \nu = \mathrm{const}. \tag{3}$$

При $\mu = 1$, $\varkappa = 0$ получаем вязкость Неймана [1], не удовлетворяющую второму из требований. При $\mu = 1$, $\varkappa = 1$ получаем вязкость, удовлетворяющую второму из требований (см. [2]). При $\mu = 0$ получаем линейную вязкость. Будем считать, что $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.

2. Найдем ширину размазывания фронта ударной волны, обусловленного вязкостью. В зоне ударной волны $v_x < 0$, поэтому $\theta_q = \nu\,|v_x|^{1+\mu}$, $\varkappa = 1$. Для нашей задачи имеем $\theta q = \nu D^{1+\mu}(\theta')^{1+\mu}$. Вводим новую функцию $\lambda(s)$ по формуле $\theta = 0{,}5(\bar\theta_1 + \bar\theta_2) + 0{,}5\cdot\Delta\theta\cdot\lambda(s)$, где $\Delta\theta = \bar\theta_1 - \bar\theta_2$. Если $\theta = \bar\theta_1$, то $\lambda(s) = 1$, если $\theta = \bar\theta_2$, то $\lambda(s) = -1$.

Используя (2), легко находим

$$\lambda'(s) = a\,[1 - \lambda^2(s)]^{\sigma}, \quad \sigma = \frac{1}{1+\mu}, \quad a = \left[0{,}5\,\frac{\gamma+1}{\nu}\,(0{,}5\cdot D\cdot\Delta\theta)^{1-\mu}\right]^{\sigma}. \tag{4}$$

Обозначим через s_2 наименьшее s, при котором $\lambda(s) = 1$, и через s_1 — наибольшее s, при котором $\lambda(s) = -1$. $L = s_2 - s_1$ назовем шириной ударного слоя. Интегрируя (4), находим

$$I = aL, \quad \text{где} \quad I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\lambda}{(1-\lambda^2)^{\sigma}} = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \sigma\right)}.$$

При $\mu = 1$ $(\sigma = 0{,}5)$ имеем $L = 2\nu/(\gamma+)^{0{,}5}\pi$. Если полагать $\nu = \nu_0\cdot h^{1+\mu}$ и $L = n\cdot h$, где n — целое число, то получим

$$\nu_0 = 0{,}5\,(\gamma+1)\,(0{,}5\cdot D\cdot\Delta\theta)^{1-\mu} n^{1+\mu} I^{-1-\mu}. \tag{5}$$

Из этой формулы видно, что ν_0 не зависит от силы ударной волны только при $\mu = 1$. В этом случае имеем

$$\nu_0 = 0{,}5\,(\gamma+1)\,\frac{n^2}{\pi^2}. \tag{6}$$

Если $0 < \mu \leqslant 1$, то L конечно. Если же $\mu = 0$, то $L = \infty$. В этом случае целесообразно ввести понятие эффективной ширины ударного слоя.

3. Итак, пусть $\mu = 0$. Эффективной шириной L_ε ударного слоя будем называть разность $L_\varepsilon = s_2 - s_1$, где s_1 — наибольшее s, для которого $\theta(s) - \bar\theta_2 = 0{,}5\cdot\Delta\theta \times [1 + \lambda(s)] = \varepsilon\cdot\Delta\theta$; s_2 — наименьшее s, для которого $\theta(s) - \bar\theta_1 = -0{,}5\cdot\Delta\theta\,[1 - \lambda(s)] = -\varepsilon\Delta\theta$. Здесь ε — заданное число, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда $aL_\varepsilon = I_\varepsilon = \int_{(1-2\varepsilon)}^{1+2\varepsilon} (1-\lambda^2)^{-1} d\lambda$, где $a = \frac{0{,}25}{\nu}(\gamma+1)\,D.\Delta\theta$. Полагая $L_\varepsilon = n\cdot h$ и $\nu = \nu_0 h$, находим

$$\nu_0 \simeq 0.25\cdot(\gamma+1)\cdot D\cdot\Delta\theta\cdot n\cdot\ln^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{7}$$

