ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том I Ноябрь 1961 Декабрь № 6

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

Данная работа возникла в связи с изучением сходимости и точности однородных разностных схем сквозного счета (см. [1]) для решения нелинейных и квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов:

$$\mathscr{L}_1 u = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\mathscr{L}_2 u = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - c(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0, \tag{2}$$

$$\mathscr{L}_3 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[k(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] + c(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{3}$$

в ограниченной области $\bar{Д} = (0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T)$ в случае, когда коэффициенты $k(x,t,u)$ и $k(x,t)$ являются разрывными функциями (x,t) (см. [2]).

Пусть $u = u(x,t)$ — решение уравнения $\mathscr{L}_s u = 0$ $(s = 1,2,3)$ с некоторыми начальными данными при $t = 0$ и краевыми условиями (вообще говоря, нелинейными) при $x = 0$, $x = 1$, а y — решение соответствующей разностной задачи. Мерой точности разностного метода является функция $z = y - u$. Она удовлетворяет (при соответствующих предположениях относительно f и $k(x,t,u)$) неоднородному линейному разностному уравнению $\mathscr{P}_s z = \psi$ $(s = 1,2,3)$, правая часть которого есть погрешность аппроксимации разностной схемы на решении дифференциального уравнения $\mathscr{L}_s u = 0$. Краевые условия 1-го рода $(u(0,t) = u_1(t),\ u(1,t) = u_2(t))$ на разностной сетке аппроксимируются точно. Если же рассматриваются краевые условия 2-го или 3-го рода или еще более общего вида, как например (в случае уравнения (1))

$$k\frac{\partial u}{\partial x} = C_1\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_1 u - u_1(t) \qquad \text{при } x = 0, \tag{4}$$

$$-k\frac{\partial u}{\partial x} = C_2\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_2 u - u_2(t) \qquad \text{при } x = 1, \tag{5}$$

то для y строится разностный аналог этих условий того же порядка аппроксимации, что и разностная схема (см. [3]). При этом следует отметить, что простая замена в (4) и (5) производных разностными отношениями дает разностные краевые условия первого порядка аппроксимации.

В результате для функции z мы получаем неоднородные краевые условия, аналогичные по форме (4), (5), с правыми частями ν_1 и ν_2.

Для доказательства сходимости надо дать равномерную оценку z через ψ, ν_1 и ν_2 (априорную оценку).

В случае разрывных коэффициентов положение осложняется тем, что ψ вблизи точек разрыва коэффициента k, вообще говоря, не стремится к нулю при стремлении к нулю шагов сетки. Поэтому оценка ψ по максимуму или в среднем недостаточна для доказательства сходимости. В связи с этим оказалось необходимым ввести специальную норму $\|\psi\|_3$ уже при изучении сходимости однородных схем (см. [1]) для простейшего стационарного уравнения теплопроводности:

$$L^{(k,\,q,\,f)}u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)\,u + f(x) = 0. \tag{6}$$

В работе [4] нами были получены априорные оценки, пригодные для доказательства сходимости разностных схем (для уравнения (1)) как в случае неподвижных разрывов $k(x, t)$ (при $x = \text{const}$), так и в случае подвижных разрывов на конечном числе кривых $x = \eta_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots, m_0$. В работе [5] эти оценки использовались при изучении сходимости и точности в классе разрывных коэффициентов схем сквозного счета для линейного уравнения теплопроводности с краевыми условиями 1-го рода.

Поскольку рамки одной статьи не позволяют дать описание разностных методов решения уравнений (1) — (3), формулировки и доказательства соответствующих теорем сходимости в различных классах коэффициентов, то мы вынуждены отдельно дать изложение математического аппарата, позволяющего оценить погрешность $z = y - u$. Этой цели и посвящена данная статья. Найденные априорные оценки позволяют также выяснить вопрос об устойчивости по начальным данным и правой части. Заметим, что для уравнения второго порядка параболического типа (и краевых условий 1-го рода) для сходимости достаточно устойчивости по правой части. Теоремы сходимости и точности разностных схем сквозного счета для уравнений (1), (2) и (3) с краевыми условиями весьма общего вида будут изложены отдельно.

При построении априорных оценок мы пользуемся методом интегральных («энергетических») неравенств, который получил широкое распространение в теории дифференциальных уравнений, а также методом выделения «стационарных» неоднородностей, для которого оценки получаются особенно точными, так как при их построении используется разностная функция Грина. При этом мы обращаем особое внимание на выбор нормы для оценки правой части и ослабление требований на коэффициенты уравнения.

Некоторые простейшие неравенства (например, (2.21)) встречались в работах других авторов (см. [6], [7], [8]), однако они были получены для разностных схем частного вида и для значительно более узкого класса коэффициентов и краевых условий 1-го рода, что делало их непригодными для наших целей.

Дадим теперь краткую характеристику содержания работы. Во введении приводятся основные обозначения, а также вспомогательные соот-

ношения (разностные формулы Грина, неравенства и т. д.), используемые в дальнейшем.

В § 1, являющемся, по существу, продолжением работы [1], рассматриваются разностные краевые задачи для стационарного уравнения теплопроводности (6), для систем уравнений, а также для уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[k(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right]-\frac{d}{dx}\left[b(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u=f(x)$$

в случае разрывного $k(x)$. Полученные в § 1 оценки используются в § 2, 3 и 4 для уточнения оценок в случае плохой правой части ψ.

Заметим, что аналог теоремы 5 имеет место для случая нескольких пространственных переменных. Соответствующих оценок мы здесь не приводим.

В § 2 уточняются результаты работы [4] и дается вывод новых оценок. В частности, получены оценки для системы уравнений параболического типа.

В § 3 для девяти- и семиточечных разностных схем, соответствующих (2), получен ряд априорных оценок. Простейшая из них (3.18) в случае гладких коэффициентов для неявной схемы ($\alpha_1 = 1$) и краевых условий 1-го рода получена в [9] при дополнительном условии $|a_{\bar{x}}| < M$.

В § 4 изучаются задачи для разностного аналога уравнения параболического типа четвертого порядка.

Оценки того же типа, что и для разностных уравнений, имеют место для дифференциально-разностных уравнений, получаемых методом Роте [10] и методом прямых.

Все результаты § 1, 2 и 3 были получены для неравномерных сеток. Однако с целью упрощения изложения доказательства проводятся для равномерных сеток.

В каждом параграфе ведется своя нумерация формул. При ссылке на формулы из другого параграфа используется двойная нумерация (например, (В.22) — формула (22), Введение; (2.7) — формула 7, § 2, и т. д.).

Введение

1. Разностная сетка и сеточные функции

Рассмотрим область $\bar{Д} = (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$. Обозначим через $\bar{\Omega}$ разностную сетку в $\bar{Д}$, т. е. совокупность точек (x_i, t_j), где $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, $h = 1/N$; $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \ldots, L$, $\tau = T/L$.

Пусть Ω_1 — совокупность внутренних точек (x_i, t_j) сетки $\bar{\Omega}$, для которых $1 \leqslant i \leqslant N-1$, $1 \leqslant j \leqslant L$, Ω_2 — совокупность точек (x_i, t_j), где $1 \leqslant i \leqslant N-1$, $2 \leqslant j \leqslant L$, Ω_3 — совокупность точек (x_i, t_j), где $2 \leqslant i \leqslant N-2$, $2 \leqslant j \leqslant L$.

Условимся сеточные функции записывать без индексов сетки, т. е. вместо z_i^j писать просто z или $z(x, t)$, не указывая при этом также и зависимости z от шагов h и τ сетки.

Для упрощения записи введем обозначения (см. [4]):

$$z^{(+1)} = z_{i+1}^j,\ z^{(-1)} = z_{i-1}^j,\ \check{z} = z_i^{j-1},\ \check{\check{z}} = z^{j-2},$$

$$z_{\bar t} = \frac{z - \check z}{\tau}, \quad z_{\bar x} = \frac{z - z^{(-1)}}{h}, \quad z_x = \frac{z^{(+1)} - z}{h}, \quad z_{x^*} = 0{,}5\,(z_x + z_{\bar x}).$$

Тогда будем иметь

$$\frac{1}{h^2}\,[a_{i+1}(z_{i+1} - z_i) - a_i(z_i - z_{i-1})] = (az_{\bar x})_x.$$

2. Суммы и нормы

Введем следующие обозначения для сумм [4]:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i\psi_i h, \quad [\varphi, \psi) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i\psi_i h, \quad (\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i\psi_i h, \quad [\varphi, \psi] = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i\psi_i h,$$

где φ_i и ψ_i — любые сеточные функции.

В дальнейшем мы используем нормы:

$$\|\psi\|_0 = \max_{0\leqslant i\leqslant N} |\psi_i|, \qquad \|\psi\|_m = (|\psi|^m, 1)^{1/m}, \qquad m = 1, 2, \tag{1}$$

$$\|\psi\|_3 = \|\eta\|_2, \qquad \eta(x) = \sum_{x'=h}^{x'=x} h\psi(x'), \qquad \|\psi\|_{3^*} = \|\eta\|_1, \tag{2}$$

$$\|\psi\|_4 = \|\psi\|_3 + |(\psi, 1)|, \qquad \|\psi\|_{4^*} = \|\psi\|_{3^*} + |(\psi, 1)|. \tag{3}$$

При оценке решения разностных уравнений с правой частью ψ и неоднородными краевыми условиями применяются нормы

$$\|\psi\|_5 = \|\psi\|_4 + |\nu_1| + |\nu_2|, \qquad \|\psi\|_{5^*} = \|\psi\|_{4^*} + |\nu_1| + |\nu_2|, \tag{4}$$

где $\nu_1 = \nu_1(t)$ и $\nu_2 = \nu_2(t)$ — правые части краевых условий при $x = 0$ и $x = 1$.

Кроме того, будем писать

$$\|y_x\|_2 = (y_{\bar x}^2, 1]^{1/2} = [y_x^2, 1)^{1/2} = \|y_x\|_2 \qquad (y_{\bar x}^2 = (y_{\bar x})^2). \tag{5}$$

При изучении (в § 1 и 4) разностного оператора $(ay_{\bar x x})_{\bar x x}$ четвертого порядка встречаются также суммы

$$((\varphi, \psi)) = \sum_{i=2}^{N-2} \varphi_i\psi_i h, \quad (\varphi, \psi)) = \sum_{i=1}^{N-2} \varphi_i\psi_i h, \quad ((\varphi, \psi) = \sum_{i=2}^{N-1} \varphi_i\psi_i h. \tag{6}$$

Если ψ — функция, определенная на сетке $\bar\Omega$ или на ее части Ω_s $(s = 1, 2, 3)$, то норма $\|\psi\|_m$ является сеточной функцией, зависящей только от t и определенной на сетке $\omega_\tau = \{t_j, j = 0, 1, 2, \ldots, L\}$ или на ее части. Будем писать

$$\|\widetilde{\psi}\|_m = \max_{(t)} \|\psi(x, t)\|_m, \qquad m = 1, 2, 3, 4, 5, 3^*, 4^*, 5^*. \tag{7}$$

В дальнейшем часто встречаются суммы

$$\sum_{j'=s}^{j} \tau(\|\psi\|_m^{j'})^2 = \sum_{j'=s}^{j} \tau\|\psi^{j'}\|_m^2 = \sum_{t'=s\tau}^{t'=t} \tau\|\psi(x, t')\|_m^2, \qquad s = 0, 1, 2. \tag{8}$$

Если $\psi = (\psi^k(x, t))$ — сеточная вектор-функция, то

$$\|\psi\|_0 = \max_{(x)} \sqrt{\sum_k (\psi^k)^2}, \qquad \|\psi\|_m = \sum_k (|\psi^k|^m, 1)^{1/m}, \qquad m = 1, 2, \tag{9}$$

и т. д.

3. Неравномерные сетки

Предположим теперь, что сетка $\overline{\Omega} = \{x_i, t_i, 0 \leqslant j \leqslant N, 0 \leqslant j \leqslant L$ неравномерна, т. е. ее шаги $h_i = x_i - x_{i-1}$ и $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ меняются от точки к точке.

Будем предполагать всюду, что шаги h_i сетки $\omega_h = \{x_i, 0 \leqslant i \leqslant N\}$ удовлетворяют условию

$$0 < \varkappa_0 \leqslant \frac{h_{i+1}}{h_i} \leqslant \varkappa_1, \tag{10}$$

где $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ — постоянные, не зависящие ни от i, ни от N.

На неравномерной сетке также используется безындексная система обозначений.

Будем писать

$$z_{\bar{x}} = \frac{z_i^j - z_{i-1}^j}{h_i} = \frac{z - z^{(-1)}}{h}, \quad z_x = z_{\bar{x}}^{(+1)}, \quad z_{\bar{t}} = \frac{z_i^j - z_i^{j-1}}{\tau_j} = \frac{z - \check{z}}{\tau}.$$

Кроме того, вводятся разностные отношения

$$z_{\tilde{x}} = \frac{z^{(+1)} - z}{\hbar}, \qquad \check{z}_{\tilde{t}} = \frac{z - \check{z}}{\bar{\tau}},$$

где

$$\hbar = \hbar_i = 0{,}5\,(h_i + h_{i+1}), \qquad \bar{\tau}_j = 0{,}5\,(\tau_j + \tau_{j-1}).$$

Следует при этом иметь в виду, что $z_{\bar{x}\tilde{x}} \neq z_{\tilde{x}\bar{x}}$.

Разностный оператор, имеющий на равномерной сетке вид $(az_{\bar{x}})_x$, заменяется на нера омерной сетке оператором $(az_{\bar{x}})_{\tilde{x}}$, а вместо $z_{\bar{t}\bar{t}}$ берется оператор $\check{z}_{\bar{t}\tilde{t}}$. роме сумм

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \varphi_i h_i, \qquad (\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \psi_i h_i \qquad \text{и т. д.}, \tag{11}$$

используются суммы

$$(\varphi, \psi)^* = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i \psi_i \hbar_i \qquad \text{и т. д.} \tag{12}$$

В этом случае, кроме норм $\|\psi\|_m$ $(m = 1, 2, 3)$, определяемых по аналогии с (1), мы будем пользоваться нормами

$$\|\psi\|_m^* = \{(|\psi|^m, 1)^*\}^{1/m}, \qquad m = 1{,}2\,, \tag{13}$$

$$\|\psi\|_3^* = \|\eta\|_2^*, \qquad \eta(x) = \sum_{x'=h}^{x'=x} \psi(x')\,\hbar(x'). \tag{14}$$

Аналогично определяются $\|\psi\|_m^*$, $m = 3^*, 4, 5, 5^*$.

4. Некоторые элементарные неравенства

Математическим аппаратом, используемым нами в дальнейшем, являются разностные формулы Грина и некоторые элементарные неравенства.

Перечислим прежде всего следующие неравенства [11]:

1) неравенства Коши — Буняковского и Гёльдера:

$$|(y, z)| \leqslant \|y\|_2 \|z\|_2,$$

$$|(y, z)| \leqslant (|y|^p, 1)^{1/p} (|y|^q, 1)^{1/q}, \qquad 1/p + 1/q = 1, \ p > 0, \ q > 0;$$

2) $$|yz| \leqslant y^2/4c + cz^2, \tag{15}$$

где c — любая положительная постоянная;

3) $$\Big(\sum_{s=1}^{n} m_s\Big)^2 \leqslant n \sum_{s=1}^{n} m_s^2; \tag{16}$$

4) $$\prod_{s=1}^{n} m_s^{\nu_s} \leqslant \sum_{s=1}^{n} \nu_s m_s, \qquad m_s \geqslant 0, \ \nu_s \geqslant 0, \ \sum_{s=1}^{n} \nu_s = 1. \tag{17}$$

Лемма 1. *Пусть $E(t)$ и $f(t)$ — две неотрицательные сеточные функции, причем $E(t)$ определена на сетке $\{t_j = j\tau, \ j = s, s+1, \ldots, L; \ s = 0, 1\}$, а $f(t)$ — на сетке $\{t_j = j\tau, \ j = s+1, s+2, \ldots, L; \ s = 0, 1\}$. Если выполнено неравенство*

$$E(t) \leqslant (1 + M\tau)(E(t - \tau) + \tau f(t)), \tag{18}$$

то

$$E(t) \leqslant e^{Mt} \Big[E(s\tau) + \sum_{t'=(s+1)\tau}^{t'=t} \tau f(t')\Big]. \tag{19}$$

В самом деле, последовательно применяя неравенство (18), получим

$$E(t) \leqslant q^{j-s} E(s\tau) + \sum_{k=0}^{j-s-1} q^{k+1} f(t - k\tau)\tau, \qquad q = 1 + M\tau \quad (t = j\tau).$$

Отсюда и следует неравенство (19).

Аналогичная оценка получается и для функции $E(t)$, удовлетворяющей неравенству $E(t) \leqslant (1 + M\tau)[E(t - 2\tau) + \tau f(t)]$. В этом случае вводится функция $E_1(t) = E(t) + E(t - \tau)$, для которой имеет место неравенство (18).

5. Разностные формулы Грина

Пользуясь очевидными формулами суммирования по частям

$$(y, z_{\bar{x}}) = -[z, y_x) + y_N z_{N-1} - y_0 z_0 \qquad (y_0 = y(0), \ y_N = y(1)), \tag{20}$$

$$(y, z_x) = -(z, y_{\bar{x}}] + y_N z_N - z_1 y_0, \tag{21}$$

нетрудно получить формулы Грина:

1) первая разностная формула Грина

$$(y, (az_{\bar{x}})_x) = -(a, y_{\bar{x}} z_{\bar{x}}] + (ayz_{\bar{x}})_N - a_1 (y_x z)_0; \tag{22}$$

2) вторая разностная формула Грина

$$(y, (az_{\bar{x}})_x) - (z, (ay_{\bar{x}})_x) = a_N (yz_{\bar{x}} - zy_{\bar{x}})_N - a_1 (yz_x - y_x z)_0. \tag{23}$$

На неравномерной сетке формулы Грина принимают вид

$$(y, (az_{\bar{x}})_{\tilde{x}})^* = -(a, y_{\bar{x}} z_{\bar{x}}] + (ayz_{\bar{x}})_N - a_1 (y_x z)_0, \tag{24}$$

$$(y, (az_{\bar{x}})_{\tilde{x}})^* - (z, (ay_{\bar{x}})_{\tilde{x}})^* = a_N (yz_{\bar{x}} - zy_{\bar{x}})_N - a_1 (yz_x - y_x z)_0. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь разностный оператор четвертого порядка $(ay_{\bar{x}x})_{\bar{x}x}$ и покажем, что для него имеет место следующая разностная формула Грина:

$$((y, (az_{\bar{x}x})_{\bar{x}x})) = (a, y_{\bar{x}x}z_{\bar{x}x}) + [y^{(-1)}(a^{(-1)}z_{\bar{x}x})_{\bar{x}} - a^{(-1)}y_{\bar{x}}z_{\bar{x}\bar{x}}]_N - \\ - [y^{(+1)}(a^{(+1)}z_{xx})_x - a^{(+1)}y_x z_{xx}]_0. \tag{26}$$

Воспользуемся второй разностной формулой Грина для оператора $w_{\bar{x}x}$ в области $h \leqslant x \leqslant x_{N-1} = 1 - h$:

$$((y, w_{\bar{x}x})) = ((y_{\bar{x}x}, w)) + (yw_{\bar{x}} - y_{\bar{x}}w)_{N-1} - (yw_x - y_x w)_1.$$

Учитывая затем тождество $y_{\bar{x}} = y_x - hy_{\bar{x}x}$, преобразуем эту формулу к виду

$$((y, w_{\bar{x}x})) = (y_{\bar{x}x}, w) + (y^{(-1)}w_{\bar{x}}^{(-1)} - y_{\bar{x}}w^{(-1)})_N - (y^{(+1)}w_x^{(+1)} - w^{(+1)}y_x)_0. \tag{26'}$$

Отсюда после подстановки $w = az_{\bar{x}x}$ следует (26).

Меняя в (26) ролями y и z и вычитая полученное тождество из (26), получим вторую формулу Грина для разностного оператора четвертого порядка. Мы не будем ее выписывать.

Если, например, выполнены условия

$y = y_x = z = z_x = 0$ при $x = x_0 = 0$; $y = y_x = z = z_x = 0$ при $x = x_N = 1$

или

$$y_x = z_x = (a^{(+1)}y_{xx}) = (a^{(-1)}z_{xx})_x = 0 \quad \text{при } x = 0;$$
$$y_{\bar{x}\bar{x}} = z_{\bar{x}\bar{x}} = (a^{(-1)}y_{\bar{x}\bar{x}})_{\bar{x}} = (a^{(-1)}z_{\bar{x}\bar{x}})_{\bar{x}} = 0 \quad \text{при } x = 1,$$

то все подстановки обращаются в нуль и формулы Грина примут вид

$$((y, (az_{\bar{x}x})_{\bar{x}x})) = (a, y_{\bar{x}x}z_{\bar{x}x}), \qquad ((y, (az_{\bar{x}x})_{\bar{x}x})) = ((z, (ay_{\bar{x}x})_{\bar{x}x})). \tag{27}$$

В частности, при $y = z$ будем иметь

$$((z, (az_{\bar{x}x})_{\bar{x}x})) = (a, z_{\bar{x}x}^2).$$

В заключение этого раздела сделаем одно замечание, относящееся к обозначениям. Все постоянные, не зависящие от сетки, будем обозначать буквой M, часто не указывая при этом их структуру и связь с исходными константами, поскольку эта связь может быть легко выявлена по ходу изложения.

§ 1. Стационарные задачи

В работе [1] для решения первой краевой задачи

$$(aw_{\bar{x}})_x - dw = -\psi, \quad w_0 = w_N = 0$$

была получена априорная оценка вида

$$\|w\|_0 \leqslant M\|\psi\|_{3^*}.$$

В этом параграфе аналогичными методами находятся оценки для w, $w_{\bar{x}}$ и $w_{\bar{t}}$ (в случае зависимости коэффициентов уравнения от t) для третьей краевой задачи, а также даются оценки решений уравнения четвертого порядка $(aw_{\bar{x}x})_{\bar{x}x} = \psi$ и системы уравнений второго порядка.

1. Разностная функция Грина

Рассмотрим на сетке $\omega_h = \{x_i = ih;\ 0 \leqslant i \leqslant N\}$ разностную краевую задачу

$$L_h w = (a w_{\bar{x}})_x - d w = -\psi \qquad (x = x_i,\ 0 < i < N), \tag{1}$$

$$a_1 w_{x,0} = \sigma_1 w_0 - \nu_1, \qquad -a_N w_{\bar{x},N} = \sigma_2 w_N - \nu_2, \tag{2}$$

коэффициенты которой удовлетворяют условиям

$$a \geqslant M_0 > 0,\ d \geqslant 0,\ \sigma_1 \geqslant 0,\ \sigma_2 \geqslant 0,\ \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant M_1 > 0, \tag{3}$$

где M_0, M_1 — постоянные, не зависящие от h.

Нашей целью является оценка $\|w\|_0$ и $\|w_{\bar{x}m}$ $(m = 1, 2)$. Для этого воспользуемся разностной функцией Грина $G(x, \xi)$ задачи (1)—(3) (зависимость G от h, как обычно, не указываем). Функция $G(x, \xi)$ определяется условиями

$$(a(x) G_{\bar{x}}(x, \xi))_x - d(x) G(x, \xi) = -\frac{\delta(x, \xi)}{h}, \qquad \delta(x, \xi) = \begin{cases} 1, & x = \xi, \\ 0, & x \neq \xi, \end{cases} \tag{4}$$

$$a(h) G_x(0, \xi) = \sigma_1 G(0, \xi), \qquad -a(1) G_{\bar{x}}(1, \xi) = \sigma_2 G(1, \xi) \tag{5}$$

и может быть представлена в виде

$$G(x, \xi) = \frac{1}{\Delta} \alpha(x) \beta(\xi) \quad \text{при } x < \xi, \qquad G(x, \xi) = \frac{1}{\Delta} \alpha(\xi) \beta(x) \quad \text{при } x > \xi, \tag{6}$$

где

$$\Delta = \text{const} \geqslant M > 0 \tag{7}$$

(см. (12)), а $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ находятся из условий

$$\begin{aligned} &L_h \alpha = 0, \qquad a_1 \alpha_{x,0} = 1, \qquad a_1 \alpha_{x,0} = \sigma_1 \alpha_0; \\ &L_h \beta = 0, \qquad a_N \beta_{\bar{x},N} = -1, \qquad -a_N \beta_{\bar{x},N} = \sigma_2 \beta_N. \end{aligned} \tag{8}$$

Если $d \equiv 0$, то

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sigma_1} + \sum_{x'=h}^{x'=x} \frac{h}{a(x')}, \qquad \beta(x) = \sum_{x'=x+h}^{x'=1} \frac{h}{a(x')} + \frac{1}{\sigma_2},$$

$$\Delta = \alpha(x) + \beta(x) = \text{const}. \tag{9}$$

Если, $\sigma_1 = 0$, то полагаем $a_1 \alpha_{x,0} = 0$, $\alpha(0) = 1$.

По аналогии с [1] доказывается

Лемма 2. *Если $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи* (1)—(3), *то*

$$\|G\|_0 \leqslant M, \qquad \|G_{\bar{x}}\|_0 \leqslant M, \qquad \|G_{\bar{\xi}}\|_0 \leqslant M.$$

Лемма 3. *Справедливы следующие соотношения:*

$$|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)| \leqslant M \quad \text{при } x \neq \xi, \qquad h|G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, x)| \leqslant M.$$

В самом деле, пользуясь (6), находим

$$G_{\bar{x}}(x, \xi) = \frac{1}{\Delta} \alpha_{\bar{x}}(x) \beta(\xi) \quad \text{при } x \leqslant \xi, \qquad G_{\bar{x}}(x, \xi) = \frac{1}{\Delta} \beta_{\bar{x}}(x) \alpha(\xi) \quad \text{при } x > \xi,$$

$$G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi) = \frac{1}{\Delta} \alpha_{\bar{x}}(x) \beta_{\xi}(\xi) \quad \text{при } x \leqslant \xi,$$

$$G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi) = \frac{1}{\Delta} \beta_{\bar{x}}(x) \alpha_{\xi}(\xi) \quad \text{при } x > \xi.$$

Отсюда в силу ограниченности $\alpha_{\bar{x}}$ и $\beta_{\bar{x}}$ следует ограниченность $G_{\bar{x}\xi}$. Если, например, $d=0$, то

$$G_{\bar{x}\xi}(x, x) = -\frac{1}{ha(x)} + \alpha_{\bar{x}}(x)\beta_{\bar{x}}(x)/\Delta.$$

Полагая во второй формуле Грина (B.23) $y=w$, $z=G$, получим для решения задачи (1)—(3) следующее представление:

$$w(x) = (G(x, \xi), \psi(\xi)) + G(x, 0)\nu_1 + G(x, 1)\nu_2. \tag{10}$$

2. Оценка w и $w_{\bar{x}}$

Воспользуемся теперь формулой (10) и леммами 2 и 3 для оценки решения задачи (1)—(3).