§ 2

1. Для написания разностных уравнений газодинамики выбираем прямоугольную пространственно-временную сетку с шагами $\Delta x = h$ и $\Delta t = \tau$. Мы будем пользоваться разностной схемой «крест», которую можно записать в виде

$$\begin{gathered}
v_i^{j+1/2} - v_i^{j-1/2} = \gamma_0\,[(p+q)_{i-1/2}^{j} - (p+q)_{i+1/2}^{j}], \quad \gamma_0 = \frac{\tau}{h}, \\
\theta_{i+1/2}^{j+1} - \theta_{i+1/2}^{j} = \gamma_0(v_{i+1}^{j+1/2} - v_i^{j+1/2}) \\
(\text{или}\ \ h\cdot\theta_{i+1/2}^{j+1} = r_{i+1}^{j+1} - r_i^{j+1}, \quad r_i^{j+1} = r_i^{j} + \tau v_i^{j+1/2}), \qquad (8) \\
E_{i+1/2}^{j+1} - E_{i+1/2}^{j} = 0{,}5\,[(v_{i+1}^{j-1/2})^2 - (v_{i+1}^{j+1/2})^2] + \gamma_0\,[(p+q)_{i-1/2}^{j} v_i^{j-1/2} - (p+q)_{i+1/2}^{j} v_{i+1}^{j-1/2}], \\
p\theta = (\gamma-1)\,E.
\end{gathered}$$

В дальнейшем мы не будем употреблять дробных индексов условившись относить v_i^j к точке $(x_i, t_{j-1/2})$, p_i^j, q_i^j, θ_i^j, E_i^j — к точке $(x_{i+1/2}, t_j)$, где $t_{j-1/2} = \tau\cdot(j - 1/2)$, $x_{i+1/2} = h(i + 1/2)$.

2. Будем решать задачу о движении стационарной ударной волны, рассмотренную в § 1, по схеме «крест». Бегущая волна $u = f(x \pm Dt)$ удовлетворяет уравнению $Du_x = \mp u_t$.

По аналогии с этим «разностную бегущую волну» определим с помощью соотношений

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \pm D\gamma_0 (u_i^j - u_{i-1}^j)$$

или

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \pm D\gamma_0 (u_{i+1}^j - u_i^j).$$

Будем искать решение разностных уравнений (8) в виде бегущих волн, полагая

$$v_i^{j+1} - v_i^j = -\gamma_0 D (v_{i+1}^j - v_i^j), \quad \theta_i^{j+1} - \theta_i^j = -\gamma_0 D (\theta_i^j - \theta_{i-1}^j),$$
$$w_i^{j+1} - w_i^j = \gamma_0 D (w_i^j - w_{i-1}^j), \tag{9}$$

где

$$w_i^j = E_i^j + 0{,}5\,(v_{i+1}^j)^2.$$

Используя (8) и формулы (9), находим

$$D\cdot v_{i+1} = P_i, \quad v_i = D(\overline{\theta}_1 - \theta_{i-1}), \quad Dw_i = P_i v_{i+1} = Dv_{i+1}^2 \tag{10}$$

(или $E_i = 0{,}5v_{i+1}^2$). Здесь верхний индекс везде один и тот же и он опущен, а $P_i = q_i + p_i$.

Используя условия Гюгонио, из (10) находим

$$q_i\theta_i = 0{,}5\,(\gamma + 1)\,D^2\,(\overline{\theta}_1 - \theta_i)(\theta_i - \overline{\theta}_2). \tag{11}$$

Из формулы (3) при $\varkappa = 1$ и $\nu = \nu_0 h^{1+\mu}$ получаем

$$q_i\theta_i = 0{,}5\nu_0\,|v_{i+1} - v_i|^{\mu}\,[|v_{i+1} - v_i| - (v_{i+1} - v_i)]. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем уравнение для θ_i:

$$0{,}5\,(\gamma + 1)\,D^{1-\mu}\,(\overline{\theta}_1 - \theta_i)(\theta_i - \overline{\theta}_2) = \nu_0\,(\theta_i - \theta_{i-1})^{1+\mu}. \tag{13}$$

Введем новую неизвестную функцию η_i по формуле $\theta_i - \overline{\theta}_2 = \Delta\theta\cdot\eta_i$ $(\eta_i > 0)$. Для этой функции получаем уравнение

$$\eta_{i-1} = \eta_i - a\eta_i^{\sigma}\,(1 - \eta_i), \tag{14}$$

где $a = (1/\nu_0)\,[0{,}5\cdot(\gamma + 1)\,(D\cdot\Delta\theta)^{1-\mu}]^{\sigma}$. Очевидно, $\eta_\infty = 1$, $\eta_{-\infty} = 0$.