Теорема 1. *Если w — решение задачи* (1)—(3), *то*

$$\|w\|_0 \leqslant M\|\psi\|_{5*}, \qquad \|w_{\bar{x}}\|_1 \leqslant M\|\psi\|_{5*}, \tag{11}$$

$$|w_{x,0}| \leqslant M\|\psi\|_{5*}, \qquad |w_{\bar{x},N}| \leqslant M\|\psi\|_{5*}. \tag{12}$$

Введем функцию $\eta(x)$ с помощью условий

$$\eta_{\bar{x}} = \psi, \qquad \eta_0 = 0, \qquad \eta(x) = \sum_{x'=h}^{x'=x} h\psi(x'). \tag{13}$$

Формула суммирования по частям (B.20) дает

$$(G, \psi) = (G(x, \xi), \eta_{\bar{\xi}}(\xi)) = -(G_{\xi}, \eta) + G(x, 1)\eta_{N-1}.$$

Отсюда и из (10) в силу леммы 3 следует $\|w\|_0 \leqslant M\|\psi\|_{5*}$. Рассмотрим теперь

$$w_{\bar{x}} = (G_{\bar{x}}, \psi) + G_{\bar{x}}(x, 0)\nu_1 + G_{\bar{x}}(x, 1)\nu_2. \tag{14}$$

Учитывая затем (13), находим

$$(G_{\bar{x}}, \psi) = -(G_{\bar{x}\xi}, \eta) + G_{\bar{x}}(x, 1)\eta_{N-1}. \tag{15}$$

Пользуясь неравенством

$$\|(G_{\bar{x}\xi}, \eta)\|_1 \leqslant \sum_{x'=h}^{x'=1} \{h(G_{\bar{x}\xi}(x', \xi), \eta(\xi))' + h^2 G_{\bar{x}\xi}(x', x')\eta(x'-h)\},$$

где штрих обозначает, что сумма $(G_{\bar{x}\xi}, \eta)'$ берется по $\xi \neq x'-h$, а также леммой 3, получаем

$$\|(G_{\bar{x}\xi}, \eta)\|_1 \leqslant M\|\eta\|_1 = M\|\psi\|_{3*}.$$

Отсюда и из (14), (15) следует неравенство $\|w_{\bar{x}}\|_1 \leqslant M\|\psi\|_{5*}$.

Лемма 4. *Если w — решение задачи* (1)—(3), *то*

$$\|w_{\bar{x}}\|_2 \leqslant M\|\psi\|_5. \tag{16}$$

Доказательство леммы следует из (15) и леммы 3. Однако мы применим другой метод доказательства, характерный для последующего изложения и не использующий функции Грина. Умножим (1) на wh, просуммируем по сетке $x=h, 2h, \ldots (N-1)h$ и воспользуемся (B.22):

$$(a, w_{\bar{x}}^2] + (d, w^2) - a_N w_N w_{\bar{x},N} + a_1 w_0 w_{x,0} = (\psi, w)$$

или, если учесть (2),

$$I + (d, w^2) = (\psi, w) + \nu_1 w_0 + \nu_2 w_N,$$

где

$$I = (a, w_{\bar{x}}^2] + \sigma_1 w_0^2 + \sigma_2 w_N^2.$$

Введем функцию $\eta(x)$ с помощью условий (13):

$$(w, \psi) = -(w_{\bar{x}}, \eta) + w_N \eta_{N-1}.$$

Используя неравенство Буняковского, а также неравенство

$$w^2 \leqslant MI \tag{16a}$$

(см. [4], лемма 1*), будем иметь

$$|(w_{\bar{x}}, \eta)| \leqslant \|w_{\bar{x}}\|_2 \|\eta\|_2 \leqslant M\sqrt{I}\,\|\psi\|_3, \qquad I + (d, w^2) \leqslant M\|\psi\|_5 \sqrt{I} \leqslant M\|\psi\|_5^2.$$

Отсюда в силу (3) следует неравенство (16).

Приведем пример, показывающий, что $\|\psi\|_{4^*}$ дает более точную оценку при плохой функции ψ по сравнению с $\|\psi\|_4$, не говоря уже о $\|\psi\|_2$. Предположим, что

$$\nu_1 = \nu_2 \equiv 0, \qquad \psi = \psi_i = (\delta_{i,\,n+1} - \delta_{i,\,n}) \frac{1}{h^m} \qquad (m = 0, 1).$$

Тогда будем иметь:

$$\|\psi\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}}, \quad \|\psi\|_4 = \|\psi\|_3 = \sqrt{h}, \quad \|\psi\|_{4^*} = \|\psi\|_{3^*} = h \qquad \text{при } m = 0,$$

$$\|\psi\|_2 = \sqrt{2}\sqrt{h}, \quad \|\psi\|_4 = h^{3/2}, \quad \|\psi\|_{4^*} = h^2 \qquad \text{при } m = 1.$$

Отсюда ясно преимущество оценок, полученных с помощью функции Грина, по сравнению с оценками, полученными методом интегральных неравенств. Это преимущество сказывается в случае плохих функций ψ. Отметим, что методом интегральных неравенств, примененным нами при доказательстве леммы 4, вместо $\|w\|_0 \leqslant M\|\psi\|_{5^*}$ получается оценка $\|w\|_0 \leqslant M\|\psi\|_5$.

3. Оценка w_t

Предположим теперь, что функции a, ψ, d и, следовательно, w зависят от t и определены на сетке $\bar{\Omega}$, точнее, $a = a(x, t)$, $0 < x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\psi = \psi(x, t)$, $0 < x < 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, а функции $\sigma_s(t)$, $\nu_s(t)$ $(s = 1, 2)$ заданы на сетке $\omega_\tau^T = \{t_j = j\tau, 0 \leqslant j \leqslant L\}$.

Предположим также, что a, σ_s, d удовлетворяют условиям Липшица по t, так что

$$|a_{\bar{t}}| \leqslant M, \qquad |d_{\bar{t}}| \leqslant M, \qquad |(\sigma_s)_{\bar{t}}| \leqslant M, \qquad s = 1, 2, \tag{17}$$

причем реализуется один из случаев:

$$\sigma_s \leqslant M \qquad \text{или} \qquad \sigma_s = \infty. \tag{18}$$

Если, например, $\sigma_1 = \infty$, то при $x = 0$ получаем однородное краевое условие 1-го рода $w_0 = 0$.

Лемма 5. *Если выполнены условия* (1)—(3), (17) *и* (18), *то*

$$\|w_{\bar{t}}\|_0 \leqslant M(\|\psi\|_{5^*} + \|\psi_{\bar{t}}\|_{5^*}), \tag{19}$$

$$\|w_{\bar{x}\bar{t}}\|_1 \leqslant M(\|\psi\|_{5^*} + \|\psi_{\bar{t}}\|_{5^*}), \tag{20}$$

где

$$\|\psi_{\bar{t}}\|_{5^*} = \|\psi_{\bar{t}}\|_{4^*} + |\nu_{1\bar{t}}| + |\nu_{2\bar{t}}|.$$

Если, например, при $x = 0$ задано условие $w_0 = 0$, то в (19) и (20) следует формально положить $\nu_1(t) \equiv 0$.

Вводя функцию $\zeta = w_{\bar{t}}$, получим для нее задачу

$$(a\zeta_{\bar{x}})_x - d\zeta = -[\psi_{\bar{t}} + (a_{\bar{t}}\check{w}_{\bar{x}})_x - d_{\bar{t}}\check{w}] = -\bar{\psi}, \qquad a_1\zeta_{x,0} = \sigma_1\zeta_0 - \bar{\nu}_1,$$
$$-a_N\zeta_{\bar{x},N} = \sigma_2\zeta_N - \bar{\nu}_2,$$

где

$$\bar{\nu}_1 = \nu_{1\bar{t}} - \sigma_{1\bar{t}}\check{w}_0 - a_{\bar{t},1}\check{w}_{x,0}, \qquad \bar{\nu}_2 = \nu_{2\bar{t}} - \sigma_{2\bar{t}}\check{w}_N - a_{\bar{t},N}\check{w}_{\bar{x},N}.$$

Условия теоремы 1 выполнены, поэтому

$$\|\zeta\|_0 \leqslant M\|\bar{\psi}\|_{5^*}, \qquad \|\bar{\psi}\|_{5^*} = \|\bar{\psi}\|_{4^*} + |\bar{\nu}_1| + |\bar{\nu}_2|.$$

В силу теоремы 1 и условий (17)

$$|\bar{\nu}_s| \leqslant |\nu_{s\bar{t}}| + M\|\psi\|_{5^*}, \qquad s = 1, 2.$$

Замечая теперь, что

$$\sum_{x'=h}^{x'=x} h(a_{\bar{t}}\check{w}_{\bar{x}})_x = a_{\bar{t}}^{(+1)}\check{w}_x - a_{\bar{t},1}\check{w}_{x,0},$$

и учитывая неравенства (12) теоремы 1, получаем (19).

Лемма 5 для первой краевой задачи использовалась в [5] при доказательстве сходимости однородных разностных схем для линейного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами.

Аналогично доказывается

Лемма 6. *Если выполнены условия леммы* 5 *и, кроме того,*

$$|(\sigma_s)_{\bar{t}\bar{t}}| \leqslant M, \qquad |a_{\bar{t}\bar{t}}| \leqslant M, \qquad |d_{\bar{t}\bar{t}}| \leqslant M,$$

то

$$\|w_{\bar{t}\bar{t}}\|_0 \leqslant M\{\|\psi\|_{5^*} + \|\psi_{\bar{t}}\|_{5^*} + \|\psi_{\bar{t}\bar{t}}\|_{5^*}\}, \tag{21}$$

где

$$\|\psi_{\bar{t}\bar{t}}\|_{5^*} = \|\psi_{\bar{t}\bar{t}}\|_{4^*} + |\nu_{1\bar{t}\bar{t}}| + |\nu_{2\bar{t}\bar{t}}|. \tag{22}$$

При этом следует учесть неравенство (20).

Все результаты п. 1—3 сохраняют силу и для решения краевой задачи

$$(aw_{\bar{x}})_{\tilde{x}} - d\cdot w = -\psi \tag{23}$$

с условиями (2) и (3), определенного на неравномерной сетке

$$\omega_h = \{x_i,\ 0 \leqslant i \leqslant N\}.$$

При этом вместо $\|\psi\|_{5^*}$ и $\|\psi\|_5$ во всех оценках надо писать нормы

$$\|\psi\|_{5^*}^* \quad \text{и} \quad \|\psi\|_5^*,$$

определяемые в соответствии с формулами (B.13) и (B.14).

4. Система уравнений второго порядка

Рассмотрим теперь общий случай разностной краевой задачи для системы второго порядка:

$$(\mathbf{a}\mathbf{w}_{\bar{x}})_x - \mathbf{d}\cdot\mathbf{w} = -\boldsymbol{\psi}, \tag{24}$$

$$\mathbf{w}(0) = 0, \qquad \mathbf{w}(1) = 0, \tag{25}$$

где $\mathbf{a} = (a_{ij})$ и $\mathbf{d} = (d_{ij})$ — матрицы, $i, j = 1, 2, \ldots, r$; $\boldsymbol{\psi} = (\psi^j)$, $\mathbf{w} = (w^j)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ — векторы *.

Будем предполагать, что

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \beta \sum_j \xi_j^2, \qquad \beta > 0, \\ &\sum_{i,j} d_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \gamma \sum_j \xi_j^2, \qquad \gamma \geqslant 0, \end{aligned} \tag{26}$$

где $\{\xi_j\}$ — любые вещественные числа, β и γ — вещественные постоянные, не зависящие от сетки.

Для упрощения мы ограничимся изложением для первой краевой задачи, хотя все результаты будут иметь силу и для краевой задачи 3-го рода, аналогичной задаче (1)—(3) для одного уравнения.

Умножим (24) скалярно на вектор-функцию $\mathbf{w}h$ и просуммируем по сетке от $x = h$ до $x = 1 - h$. Пользуясь формулой суммирования по частям (B.20), получим формулу Грина

$$\sum_{i,j} \{(a_{ij}w^j_{\bar{x}}, w^i_{\bar{x}}] + (d_{ij}w^j, w^i)\} = \sum_i (w^i, \psi^i), \tag{27}$$

или

$$(\mathbf{a}\mathbf{w}_{\bar{x}}, \mathbf{w}_{\bar{x}}] + (\mathbf{d}\mathbf{w}, \mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}). \tag{27'}$$

Учитывая (26), будем иметь

$$\beta \| \mathbf{w}_{\bar{x}} \|_2^2 + \gamma \| \mathbf{w} \|_2^2 \leqslant (\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}). \tag{28}$$

Замечая, что $|\mathbf{w}| \leqslant \| \mathbf{w}_{\bar{x}} \|_2$, $|(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})| \leqslant \| \mathbf{w}_{\bar{x}} \|_2 \| \boldsymbol{\psi} \|_2$, получим первую оценку:

$$\| \mathbf{w} \|_0 \leqslant \frac{1}{\beta} \| \boldsymbol{\psi} \|_2. \tag{29}$$

Введем теперь вектор-функцию $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^j(x)\}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, с помощью условий $\boldsymbol{\eta}_x = \boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\eta}(0) = 0$, так что

$$\boldsymbol{\eta}(x) = \sum_{x'=h}^{x-h} h\boldsymbol{\psi}(x'),$$

и воспользуемся формулой суммирования по частям (B.21)

$$(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{w}) = \sum_j (w^j, \psi^j) = (\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}_x) = -(\mathbf{w}_{\bar{x}}, \boldsymbol{\eta}]$$

и неравенством Буняковского

$$|(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{w})| \leqslant \| \mathbf{w}_{\bar{x}} \|_2 \| \boldsymbol{\psi} \|_3 \qquad (\| \boldsymbol{\eta} \|_2 = \| \boldsymbol{\psi} \|_3).$$

Обращаясь к (28), находим

$$\beta \| \mathbf{w}_{\bar{x}} \|_2^2 \leqslant \| \mathbf{w}_{\bar{x}} \|_2 \| \boldsymbol{\psi} \|_3 \quad \text{и} \quad \| \mathbf{w}_{\bar{x}} \|_2 \leqslant \frac{1}{\beta} \| \boldsymbol{\psi} \|_3.$$

---

* Употребление удобных индексов i и j не должно привести к недоразумениям, так как мы договорились не употреблять их в качестве индексов сетки.

Тем самым доказана

Теорема 2. *Если* $\mathbf{w}$ — *решение задачи* (24) — (26), *то*

$$\|\mathbf{w}\|_0 \leqslant \frac{1}{3}\|\boldsymbol{\psi}\|_3, \tag{30}$$

$$\|\mathbf{w}_{\bar{x}}\|_2 \leqslant \frac{1}{3}\|\boldsymbol{\psi}\|_3. \tag{31}$$

Аналогично доказывается

Лемма 7. *Если выполнены условия*

$$|(a_{ij})_{\bar{t}}| \leqslant M, \quad |(d_{ij})_{\bar{t}}| \leqslant M \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

то имеют место неравенства

$$\|\mathbf{w}_{\bar{t}}\|_0 \leqslant M(\|\boldsymbol{\psi}\|_3 + \|\boldsymbol{\psi}_{\bar{t}}\|_3), \tag{32}$$

$$\|\mathbf{w}_{\bar{x}t}\|_0 \leqslant M(\|\boldsymbol{\psi}\|_3 + \|\boldsymbol{\psi}_{\bar{t}}\|_3). \tag{33}$$

Лемма 7 используется при построении априорных оценок системы нестационарных уравнений.

5. Уравнение четвертого порядка

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения четвертого порядка:

$$(aw_{\bar{x}x})_{\bar{x}x} - (bw_{\bar{x}})_x + d\cdot w = \psi \text{ на сетке } \{x_i = ih,\ 2 \leqslant i \leqslant N-2\}, \tag{34}$$

$$w_0 = w_{x,0} = 0, \quad w_N = w_{\bar{x},N} = 0, \tag{35}$$

$$a \geqslant M > 0, \quad b \geqslant 0, \quad d \geqslant 0. \tag{36}$$

Теорема 3. *Если* w — *решение задачи* (34) — (36), *то*

$$\|w\|_0 \leqslant M\|\psi\|_3, \quad \|w_{\bar{x}}\|_0 \leqslant M\|\psi\|_3, \quad \|w_{\bar{x}x}\|_2 \leqslant M\|\psi\|_3, \tag{37}$$

где $\|\psi\|_3 = ((\eta, \eta))^{1/2} = \|\eta\|_2$, *а* $\eta(x)$ — *решение задачи*

$$\eta_{\bar{x}x} = \psi, \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_{x,1} = 0. \tag{38}$$

Полагая в формуле Грина (B.26) $y = z = w$, получим

$$(a, w_{\bar{x}x}^2) + ((b, w_{\bar{x}}^2) + ((d, w^2)) = ((\psi, w). \tag{39}$$

Формула (B.26′) в силу условий (35) дает

$$((\psi, w)) = ((\eta_{\bar{x}x}, w)) = (\eta, w_{\bar{x}x}) + w_{N-1}\eta_{\bar{x},N-1} - \eta_{\bar{x},N}w_{\bar{x},N} = (\eta, w_{\bar{x}x}).$$

Учитывая затем соотношения (см. [4])

$$\|w\|_0 \leqslant \|w_{\bar{x}}\|_0 \leqslant \|w_{\bar{x}x}\|_2, \quad |(\eta, w_{\bar{x}x})| \leqslant \|\eta\|_2\|w_{\bar{x}x}\|_2,$$

получаем из (38) неравенства (37).

Если при $x = 1$ заданы условия $w_{\bar{x}x} = 0$, $(a^{(-1)}w_{\bar{x}x})_{\bar{x}x} = 0$, то

$$\|w\|_0 \leqslant M\|\psi\|_4, \quad \|\psi\|_4 = \|\psi\|_3 + |((\psi, 1)|. \tag{40}$$

Для решения задачи (34) — (36) имеет место аналог леммы 6.

Мы не имеем возможности здесь останавливаться на априорных оценках решения уравнения (34) с краевыми условиями повышенного порядка точности.

§ 2. Уравнение параболического типа

1. Исходная задача

Рассмотрим в области $\bar{\Omega}$ следующую задачу для уравнения, являющегося разностным аналогом линейного дифференциального уравнения параболического типа:

$$\mathcal{P}_1 z = \rho z_{\bar{t}} - (a z_{\bar{x}})_x^{(\alpha)} - Q(z) = \psi \qquad \text{на } \Omega_1, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &(a^{(+1)} z_x)^{(\alpha)} = \mathscr{E}_1(t) z_{\bar{t}} + (\sigma_1(t) z)^{(\alpha)} - \nu_1(t) && \text{при } x = 0, \quad t = \tau, 2\tau, \ldots, L\tau = T, \\ &-(a z_{\bar{x}})^{(\alpha)} = \mathscr{E}_2(t) z_{\bar{t}} + (\sigma_2(t) z)^{(\alpha)} - \nu_2(t) && \text{при } x = 1, \quad t = \tau, 2\tau, \ldots, L\tau = T, \\ &z^0 = z(x, 0) = \varphi(x), && \text{при } t = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где индекс α означает суммирование по строкам t и $t - \tau$ сетки с весовыми множителями α_1 и α_2:

$$\begin{gathered} v^{(\alpha)} = \alpha_1 v + \alpha_2 \check{v}, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \ \alpha_2 \geqslant 0, \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ Q(z) = (b_1 z^*)_x + (b_2 \check{z}^*)_x + \bar{b}_1 z_{x^*} + \bar{b}_2 \check{z}_{x^*} + d_1 z + d_2 \check{z}, \\ z^* = 0{,}5\,(z + z^{(-1)}), \quad z_{x^*} = 0{,}5\,(z_{\bar{x}} + z_x). \end{gathered} \tag{3}$$

В дальнейшем всюду используются условия

$$\begin{gathered} a \geqslant M_0 > 0, \quad \rho \geqslant M_0 > 0, \quad \mathscr{E}_s > 0, \quad \sigma_s \geqslant 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant M_1 > 0, \\ |b_s| \leqslant M_2, \quad |\bar{b}_s| \leqslant M_2, \quad |d_s| \leqslant M_2, \quad s = 1, 2, \end{gathered} \tag{4}$$

которые мы включаем в постановку задачи (1) — (4).

Все полученные в этом параграфе результаты справедливы и для первой краевой задачи ($z_0 = z_N = 0$).

2. Априорные оценки для случая «дифференцируемости» коэффициента a по t ($|a_{\bar{t}}| \leqslant M$)

Задача (1) — (4) в несколько менее общей постановке рассматривалась в [4]. Поэтому мы начнем с изложения результатов работы [4], которые мы суммируем в виде трех теорем.

Теорема 3. *Если выполнены условия* $0{,}5 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$, $\varphi \equiv 0$,

$$|a_{\bar{t}}| \leqslant M_3, \quad |(b_s)_x| \leqslant M_4, \quad |\sigma_{s\bar{t}}| \leqslant M_5 \sqrt{\sigma_s \check{\sigma}_s} \qquad (s = 1, 2), \tag{5}$$

то для решения задачи (1) — (4) *при достаточно малом* $\tau \leqslant \tau_0$ *имеет место оценка*

$$\|z\|_0 \leqslant M \left[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \overline{\|\psi(x, t')\|_2^2} \right]^{1/2}, \tag{6}$$

где

$$\overline{\|\psi\|_2} = \|\psi\|_2 + |\nu_1| / \sqrt{\mathscr{E}_1} + |\nu_2| / \sqrt{\mathscr{E}_2}. \tag{7}$$

В случае первой краевой задачи ($z_0 = 0$, $z_N = 0$) вместо $\overline{\|\psi\|_2}$ в (6) входит $\|\psi\|_2$.

Постоянная τ_0 зависит только от M_s ($s = 0, 1, \ldots, 5$).

Теорема 4. *Если выполнены условия* (5), $0{,}5 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$ *и* $\psi \equiv 0$,

то при $\tau \leqslant \tau_0$

$$\|\sqrt{a(x,t)}\, z_{\bar x}\|_2 + \sqrt{\sigma_1(t)}\,|z_0| + \sqrt{\sigma_2(t)}\,|z_N| \leqslant \tag{8}$$
$$\leqslant M\left(\|\sqrt{a(x,0)}\,\varphi_{\bar x}\| + \sqrt{\sigma_1(0)}\,|\varphi(0)| + \sqrt{\sigma_2(0)}\,\|\varphi(1)\|_2\right).$$

Если, кроме того, $a \leqslant M_6$, $0 \leqslant \sigma_s \leqslant M_1$, $s = 1, 2$, *то*

$$\overline{\|z\|}_2 + \|z_{\bar x}\|_2 \leqslant M\left(\overline{\|\varphi\|}_2 + \|\varphi_{\bar x}\|_2\right), \tag{9}$$

где

$$\overline{\|z\|}_2 = \|z\|_2 + |z(0,t)| + |z(1,t)|. \tag{10}$$

Неравенство (9) справедливо и для первой краевой задачи, если $\overline{\|z\|}_2$ заменить на $\|z\|_2$.

Доказательство теорем 3 и 4 содержится в [4]. Однако мы воспроизведем его в сокращенной и несколько измененной форме, удобной для перехода к системе уравнений. Ограничимся доказательством теоремы 3.

Умножим уравнение (1) на $h\tau z_{\bar t}$ и просуммируем по сетке $\{x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N-1\}$. Пользуясь формулой Грина (B.22) и краевыми условиями (2), получим:

$$\tau[\rho, z_{\bar t}^2] + \alpha_1 I = \alpha_2 \check I + \tau(\Psi, z_{\bar t}) + R, \quad \Psi = \psi + Q(z), \tag{11}$$

$$I = (a, z_{\bar x}^2] + \sigma_1 z_0^2 + \sigma_2 z_N^2, \quad [\rho, z_{\bar t}^2] = (\rho, z_{\bar t}^2) + \mathscr{E}_1 z_{\bar t,0}^2 + \mathscr{E}_2 z_{\bar t,N}^2, \tag{12}$$

$$R = (\alpha_1 a - (1-\alpha_1)\grave a,\ z_{\bar x}\check z_{\bar x}] + (\alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\check\sigma_1) z_0 \check z_0 + \tag{13}$$
$$+ (\alpha_1\sigma_2 - \alpha_2\check\sigma_2) z_N \check z_N + \tau\nu_1 z_{\bar t,0} + \tau\nu_2 z_{\bar t,N}.$$

Для преобразования выражения

$$R_1 = (\alpha_1 a - \alpha_2 \grave a,\ z_{\bar x}\check z_{\bar x}] = (2\alpha_1 - 1)(a,\ z_{\bar x}\check z_{\bar x}] + \alpha_2\tau(a_{\bar t},\ z_{\bar x}\check z_{\bar x}]$$

воспользуемся тождествами

$$a z_{\bar x}\check z_{\bar x} = a z_{\bar x}^2 - \underline{\tau a z_{\bar x} z_{\bar x \bar t}}, \tag{14}$$

$$a z_{\bar x}\check z_{\bar x} = \grave a \check z_{\bar x}^2 + \tau a z_{\bar x \bar t}\check z_{\bar x} + \tau a_{\bar t}\check z_{\bar x}^2 = \grave a \check z_{\bar x}^2 + \underline{\tau a z_{\bar x} z_{\bar x \bar t}} - \tau^2 a z_{\bar x \bar t}^2 + \tau a_{\bar t}\check z_{\bar x}^2. \tag{15}$$

Отсюда следует, что

$$(2\alpha_1 - 1) a z_{\bar x}\check z_{\bar x} = (\alpha_1 - 0{,}5)\{(a z_{\bar x}^2 + \grave a \check z_{\bar x}^2) - \tau^2 a z_{\bar x \bar t}^2 + \tau a_{\bar t}\check z_{\bar x}^2\}.$$

Преобразуя аналогично второе и третье слагаемые в (13) и подставляя полученные результаты в (11), получим основное тождество:

$$\tau[\rho, z_{\bar t}^2] + 0{,}5 I + (\alpha_1 - 0{,}5)\{(a, z_{\bar x \bar t}^2] + \sigma_1 z_{\bar t,0}^2 + \sigma_2 z_{\bar t,N}^2\}\tau^2 = \tag{16}$$
$$= 0{,}5\check I + (\alpha_1 - 0{,}5)\tau\{(a_{\bar t}, \check z_{\bar x}^2) + \sigma_{1\bar t}\check z_0^2 + \sigma_{2\bar t}\check z_N^2\} + (1-\alpha_1)\tau\{(a_{\bar t}, z_{\bar x}\check z_{\bar x}] +$$
$$+ \sigma_{1\bar t} z_0 \check z_0 + \sigma_{2\bar t} z_N \check z_N\} + \tau\{(\Psi, z_{\bar t}) + \nu_1 z_{\bar t,0} + \nu_2 z_{\bar t,N}\}.$$

Для оценки выражений в фигурных скобках, стоящих справа в (16), используются условия (4), (5) и неравенство (B.15). Отметим при этом неравенство

$$|\sqrt{\sigma}| = |\sqrt{\check\sigma} + \tau\sigma_{\bar t}/(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\check\sigma})| \leqslant \sqrt{\check\sigma} + M_5\sqrt{\sigma\check\sigma}/(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\check\sigma}) \leqslant (1 + M_5\tau)\sqrt{\check\sigma}.$$

В результате приходим к интегральному неравенству

$$\tau(\rho, z_{\bar t}^2) + I \leqslant (1 + M\tau)\{\check I + \tau\overline{\|\Psi\|_2^2}\} \text{ при } \tau \leqslant \tau_0 = \bar\tau_0/\alpha_2. \tag{17}$$

Нетрудно, пользуясь (4), (5) и (1.16а), получить

$$\overline{\|\Psi\|_2} \leqslant \overline{\|\psi\|_2} + \overline{M} I + M\check I, \tag{18}$$

где

$$\overline{M} = M(\|\widetilde{b_{1x}}\|_0 + \|\widetilde{b_1}\|_0 + \|\widetilde{d_1}\|_0). \tag{19}$$

Поэтому можно написать

$$\tau(\rho, z_{\bar t}^2) + I \leqslant (1 + M\tau)(\check I + \tau\overline{\|\psi\|_2^2}) \quad \text{при } \tau \leqslant \tau_0 = \bar\tau_0/\alpha_2(1 + M\overline{M}). \tag{20}$$

Отсюда видно, что при $b_1 = \bar b_1 = d \equiv 0$ имеет место прежнее условие $\tau \leqslant \bar\tau_0/\alpha_2$, где $\bar\tau_0$ зависит только от M_3, M_5, M_0 и M_1 и обращается в нуль при $a_{\bar t} \equiv 0$, $\sigma_{s\bar t} \equiv 0$.