3. Рассмотрим линейную вязкость ($\mu = 0$, $\sigma = 1$). Уравнение (14) в этом случае принимает вид

$$\eta_{i-1} = \eta_i - a\eta_i\,(1 - \eta_i). \tag{15}$$

Будем искать монотонное неотрицательное решение этого уравнения. Оно существует для всякого $0 < a \leqslant 1$. Из условия $a \leqslant 1$ находим

$$\nu_0 \geqslant \nu_{0,\,\text{кр}} = 0{,}5\,(\gamma + 1)\,D\cdot\Delta\theta. \tag{16}$$

В случае вязкости Неймана ($\mu = 1$, $\sigma = 0{,}5$) имеем

$$\eta_{i-1} = \eta_i - a\sqrt{\eta_i}\,(1 - \eta_i). \tag{17}$$

Пусть $\eta_i \geqslant 1 - \varepsilon$, где ε — заданное число, $0 < \varepsilon < 0{,}5$. Наименьшее значение n, для которого $\eta_{i-n} \leqslant \varepsilon$, будем называть эффективной шириной L_ε разностного ударного слоя. При заданном ε по формулам (15) и (17) легко сосчитать L_ε для всякого a. Так, для $\varepsilon = 0{,}1$ и $\varepsilon = 0{,}05$ значения L_ε сведены в таблицу.

Пользуясь такой таблицей, легко указать правила выбора коэффициента вязкости ν_0. Действительно, по заданным ε и $L_\varepsilon = n$ находим в таблице a_n. Очевидно, при всех $a \geqslant a_n$ мы получим эффективную ширину L_ε, не превосходящую заданного

μ	ε	a_n								
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
0	0.1	22	11	8	6	5	—	—	—	—
	0.05	29	15	9	7	6	—	—	—	—
1	0.1	16	9	7	5	4	3	3	2	2
	0.05	21	11	8	6	5	4	3	3	2

значения n. Пользуясь этим условием и неравенством (16), для линейной вязкости находим

$$\frac{\gamma+1}{2}\cdot D\cdot\Delta\theta \leqslant \nu_0 \leqslant \frac{\gamma+1}{2}\cdot D\cdot\Delta\theta\cdot\frac{1}{a_n}. \tag{18}$$

Для вязкости Неймана находим

$$\frac{\gamma+1}{2(1-\varepsilon)}\varepsilon^2 \leqslant \nu_0 \leqslant \frac{\gamma+1}{2a_n^2}. \tag{19}$$

Левое неравенство (19) получается из требования неотрицательности η_{n-1}, если $\eta_n \leqslant 1-\varepsilon$. Заметим, что при этом ширина разностного ударного слоя бесконечна, хотя для дифференциального уравнения ширина ударного слоя конечна. В таком же плане исследуются вязкостные члены q вида

$$q\theta = -0{,}5\,|v|\,(v_x - |v_x|)\,\nu \quad \text{и} \quad q\theta = -0{,}5\nu\,(|v| + \beta_0)(v_x - |v_x|),$$

$$\beta_0 > 0 \ (\text{малое}).$$

4. По схеме «крест» с вязкостью были сосчитаны: задача о движении стационарной ударной волны, задача о распаде разрыва и другие. Эти задачи мы считали с линейной вязкостью и с вязкостью Неймана. Во всех сосчитанных нами задачах счет с линейной вязкостью оказалось возможным вести в 3—4 раза более крупным шагом по времени, чем с вязкостью Неймана. Правда, при счете с вязкостью Неймана можно обеспечить меньшую эффективную ширину ударного слоя. В ряде случаев численное решение сравнивалось с точным решением задачи. Во всех таких случаях счет с линейной вязкостью давал очень хорошую точность.

Поступила в редакцию
14. 01. 1961

Цитированная литература

1. J. Neumann, M. Richtmyer. A method for the numerical calculations of gidrodinamical shocks. J. Appl. Phys., 1950, **21**, № 1, 232.
2. H. L. Brode. Numerical solutions of spherical blast waves. J. Appl. Phys., 1955, **26**, № 6, 766.