Решая неравенство (20) и учитывая (1.16а), получим (6). При доказательстве теоремы 4 используется (20), где следует положить $\overline{\|\psi\|_2} = 0$ и учесть начальное условие $z(x, 0) = \varphi(x)$.

Замечания.

1. Условие $\tau \leqslant \tau_0$ снимается, если $b_1 = \bar b_1 = d_1 \equiv 0$, $a_{\bar t} = \sigma_{1\bar t} = \sigma_{2\bar t} \equiv 0$ или $b_1 = \bar b_1 = d_1 \equiv 0$ и $\alpha_2 = 0$ $(\alpha_1 = 1)$.

2. Для доказательства сходимости используется только теорема 3. При ее доказательстве не требуется ограниченности сверху коэффициента $a(x, t)$.

3. Если выполнены условия теоремы 4, то

$$\|z\|_0 \leqslant M\left\{\left[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \overline{\|\psi(x, t')\|_2^2}\right]^{1/2} + \|\varphi_{\bar x}\|_2 + |\varphi(0)| + |\varphi(1)|\right\}. \tag{21}$$

4. В [8] и [9] получена оценка (21) для первой краевой задачи при $\alpha_1 = 1$ и дополнительном предложении $|a_x| \leqslant M$, что делает ее непригодной для наших целей, так как исключает возможность неподвижных разрывов коэффициента теплопроводности.

5. Неравенство (9) выражает устойчивость решения задачи (1) — (4) по начальным данным в смысле нормы $\|\bar z\|_2 + \|z_{\bar x}\|_2$ (ср. [8]).

6. Теоремы 3, 4, а также сформулированные ниже теоремы 5 и 6 сохраняют силу и в случае более общего краевого условия

$$(a^{(+1)} z_x)^{(\alpha)} = \mathscr{E}_1 z_{\bar t} + (\sigma_1 z + h\zeta_1 z + h\eta_1 z_x)^{(\alpha)} - \nu_1 \quad \text{при } x = 0,$$

где $|\zeta_1| \leqslant M$, $|\eta_1| \leqslant M$, и аналогичного условия при $x = 1$.

3. Априорные оценки при условии ограниченности коэффициентов a, b_1 и b_2

Особые трудности возникают при оценке решения задачи (1) — (4) в том случае, когда условия (5) не выполнены и коэффициенты a, b_1 и b_2 лишь ограничены. Нам удалось получить эффективную априорную оценку только для случая $\alpha_1 = 1$. Сформулируем для случая $\varphi \equiv 0$ соответствующую теорему, доказанную в [4].

Теорема 5. *Если* $\alpha_1 = 1$ *и*

$$|\rho_{\bar t}| \leqslant M, \qquad |\mathscr{E}_{s\bar t}| \leqslant M\mathscr{E}_s, \qquad s = 1,\ 2, \tag{22}$$

то для решения задачи (1) — (4) *при достаточно малых* $\tau \leqslant \tau_0$ *имеют место неравенства*

$$[1,\ z^p]^{1/p} \leqslant M(p)\Big[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \|\psi(x,\ t')\|_5^p\Big]^{1/p}, \tag{23}$$

$$\Big(\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \|z(x,\ t')\|_0^p\Big)^{1/p} \leqslant M(p)\Big[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \|\psi(x,\ t')\|_5^p\Big]^{1/p}, \tag{24}$$

где $p = 2^n$, $n \geqslant 1$ — *любое целое число*, $M(p) = M(n) = M\sqrt{n}2^n e^{Mn2^n}$, $\tau_0 = M(1 + \|\widetilde{b_1}\|_0/n\cdot 2^n)$ *не зависит от* n *только при* $b_1 \equiv 0$.

При доказательстве теоремы 5 используется разностное уравнение для функции z^{2^n} и полученное в [4] для этого уравнения интегральное неравенство.

4. Улучшенная априорная оценка для шеститочечного уравнения

Рассмотрим следующую задачу:

$$\rho z_{\bar t} - (a z_{\bar x})_x^{(\alpha)} = \Psi^{(\alpha)}, \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} &(a^{(+1)} z_x)^{(\alpha)} = \mathscr{E}_1 z_{\bar t} + (\sigma_1 z)^{(\alpha)} - \nu_1^{(\alpha)} && \text{при } x = 0,\\ &-(a z_{\bar x})^{(\alpha)} = \mathscr{E}_2 z_{\bar t} + (\sigma_2 z)^{(\alpha)} - \nu_2^{(\alpha)} && \text{при } x = 1,\\ &z(x,\ 0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где

$$\Psi = Q(z) + \psi, \qquad Q(z) = b z_{\bar x} + b^{(+1)} z_x + dz. \tag{27}$$

Коэффициенты задачи удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned} &0 < M_1 \leqslant a \leqslant M_2,\ M \geqslant \rho \geqslant M_1 > 0,\ |b| \leqslant M,\ |d| \leqslant M,\ \sigma_s \geqslant 0,\\ &\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant M > 0,\ |a_{\bar t}| \leqslant M,\ |\sigma_{s\bar t}| \leqslant M\sqrt{\sigma_s \check\sigma_s},\ 0 < \mathscr{E}_s \leqslant M \quad (s = 1,\ 2), \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

причем имеет место один из случаев:

$$0 \leqslant \sigma_s \leqslant M \text{ или } \sigma_s = \infty \text{ (краевое условие первого рода).} \tag{29}$$

Теорема 6. *Если* $z(x,\ t)$ — *решение задачи* (25) — (29) *и* $0{,}5 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$, *то при достаточно малом* $\tau \leqslant \tau_0$ *имеем*

$$\|z\|_0 \leqslant M\Big\{\|\psi(x,\ t)\|_{5^*} + \|\psi(x,\ 0)\|_5 + \tag{30}$$

$$+ \Big[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau\,(\|\psi(x,\ t')\|_{5^*}^2 + \|\psi_{\bar t}(x,\ t')\|_{5^*}^2)\Big]^{1/2}\Big\} + \overline{M}\Big[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \|\psi(x,\ t')\|_5^2\Big]^{1/2},$$

причем $\overline{M} = 0$ *при* $b \equiv 0$.

Представим z в виде суммы $z = v + w$, где w — решение задачи (1.1) — (1.4) при $d \equiv 0$, а v определяется из условий:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho v_{\bar t} - (a v_{\bar x})_x^{(\alpha)} = Q^{(\alpha)}(v) - [\rho w_{\bar t} - Q^{(\alpha)}(w)], \\
&(a^{(+1)} v_x)^{(\alpha)} = \mathscr{E}_1 v_{\bar t} + (\sigma_1 v)^{(\alpha)} + \mathscr{E}_1 w_{\bar t} && \text{при } x = 0, \\
&-(a v_{\bar x})^{(\alpha)} = \mathscr{E}_2 v_{\bar t} + (\sigma_2 v)^{(\alpha)} + \mathscr{E}_2 w_{\bar t} && \text{при } x = 1, \\
&v(x, 0) = -w(x, 0).
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

В силу теоремы 1 и леммы 5

$$\|w\|_0 \leqslant M \|\psi\|_{5^*}, \quad \|w_{\bar x}\|_1 \leqslant M \|\psi\|_{5^*}, \quad \|w_{\bar t}\|_0 \leqslant M (\|\psi_{\bar t}\|_{5^*} + \|\psi\|_{5^*}). \tag{32}$$

Пользуясь затем леммой 4, находим

$$\|Q(w)\|_2 \leqslant \overline{M} \|w_{\bar x}\|_2 + M \|w\|_2 \leqslant \overline{M} \|\psi\|_5 + M \|\psi\|_{5^*}. \tag{33}$$

Воспользуемся для оценки решения задачи (31) неравенством (21) В правую часть (21) войдет норма

$$\|\rho w_{\bar t} - Q^{(\alpha)}(w)\|_2 + \sqrt{\mathscr{E}_1}\, |w_{\bar t, 0}| + \sqrt{\mathscr{E}_2}\, |w_{\bar t, N}| \leqslant \overline{M} \|\psi\|_5 + M \{\|\psi\|_{5^*} + \|\psi_{\bar t}\|_{5^*}\},$$

при оценке которой мы учитываем неравенства (32) и (33). Отсюда в силу оценки (21), а также неравенства $\|z\|_0 \leqslant \|v\|_0 + \|w\|_0$ и следует (30).

Теорема 6 непосредственно используется при доказательстве теоремы сходимости однородных разностных схем для уравнения параболического типа в случае неподвижных разрывов коэффициента теплопроводности.

Выделение решения «стационарной» задачи (1.1) — (1.4) коренным образом улучшает априорную оценку для нашей задачи, позволяя ввести нормы $\|\psi\|_5$ и $\|\psi\|_{5^*}$.

Следует отметить, что при $b(x, t) \equiv 0$ и $\psi(x, 0) = 0$ оценка получится наиболее точной, так как в правую часть неравенства (30) будет входить только $\| \quad \|_{5^*}$:

$$\|z\|_0 \leqslant M \left\{ \|\psi(x, t)\|_{5^*} + \left[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \|\psi(x, t')\|_{5^*}^2 + \|\psi_{\bar t}(x, t')\|_{5^*}^2 \right]^{1/2} \right\}. \tag{34}$$

Достоинства нормы $\| \quad \|_{5^*}$ мы иллюстрировали в § 1, п. 2, на примере.

При доказательстве теорем сходимости и точности мы представляем решение задачи (1) — (4) в виде суммы $\bar z + \bar{\bar z}$, где $\bar z$ — решение той же задачи с однородными краевыми условиями и хорошей (т. е. имеющей высокий порядок малости по h и τ) правой частью $\bar\psi$, а $\bar{\bar z}$ — решение задачи (25) — (29) с плохой правой частью $\bar{\bar\psi}^{(\alpha)}$. Функция $\bar z$ оценивается с помощью неравенства (6), а для оценки $\bar{\bar z}$ используется теорема 6.

Приведем еще одну априорную оценку (в среднем), полученную в [12] для шеститочечной схемы в предположении лишь ограниченности $a(x, t)$. Если $z(x, t)$ — решение уравнения (25) с условиями

$$z_0 = z_N = 0, \quad z(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < M_0 \leqslant a \leqslant M_1, \quad \rho \geqslant M_0 > 0,$$
$$|\rho_{\bar t}| \leqslant M, \quad |b| \leqslant M, \quad |d| \leqslant M,$$

то

$$\|z\|_2 \leqslant M \left[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \|\psi(x, t')\|_2^2 \right]^{1/2} + M(1 + \gamma) \|\varphi\|_2 \qquad (\gamma = \tau/h^2). \tag{35}$$

5. Система уравнений

Рассмотрим теперь систему уравнений, являющуюся разностным аналогом системы линейных уравнений параболического типа. Пусть $\mathbf{z} = \{z^j,\ j = 1, 2, \ldots, r\}$ — вектор-функция, заданная на сетке $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющая условиям

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\rho}\mathbf{z}_{\bar{t}} - (\mathbf{a}\mathbf{z}_{\bar{x}})_x^{(\alpha)} = \boldsymbol{\Psi}^{(\alpha)} \quad \text{на } \Omega_1, \\ &\mathbf{z} = 0 \ \text{при } x = 0,\ x = 1 \ \text{и } t = 0, \end{aligned}\right\}, \tag{36}$$

где $\mathbf{a} = (a_{ij})$ — симметрическая положительно определенная матрица; $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{ij})$ — положительно определенная матрица, точнее,

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \sum_{i,\ j=1}^{r} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \beta_1 \sum_{j=1}^{r} \xi_j^2, \quad \sum_{i,\ j=1}^{r} \rho_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \beta_2 \sum_{j=1}^{r} \xi_j^2, \quad \beta_1 \geqslant M > 0,\ \beta_2 \geqslant M > 0;$$

ξ_j — любые вещественные числа; β_1 и β_2 — постоянные, не зависящие от h и τ;

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{Q}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\psi}, \qquad \mathbf{Q}(\mathbf{z}) = \mathbf{b}\mathbf{z}_{\bar{x}} + \mathbf{b}^{(+1)}\mathbf{z}_x + \mathbf{d}\mathbf{z}, \tag{37}$$

$\mathbf{b} = (b_{ij})$, $\mathbf{d} = (d_{ij})$ — матрицы, $\boldsymbol{\psi} = (\psi^j)$, $\mathbf{z} = (z^j)$ — векторы.

Кроме того, выполнены условия

$$|a_{ij}| \leqslant M, \qquad |b_{ij}| \leqslant M, \qquad |d_{ij}| \leqslant M, \qquad |(a_{ij})_{\bar{t}}| \leqslant M. \tag{38}$$

Для упрощения изложения мы ограничиваемся случаем первой краевой задачи, хотя полученные ниже оценки переносятся на случай краевых условий более общего вида, аналогичных условиям (2) для одного уравнения (1). Имеет место

Теорема 7. *Если* $\alpha_1 \geqslant 0{,}5$ *и* $\tau \leqslant \tau_0$ *достаточно мало, то для решения задачи* (36) — (38) *имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{z}\|_0 \leqslant M\left[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau\|\psi(x, t')\|_2^2\right]^{1/2}, \tag{39}$$

где

$$\|\mathbf{z}\|_0 = \max_{(x)} \sqrt{\sum_{j=1}^{r} (z^j)^2}, \qquad \|\psi\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{r} (\psi^j)^2,\ 1\right)^{1/2}. \tag{40}$$

Теорема доказывается по аналогии с теоремой 3. Умножим уравнение (36) скалярно на вектор $h\tau\mathbf{z}_{\bar{t}}$ и просуммируем по сетке $\{x = h,\ 2h, \ldots, (N-1)h = 1 - h\}$:

$$\tau(\boldsymbol{\rho}\mathbf{z}_{\bar{t}}, \mathbf{z}_{\bar{t}}) + \alpha_1 I = \alpha_2 \check{I} + \tau(\boldsymbol{\Psi}^{(\alpha)}, \mathbf{z}_{\bar{t}}) + ((\alpha_1\mathbf{a} - \alpha_2\check{\mathbf{a}})\mathbf{z}_{\bar{x}}, \check{\mathbf{z}}_{\bar{x}}], \tag{41}$$

где

$$I = (\mathbf{a}\mathbf{z}_{\bar{x}}, \mathbf{z}_{\bar{x}}] = \sum_{ij} (a_{ij}z_{\bar{x}}^i, z_{\bar{x}}^j].$$

Преобразуем выражение

$$((\alpha_1\mathbf{a} - \alpha_2\check{\mathbf{a}})\mathbf{z}_{\bar{x}}, \check{\mathbf{z}}_{\bar{x}}] = \sum_{i,\ j}((\alpha_1 a_{ij} - \alpha_2\check{a}_{ij})z_{\bar{x}}^i, \check{z}_{\bar{x}}^j] =$$

$$= (2\alpha_1 - 1)\sum_{i,\ j} (a_{ij}z_{\bar{x}}^j, \check{z}_{\bar{x}}^i] + \alpha_2\tau \sum_{i,\ j} ((a_{ij})_{\bar{t}}z_{\bar{x}}^j, \check{z}_{\bar{x}}^i].$$

По аналогии с п. 2 можно написать

$$a_{ij}z^i_{\bar x}\check z^j_{\bar x} = a_{ij}\check z^i_{\bar x}z^j_{\bar x} - \underline{\tau a_{ij}z^i_{\bar x}z^j_{\bar x t}} \qquad \text{при } j<i,$$

$$a_{ij}z^i_{\bar x}\check z^j_{\bar x} = \check a_{ij}\check z^i_{\bar x}\check z^j_{\bar x} + \underline{\tau a_{ij}z^i_{\bar x t}z^j_{\bar x}} - \tau^2 a_{ij}z^i_{\bar x t}z^j_{\bar x t} + \tau\,(a_{ij})_{\bar t}\,\check z^i_{\bar x}\check z^j_{\bar x} \qquad \text{при } j>i,$$

$$a_{ij}z^i_{\bar x}\check z^i_{\bar x} = \frac{1}{2}\left[a_{ii}\,(z^i_{\bar x})^2 + \check a_{ii}\,(\check z^i_{\bar x})^2\right] - \frac{1}{2}\,\tau^2 a_{ii}\,(z^i_{\bar x t})^2 + \frac{\tau}{2}\,(a_{ii})_{\bar t}\,(\check z^i_{\bar x})^2 \qquad \text{при } j=i.$$

Пользуясь симметрией матрицы (a_{ij}), получаем

$$(\mathbf{a}\mathbf{z}_{\bar x}, \check{\mathbf{z}}_{\bar x}] = \sum_{i,j}(a_{ij}z^i_{\bar x}, \check z^j_{\bar x}] = \frac{1}{2}\,(I+\check I) - \frac{\tau^2}{2}\,(\mathbf{a}\mathbf{z}_{\bar x t}, \mathbf{z}_{\bar x t}] + \frac{\tau}{2}\,(\mathbf{a}_{\bar t}\check{\mathbf{z}}_{\bar x}, \check{\mathbf{z}}_{\bar x}]. \tag{42}$$

Обращаясь к (41), получаем интегральное тождество

$$\begin{aligned}\tau\,(\rho\mathbf{z}_{\bar t}, \mathbf{z}_{\bar t}] + 0{,}5I + (\alpha_1 - 0{,}5)\,(\mathbf{a}\mathbf{z}_{\bar x t}, \mathbf{z}_{\bar x t}] = \\ = 0{,}5\check I + (\alpha_1 - 0{,}5)\,\tau\,(\mathbf{a}_{\bar t}\check{\mathbf{z}}_{\bar x}, \check{\mathbf{z}}_{\bar x}] + \alpha_2\tau\,(\mathbf{a}_{\bar t}\mathbf{z}_{\bar x}, \check{\mathbf{z}}_{\bar x}] + \tau\,(\Psi, \mathbf{z}_{\bar t}).\end{aligned} \tag{43}$$

Действуя затем так же, как и в п. 2, и учитывая, что

$$\|\mathbf{z}\|_0 \leqslant M\,\|\mathbf{z}_{\bar x}\|_2, \tag{44}$$

приходим к неравенству (39).

Теорема 8. *Если* $\alpha_1 \geqslant 0{,}5$ *и* τ *достаточно мало* $(\tau \leqslant \tau_0)$, *то*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z}\|_0 \leqslant M\left\{\|\boldsymbol{\psi}(x,t)\|_3 + \|\boldsymbol{\psi}(x,0)\|_3 + \left[\sum_{t'=\tau}^{t'=t}\tau\,\|\boldsymbol{\psi}(x,t')\|_3^2 + \tau\,\|\boldsymbol{\psi}_{\bar t}(x,t')\|_3^2\right]^{1/2}\right\} + \\ + \overline{M}\left[\sum_{t'=\tau}^{t'=t}\tau\,\|\boldsymbol{\psi}(x,t')\|_3^2\right]^{1/2},\end{aligned} \tag{45}$$

где $\overline{M} = 0$ *при* $b \equiv 0$.

Эта теорема аналогична теореме 5. При ее доказательстве следует использовать теорему 2 и лемму 7.

6. Дифференциально-разностные уравнения

Аналогичные априорные оценки имеют место для решений дифференциального уравнения параболического типа и дифференциально-разностных уравнений, получаемых из него методом Роте [10] (заменой производной по t разностным отношением) и методом прямых (заменой оператора по x разностным выражением).

А. Метод Роте. Пусть $z(x,t)$ (сеточная по t), определенная в области $(0 \leqslant x \leqslant 1) \times \omega^T_\tau = \{t_j = j\tau,\ 0 \leqslant j \leqslant L\}$, есть решение дифференциально-разностного уравнения

$$\rho\,(x,t)\,z_{\bar t} - \frac{d}{dx}\left(a\,(x,t)\,\frac{dz}{dx}\right) = Q\,(z) + \psi \quad (0<x<1,\ t=\tau, 2\tau, \ldots, L\tau) \tag{46}$$

с условиями

$$\begin{aligned} z\,(x,0) = 0, \quad k\,\frac{dz}{dx} &= \mathscr{E}_1 z_{\bar t} + \sigma_1 z - \nu_1\,(t) \quad \text{при } x=0, \\ -k\,\frac{dz}{dx} &= \mathscr{E}_2 z_{\bar t} + \sigma_2 z - \nu_2\,(t) \quad \text{при } x=1, \end{aligned} \tag{47}$$

$$Q\,(z) = \frac{d}{dx}\,(bz) + dz, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} a \geqslant M > 0, \quad \rho \geqslant M > 0, \quad |b| \leqslant M, \quad |d| \leqslant M, \quad \mathscr{E}_s > 0, \\ \sigma_s \geqslant 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant M > 0, \quad s = 1,2. \end{aligned} \tag{49}$$

Если, кроме того, выполнены условия (5), где вместо $|b_{sx}| \leqslant M$ надо написать $|db/dx| \leqslant M$, то при $\tau \leqslant \tau_0$ для решения задачи (46) — (49) выполняются неравенства

$$\|z\|_0 \leqslant M\Big(\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \|\overline{\psi(x, t')}\|_2^2\Big)^{1/2}, \tag{50}$$

$$\|z\|_0 \leqslant M\Big\{\|\psi(x, t)\|_{5*} + \|\psi(x, 0)\|_5 + \tag{51}$$

$$+\Big[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau(\|\psi(x, t')\|_{5*} + \|\psi_{\bar t}(x, t')\|_{5*})^2\Big]^{1/2}\Big\} + \overline{M}\Big[\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau\|\psi(x, t')\|_5^2\Big]^{1/2},$$

где

$$\|z\|_0 = \max_{0<x\leqslant 1}|z|, \quad \|\psi\|_m = \Big[\int_0^1 |\psi|^m dx\Big]^{1/m}, \quad m = 1, 2, \quad \overline{M} = 0 \text{ при } b \equiv 0;$$

$$\|\psi\|_5 = \Big\|\int_0^x \psi d\xi\Big\|_2 + \Big|\int_0^1 \psi dx\Big| + |\nu_1| + |\nu_2|, \quad \|\overline{\psi}\|_2 = \|\psi\|_2 + |\nu_1|/\sqrt{\mathscr{E}_1} + |\nu_2|/\sqrt{\mathscr{E}_2},$$

$$\|\psi\|_{5*} = \Big\|\int_0^x \psi d\xi\Big\|_1 + \Big|\int_0^1 \psi dx\Big| + |\nu_1| + |\nu_2|.$$

Если выполнены лишь условия (49) и $|\rho_{\bar t}| \leqslant M$, $|\mathscr{E}_{s\bar t}| \leqslant M\mathscr{E}_s$, то имеет место аналог теоремы 4.

Б. Метод прямых. Пусть $z(x, t)$ обозначает функцию, определенную в области $(0 \leqslant t \leqslant T) \times \omega_h' \{x = 0, h, 2h, \ldots, Nh = 1\}$ (т. е. сеточную по x) и удовлетворяющую уравнению

$$\rho(x, t)\frac{dz}{dt} - (az_{\bar x})_x = \psi + Q(z), \quad Q(z) = (b_1 z^*)_x + \bar b_1 z_{x^*} + dz, \tag{52}$$

и условиям

$$\begin{aligned} &z(x, 0) = 0, \quad a_1^{(+1)} z_x = \mathscr{E}_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_1 z - \nu_1 \quad \text{при } x = 0, \\ &-az_x = \mathscr{E}_2 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 z - \nu_2 \qquad\qquad \text{при } x = 1. \end{aligned} \tag{53}$$

Если выполнены условия (4) и условия $|da/dt| \leqslant M$, $|d\sigma_s/dt| \leqslant M\sqrt{\sigma_s}$, $|b_{1x}| \leqslant M$, то

$$\|z\|_0 \leqslant \|\overline{z}\|_2 + \|z_{\bar x}\|_2 \leqslant M\Big\{\Big[\int_0^t \|\overline{\psi(x, t)}\|_2^2 dt'\Big]^{1/2} + \|\overline{\varphi}\|_2 + \|\varphi_{\bar x}\|_2\Big\}, \tag{54}$$

где все нормы имеют тот же смысл, что и в п. 2.

Не представляет труда написать и другие априорные оценки, полученные выше для задачи (1) — (4), а также оценки для решения системы дифференциально-разностных и дифференциальных уравнений.

Все эти оценки позволяют доказать сходимость метода Роте и метода прямых в классе разрывных коэффициентов как для случая неподвижных, так и для случая движущихся разрывов.

Замечание. Все результаты этого параграфа переносятся на случай неравномерных сеток, если учесть, как это было указано в § 1,

изменение на неравномерной сетке смысла входящих в априорные оценки норм. Так, например, в неравенстве (30) надо $\|\psi\|_5$ и $\|\psi\|_{5*}$ заменить нормами $\|\psi\|_5^*$ и $\|\psi\|_{5*}^*$, определенными в п. 3 Введения, и учесть, что τ в сумме по временно́й сетке является сеточной функцией.

§ 3. Уравнения гиперболического типа

1. Разностная задача

Разностным аналогом дифференциального уравнения гиперболического типа

$$\mathcal{L}_2 u = c(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - Q(u) = \psi \qquad (0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T), \tag{1}$$

$$Q(u) = b\frac{\partial u}{\partial x} + c_1\frac{\partial u}{\partial t} + qu \tag{2}$$

является следующее уравнение:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{P}_2 z = \rho z_{\bar t t} - (a z_{\bar x})_x^{(\alpha)} - Q(z) = \psi \quad \text{на } \Omega_2, \\ &Q(z) = (b z_{x*} + dz)^{(\alpha)} + g z_{\bar t} + \check g \check z_{\bar t}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где индекс α указывает суммирование по трем строкам t, $t-\tau$, $t-2\tau$ сетки Ω_2 с весовыми множителями α_1, α_2, α_3, так что

$$v^{(\alpha)} = \alpha_1 v + \alpha_2 \check v + \alpha_2 \check{\check v}, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_2 \geqslant 0, \quad \alpha_3 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

Пусть функция $z(x,t)$, определенная на $\overline{\Omega}$, является решением задачи

$$\mathcal{P}_2 z = \psi \quad \text{на } \Omega_2, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &l_1 z = (a^{(+1)} z_x)^{(\alpha)} - \mathcal{E}_1(t)(z_{\bar t t} + c_1 z_{\bar t} + \check c_1 \check z_{\bar t}) - (\sigma_1 z)^{(\alpha)} = -\nu_1 \\ &\qquad\qquad \text{при } x = 0,\ t = 2\tau, \ldots, T, \\ &l_2 z = (a z_{\bar x})^{(\alpha)} + \mathcal{E}_2(t)(z_{\bar t t} + c_2 z_{\bar t} + \check c_2 \check z_{\bar t}) + (\sigma_2 z)^{(\alpha)} = \nu_2 \quad \text{при } x = 1, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$z(x,0) = \varphi(x), \qquad z_t(x,0) = \overline{\varphi}(x), \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &0 < M_0 \leqslant a \leqslant M_1,\ 0 < M_0 \leqslant \rho,\ |a_{\bar t}| \leqslant M,\ |\rho_t| \leqslant M, \\ &\qquad |b| \leqslant M,\ |d| \leqslant M,\ |g| \leqslant M, \\ &\mathcal{E}_s > 0,\ \sigma_s \geqslant 0,\ \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant M > 0,\ |\sigma_{s\bar t}| \leqslant M\sqrt{\sigma_s \check\sigma_s}, \\ &\qquad |\mathcal{E}_{s\bar t}| \leqslant M,\ |c_s| \leqslant M,\ s = 1, 2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

2. Интегральное неравенство

Для упрощения изложения проведем выкладки для краевых условий 1-го рода $z_0 = 0$, $z_N = 0$. Преобразования для краевых условий (5) проводятся по аналогии с [4] и п. 2 § 2.

Умножим уравнение (3) на $h\tau(z_{\bar t} + \beta \check z_{\bar t})$, где β — некоторый параметр, и просуммируем по сетке $\{x = h, 2h, \ldots, (N-1)h = 1-h\}$. Пользуясь первой формулой Грина (B.22) и учитывая краевые условия ($z_0 = z_N = 0$), а также

$$z_{\bar t} z_{\bar t t} = \frac{1}{2}(z_{\bar t}^2)_{\bar t} + \frac{\tau}{2} z_{\bar t t}^2, \qquad \check z_{\bar t} z_{\bar t t} = \frac{1}{2}(z_{\bar t}^2)_{\bar t} - \frac{\tau}{2} z_{\bar t t}^2,$$

получим тождество

$$\tau\frac{1+\beta}{2}(\rho, z_{\bar t}^2)_{\bar t}+\frac{1-\beta}{2}\tau(\rho, z_{t\bar t}^2)+\alpha_1 I-\alpha_2(1-\beta)\check I-\beta\alpha_3\check{\check I}= \tag{8}$$
$$=\tau(\Psi, z_{\bar t}+\beta\check z_{\bar t})+(\alpha_1(1-\beta)a-\alpha_2\check a, z_{\bar x}\check z_{\bar x}]+(\alpha_1\beta a-\alpha_3\check a, z_{\bar x}\check{\check z}_{\bar x}]+$$
$$+(\alpha_2\beta\check a+\alpha_3(1-\beta)\check a, \check z_{\bar x}\check{\check z}_{\bar x}]-\frac{1+\beta}{2}\tau(\rho_{\bar t}, \check z_{\bar t}^2),$$

где

$$I=(a, z_{\bar x}^2], \qquad \Psi=Q(z)+\psi. \tag{9}$$

Предположим теперь, что $\beta=1$, $\alpha_2=0$, $\alpha_1\geqslant 0{,}5$. Тогда тождество (8) можно записать в виде

$$\tau(\rho, z_{\bar t}^2)_{\bar t}+0{,}5I+4\tau^2(\alpha_1-0{,}5)(a, z_{\bar x l^*}^2]=0{,}5\check{\check I}+ \tag{10}$$
$$+(2\alpha_1-1)\tau(a_{\bar t}, \check{\check z}_{\bar x}^2]+2\alpha_3\tau(a_{l^*}, z_{\bar x}\check{\check z}_{\bar x}]+\tau(\Psi, z_{\bar t}+\check z_{\bar t})-\tau(\rho_{\bar t}, z_{\bar t}^2),$$

где

$$a_{l^*}=\frac{a-\check{\check a}}{2\tau}=0{,}5(a_{\bar t}+\check a_{\bar t}).$$

Замечая, что

$$|(a_{l^*}, z_{\bar x}\check{\check z}_{\bar x}]|\leqslant M(I+\check{\check I}), \qquad |\tau(\Psi, z_{\bar t}+\check z_{\bar t})|\leqslant M\tau\|\Psi\|_2^2+\frac{\tau}{T}(\rho, z_{\bar t}^2)+\frac{\tau}{T}(\check\rho, \check z_{\bar t}^2).$$
$$\tau|(\rho_{\bar t}, z_{\bar t}^2)|\leqslant M\tau(\rho, z_{\bar t}^2),$$

при достаточно малом $\tau\leqslant\tau_0$ будем иметь

$$E\leqslant(1+M\tau)(\check E+M\tau\|\Psi\|_2^2), \tag{11}$$

где

$$E=(\rho, z_{\bar t}^2)+0{,}5(I+\check I). \tag{12}$$

Нетрудно показать в силу условий (7), что

$$\|\Psi\|_2^2\leqslant M\{\|\psi\|_2^2+(\|z_{\bar x}\|_2^2+\|z\|_2^2)^{(\alpha)}+\|z_{\bar t}\|_2^2+\|\check z_{\bar t}\|_2^2\}\leqslant$$
$$\leqslant M[I+\check{\check I}+(\rho, z_{\bar t}^2)+(\check\rho, \check z_{\bar t}^2)].$$

В результате мы приходим к следующему интегральному (энергетическому) неравенству (ср. [13]):

$$E\leqslant(1+M\tau)(\check E+\tau\|\psi\|_2^2). \tag{13}$$

В случае общих краевых условий (5) получим аналогичное неравенство

$$E\leqslant(1+M\tau)(\check E+\tau\overline{\|\psi\|}_2^2), \tag{14}$$

в котором

$$\left.\begin{aligned} &E=[\rho, z_{\bar t}^2]+0{,}5(I+\check I), && [\rho, z_{\bar t}^2]=(\rho, z_{\bar t}^2)+\mathscr{E}_1 z_{\bar t,0}^2+\mathscr{E}_2 z_{\bar t,N}^2,\\ &I=(a, z_{\bar x}^2]+\sigma_1 z_0^2+\sigma_2 z_N^2, && \overline{\|\psi\|}_2=\|\psi\|_2+|\nu_1|/\sqrt{\mathscr{E}_1}+|\nu_2|/\sqrt{\mathscr{E}_2}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Полагая в тождестве (5) $\beta=0$, $\alpha_3=0$, получим интегральное неравенство (13) или (14), в котором

$$E=[\rho, z_{\bar t}^2]+0{,}5I. \tag{16}$$

3. Априорные оценки

Воспользуемся неравенством (14) для оценки $\|z\|_0$. Для этого нам понадобится неравенство (1.16а). Решая (14), получим

$$E(t) \leqslant M\left(E(\tau) + \sum_{t'=2\tau}^{t'=t} \tau \|\overline{\psi(x, t')}\|_2^2\right). \tag{17}$$

Отсюда и из (6) следует

Теорема 8. *Если* $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \geqslant 0{,}5$ (*или* $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 \geqslant 0{,}5$), *то при достаточно малых* $\tau \leqslant \tau_0$ *для решения задачи* (4) — (7) *справедлива оценка*

$$\|z\|_0 \leqslant \widetilde{M} \|z\|_7 \leqslant M\left\{\|z^1\|_7 + \left[\sum_{t'=2\tau}^{t'=t} \tau \|\overline{\psi(x, t')}\|_2^2\right]^{1/2}\right\}, \tag{18}$$

где $\widetilde{M} = 1/4$, *если* $z_0 = 0$ *или* $z_N = 0$,

$$\|z\|_7 = \|z\|_2 + \|\tilde{z}\|_2 + \|z_{\bar{t}}\|_2 + \|z_{\bar{x}}\|_2 + \|\tilde{z}_{\bar{x}}\|_2, \quad z^0 = \varphi, \quad z^1 = \overline{\varphi} + \tau\varphi. \tag{19}$$

В случае $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 \geqslant 0{,}5$ имеем

$$\|z\|_7 = \|z\|_2 + \|z_{\bar{x}}\|_2 + \|z_{\bar{t}}\|_2.$$

Нетрудно заметить, что из (18) вытекает неравенство

$$\|z\|_0 \leqslant M\left\{(1+\gamma)(\|\varphi\|_2 + \|\overline{\varphi}\|_2) + \left[\sum_{t'=2\tau}^{t'=t} \tau \|\overline{\psi(x, t')}\|_2^2\right]^{1/2}\right\}, \qquad \gamma = \frac{\tau}{h}. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь задачу

$$\mathscr{P}_2 z = \psi^{(\alpha)} \text{ на } \Omega_2, \tag{21}$$

$$l_1 z = -\nu_1^{(\alpha)} \text{ при } x = 0; \quad l_2 z = \nu_2^{(\alpha)} \text{ при } x = 1; \quad z = \varphi(x), \quad z_t = \overline{\varphi}(x) \text{ при } t = 0 \tag{22}$$

с условиями (7), причем

$$\sigma_s \leqslant M \text{ или } \sigma_s = \infty \text{ (краевое условие 1-го рода)}. \tag{23}$$

Теорема 9. *Если* $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \geqslant 0{,}5$ (*или* $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 \geqslant 0{,}5$) *и выполнены условия* $|a_{\bar{t}\bar{t}}| \leqslant M$, $|(\sigma_s)_{\bar{t}\bar{t}}| \leqslant M$, $s = 1, 2$, *то при достаточно малом* $\tau \leqslant \tau_0$ *для решения задачи* (21) — (23), (7) *имеем*

$$\begin{aligned} \|z\|_0 \leqslant \widetilde{M} \|z\|_7 \leqslant M\Big\{&\|z^1\|_7 + \|\psi(x, t)\|_{5^*} + \|\psi_{\bar{t}}(x, t)\|_{5^*} + \|\psi(x, 0)\|_5 + \\ &+ \|\psi_t(x, 0)\|_5 + \left[\sum_{t'=2\tau}^{t'=t} \tau (\|\psi(x, t')\|_{5^*} + \|\psi_{\bar{t}}(x, t')\|_{5^*} + \|\psi_{\bar{t}\bar{t}}(x, t')\|_{5^*})^2\right]^{1/2}\Big\} + \\ &+ \overline{M}\left(\sum_{t'=\tau}^{t'=t} \tau \|\psi(x, t')\|_5^2\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{24}$$

причем $\overline{M} = 0$ *при* $b \equiv 0$.

Для доказательства теоремы представим z в виде суммы $z = v + w$, где w — решение задачи (1.1) — (1.4) при $d \equiv 0$, и воспользуемся леммой 6 и теоремой 8.

До сих пор мы фактически рассматривали семиточечное разностное

уравнение вида

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & \alpha_1 \\ & * & & \alpha_2 = 0 \\ * & * & * & \alpha_3 \end{array}\right) \text{ или } \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & \alpha_1 \\ * & * & * & \alpha_2 \\ & * & & \alpha_3 = 0 \end{array}\right).$$

В следующем пункте будет получена априорная оценка для решения девятиточечного разностного уравнения

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & 0{,}25 \\ * & * & * & 0{,}5 \\ * & * & * & 0{,}25 \end{array}\right).$$

4. Априорная оценка для девятиточечного разностного уравнения

Рассмотрим следующую задачу:

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{P}_1 z = \psi^{(\alpha)} \text{ на } \Omega_2 \ (\alpha_1 = \alpha_3 = 0{,}25, \quad \alpha_2 = 0{,}5), \\ z_0 = z_N = 0; \quad z(x, 0) = \varphi(x), \quad z_t(x, 0) = \overline{\varphi}(x), \end{array}\right\} \tag{25}$$

$$\begin{array}{c} 0 < M_0 \leqslant a \leqslant M_1, \quad 0 < M_0 \leqslant \rho \leqslant M_1, \quad |a_{\bar t}| \leqslant M, \quad |\rho_{\bar t}| \leqslant M, \\ |b| \leqslant M, \quad |d| \leqslant M, \quad |g| \leqslant M. \end{array} \tag{26}$$

Перепишем разностное уравнение $\mathscr{P}_2 z = \psi$ в виде

$$\sqrt{\rho}\, z_{\bar t} - 0{,}25\, R\tau = \sqrt{\rho}\, \check z_{\bar t} + 0{,}25\tau \check R \sqrt{\frac{\check\rho}{\rho}} + \tau \Psi^{(\alpha)} / \sqrt{\rho}, \tag{27}$$

где

$$R = \frac{1}{\sqrt{\rho}} [(a z_{\bar x})_x + (\check a \check z_{\bar x})_x], \qquad \Psi = Q(z) + \psi. \tag{28}$$

Возводя (27) в квадрат, умножая на h и суммируя по сетке $\{x = h, 2h, \ldots, (N-1)h\}$, получим

$$\begin{aligned} (\rho, z_{\bar t}^2) + 0{,}5\, I + \frac{1}{16}\tau^2 \|R\|_2^2 = (\rho, z_{\bar t}^2) + 0{,}5\, \check{\check I} + \frac{1}{16}\tau^2 \left\| \check R \sqrt{\frac{\check\rho}{\rho}} \right\|_2^2 + \\ + \tau^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Psi \right\|_2^2 + 0{,}5\, \tau^2 \left(\frac{1}{\rho} \Psi^{(\alpha)}, \check R \sqrt{\check\rho} \right) + 2\tau (\Psi^{(\alpha)}, z_{\bar t}) + \\ + 0{,}5\, \tau (a_{\bar t}, z_{\bar x \bar x}] - 0{,}5\, \tau (\check a_{\bar t}, \check z_{\bar x \bar x}], \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$I = (a, z_{\bar x}^2]. \tag{30}$$

Для дальнейших преобразований используем (26), а также неравенства

$$\tau |(a_{\bar t}, z_{\bar x \bar x}]| \leqslant M\tau (I + \check I), \qquad \tau^2 \left| \left(\frac{1}{\rho} \Psi, \check R \sqrt{\check\rho} \right) \right| \leqslant M (\tau^3 \|\check R\|_2^2 + \tau \|\Psi\|_2^2),$$

$$\tau \|\Psi\|_2^2 \leqslant M\tau \{ I + \check I + \check{\check I} + \|\psi\|_2^2 + (a, z_{\bar t}^2) + (\check\rho, \check z_{\bar t}^2) \}.$$

В результате при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$ получаем следующее энергетическое неравенство:

$$E \leqslant (1 + M\tau)(\check E + M\tau \|\psi\|_2^2), \tag{31}$$

где

$$E = (\rho, z_{\bar t}^2) + 0{,}5\, (I + \check I) + \frac{1}{16}\tau^2 \|R\|_2^2. \tag{32}$$

Из неравенства (31) сразу следует

Лемма 8. *Для решения задачи* (25), (26) *имеет место интегральная оценка*

$$E(t) \leqslant M\Big(E(\tau) + \sum_{t'=2\tau}^{t'=t} \tau \|\psi(x, t')\|_2^2\Big) \quad \text{при } \tau \leqslant \tau_0, \tag{33}$$

где

$$E(\tau) = (\rho(x, \tau), \overline{\varphi}^2) + 0{,}5\{(a(x, 0), \varphi_{\bar{x}}^2] + (a(x, \tau), (\varphi_{\bar{x}} + \tau\overline{\varphi}_{\bar{x}})^2]\} + \tag{34}$$
$$+ \frac{\tau^2}{16}\|(a(x, 0)\varphi_{\bar{x}})_x + (a(x, \tau)\varphi_{\bar{x}})_x + \tau(a(x, \tau)\overline{\varphi}_{\bar{x}})_x\|_2^2.$$

Нетрудно заметить, что в силу (26) можно написать

$$E(\tau) \leqslant M\{\|\overline{\varphi}\|_2^2 + (\|\varphi_{\bar{x}}\|_2^2 + \tau^2\|\overline{\varphi}_{\bar{x}}\|_2^2)(1 + \gamma)\}$$

или

$$E(\tau) \leqslant M(\|\overline{\varphi}\|_2^2 + \|\varphi_{\bar{x}}\|_2^2)(1 + \gamma).$$

Тем самым доказана

Теорема 10. *Для решения задачи* (25), (26) *при достаточно малом* $\tau \leqslant \tau_0$ *выполняется неравенство*

$$\|z\|_0 \leqslant \|z\|_7 \leqslant M\Big\{E(\tau) + \Big[\sum_{t'=2\tau}^{t'=t} \tau\|\psi(x, t')\|_2^2\Big]^{1/2}\Big\} \tag{35}$$

или

$$\|z\|_0 \leqslant \|z\|_7 \leqslant M\Big\{\|z^1\|_7(1 + \gamma) + \Big[\sum_{t'=2\tau}^{t'=t} \tau\|\psi(x, t')\|_2^2\Big]^{1/2}\Big\}, \tag{36}$$

где

$$\|z\|_7 = \|z\|_2 + \|\check{z}\|_2 + \|z_{\bar{x}}\|_2 + \|\check{z}_{\bar{x}}\|_2 + \|z_{\bar{t}}\|_2.$$

Для задачи (25), (26) имеет место аналог теоремы 9.

5. Некоторые замечания

1. Если начальные данные нулевые ($\varphi = \overline{\varphi} = 0$), то в теоремах 8 и 10 требование ограниченности сверху a и ρ становится ненужным.

2. В работе [9] была получена оценка (8) для частного случая $\alpha_1 = 1$ ($\alpha_2 = \alpha_3 = 0$) при дополнительном предположении $|a_x| \leqslant M$ и $\rho = 1$ для первой краевой задачи ($z_0 = z_N = 0$).

3. В § 2 мы видели, что априорные оценки одного и того же типа имеют место для разностных, дифференциальных и дифференциально-разностных (метод Роте и метод прямых) уравнений. Аналогичная ситуация наблюдается и в случае уравнений гиперболического типа. Поэтому нет необходимости выписывать априорные оценки для дифференциально-разностных уравнений.

4. Если разностная сетка $\overline{\Omega}$ неравномерна, то разностное уравнение $\mathcal{P}_2 z = \psi$ следует записывать в виде

$$\rho\check{z}_{\bar{t}\tilde{t}} - (az_{\bar{x}})^{(\alpha)}_{\tilde{x}} - Q(z) = \psi.$$

Все оценки, полученные в этом параграфе, сохраняют силу и для этого уравнения, если всюду заменить все нормы $\|\psi\|$ на $\|\psi\|^*$.

5. Аналогичные результаты получаются и для системы уравнений

$$\rho \mathbf{z}_{\bar t \tilde t} - (\mathbf{a}\mathbf{z}_{\bar x})^{(\alpha)}_{x} - \mathbf{Q}(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\psi},$$

где $\mathbf{a} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{ij})$ — положительно определенные матрицы $(a_{ij} = a_{ji})$, $\mathbf{z} = \{z^j\}$, $\boldsymbol{\psi} = \{\psi^j\}$ — сеточные вектор-функции.

§ 4. Уравнение четвертого порядка

1. Разностные уравнения

Рассмотрим следующую задачу:

$$\mathcal{P}_3 z = \rho z_{\bar t \bar t} + (a z_{\bar x x})^{(\alpha)}_{\bar x x} + Q(z) = \psi \text{ на } \Omega_3, \tag{1}$$

$$z = z_{x,0}, \qquad z_N = z_{\bar x, N} = 0, \tag{2}$$

$$z(x, 0) = \varphi(x), \qquad z_t(x, 0) = \overline{\varphi}(x), \tag{3}$$

где

$$Q(z) = ((b z_{\bar x})_x + c z_{\tilde x} + d z)^{(\alpha)} + g z_{\bar t} + \check g \check z_{\bar t}; \tag{4}$$

$$v^{(\alpha)} = \alpha_1 v + \alpha_2 \check v + \alpha_3 \check{\check v}, \quad \alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_2 \geqslant 0,\ \alpha_3 \geqslant 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

Коэффициенты задачи, по предположению, удовлетворяют условиям:

$$0 < M \leqslant a,\ 0 < M \leqslant \rho,\ |b| \leqslant M,\ |c| \leqslant M,\ |d| \leqslant M,\ |a_{\bar t}| \leqslant M,\ |\rho_t| \leqslant M. \tag{5}$$

Все полученные в дальнейшем для задачи (1) — (5) результаты сохранят силу, если вместо (2) взять любую из пар краевых условий:

1) $z = z_x = 0$ при $x = 0$; $\quad z_{\bar x \bar x} = (a^{(-1)} z_{\bar x \bar x})_{\bar x} = 0$ при $x = 1$;

2) $z_{xx} = (a^{(+1)} z_{xx})_x = 0$ при $x = 0$; $\quad z = 0,\ z_{\bar x} = 0$ при $x = 1$;

3) $z = z_x = 0$ при $x = 0$; $\quad z_{\bar x} = 0,\ (a^{(-1)} z_{\bar x \bar x})_{\bar x} = 0$ при $x = 1$;

4) $z_x = (a^{(+1)} z_{xx})_x = 0$ при $x = 0$; $\quad z = z_{\bar x} = 0$ при $x = 1$.

Уравнение (1) является разностным аналогом линейного параболического уравнения четвертого порядка:

$$\mathcal{L}_3 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + b_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_3 u + b_4 \frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \psi. \tag{6}$$

2. Интегральное неравенство

Априорные оценки для решения задачи (1) — (5) получаются с помощью интегральных соотношений по аналогии с § 3.

Умножим (1) на $h\tau$ $(z_{\bar t} + \beta \check z_{\bar t})$, просуммируем по сетке $\{x = 2h,\ 3h, \ldots, (N-2)h\}$ и воспользуемся формулой Грина (В. 26). В силу краевых условий (2) подстановки обратятся в нуль, и мы получим тождество, которое при $\beta = 1$, $\alpha_2 = 0$ принимает вид

$$\tau((\rho, z_{\bar t}^2))_{\bar t} + \alpha_1 I = \alpha_3 I + \tau((\Psi, z_{\bar t} + \check z_{\bar t})) + (\alpha_1 a - \alpha_3 \check a,\ z_{\bar x x}\check z_{\bar x x}) - \tau((\rho_{\bar t}, \check z_{\bar t}^2)), \tag{7}$$

где

$$\Psi = Q(z) + \psi, \qquad I = (a, z_{\bar{x}x}^2). \tag{8}$$

Отсюда, действуя по аналогии с п. 2, § 3, при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$ получаем интегральное неравенство

$$E \leqslant (1 + M\tau)(\check{E} + M\tau \|\Psi\|_2^2), \quad \|\Psi\|_2^2 = ((\Psi, \Psi)), \tag{9}$$

где

$$E = ((\rho, z_{\bar{t}}^2)) + 0{,}5(I + \check{I}). \tag{10}$$

В силу условий (2) и (5) имеем

$$\|z\|_0 \leqslant \tfrac{1}{4}\|z_{\bar{x}}\|_2 \leqslant \tfrac{1}{16}\|z_{\bar{x}x}\|_2 \leqslant MI, \tag{11}$$

$$\rho \leqslant (1 + M\tau)\check{\rho}, \qquad \tau\,|((\rho_{\bar{t}}, \check{z}_{\bar{t}}^2))| \leqslant M\tau((\check{\rho}, \check{z}_{\bar{t}}^2)), \tag{12}$$

$$\|\Psi\|_2^2 \leqslant M\{((\rho, z_{\bar{t}}^2)) + ((\check{\rho}, \check{z}_{\bar{t}}^2)) + I + \check{\check{I}} + \|\psi\|_2^2\}. \tag{13}$$

Обращаясь теперь к тождеству (8) и учитывая (12), (13), получим искомое интегральное («энергетическое») неравенство:

$$E \leqslant (1 + M\tau)(\check{\check{E}} + M\tau\|\psi\|_2^2) \text{ при } \tau \leqslant \tau_0,\ \alpha_1 \geqslant 0{,}5. \tag{14}$$

Такое же неравенство получается и при $\beta = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 \geqslant 0{,}5$. В этом случае

$$E = ((\rho, z_{\bar{t}}^2)) + I.$$

3. Априорные оценки

Теорема 11. *Если $z(x, t)$ — решение задачи* (1) — (5) *и* $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \geqslant 0{,}5$, *то при достаточно малых $\tau \leqslant \tau_0$ имеем*

$$\|z\|_0 \leqslant \|z\|_8 \leqslant M\left\{\|z^1\|_8 + \left[\sum_{t'=2\tau}^{t'=t} \tau\|\psi(x,t')\|_2^2\right]^{1/2}\right\}, \qquad z^1 = z(x, \tau),$$

где

$$\|z\|_8 = \|z\|_2 + \|\check{z}\|_2 + \|z_{\bar{x}}\|_2 + \|\check{z}_{\bar{x}}\|_2 + \|z_{\bar{x}x}\|_2 + \|\check{z}_{\bar{x}x}\|_2 + \|z_{\bar{t}}\|_2.$$

Если $\alpha_3 = 0$, то эта оценка сохраняет силу при условии, что

$$\|z\|_8 = \|z\|_2 + \|z_{\bar{x}}\|_2 + \|z_{\bar{x}x}\|_2 + \|z_{\bar{t}}\|_2.$$

Для доказательства теоремы решаем неравенство (14) и учитываем при этом (11) и (5).

Для рассматриваемой задачи (1) — (5) имеют место теоремы, аналогичные теоремам 9 и 10. Мы не будем приводить их формулировки, чтобы не загромождать изложение. К тому же никаких новых обстоятельств при их доказательстве не возникает.

Не представляет труда написать соответствующие оценки для дифференциального и дифференциально-разностных уравнений.

Мы опускаем здесь случай краевых условий повышенного порядка точности, так как при этом рассуждения сильно усложняются.

Переход к системе уравнений также не представляет труда.

Развитый здесь метод позволяет получить оценки (и тем самым доказать теоремы сходимости в классе разрывных коэффициентов) для уравнений более высокого порядка.

Заслуживает внимания изучение разностных схем для уравнения четвертого порядка на неравномерных сетках.

В заключение автор пользуется возможностью выразить благодарность А. Н. Тихонову за обсуждение полученных результатов.

Поступила в редакцию
24.06.1961

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 4—63.
2. А. А. Самарский. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения. Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям. (Ереван, 1958 г.) Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960, 148—160.
3. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности. Докл. АН СССР, 1960, **131**, № 3, 514—517.
4. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 3, 441—460.
5. А. А. Самарский, И. В. Фрязинов. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 5.
6. M. Lees. Approximate solutions of parabolic equations. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, **7**, № 2, 167—183.
7. M. Lees, Apriori estimates for the solutions of difference approximations to parabolic equations. Duke Math. J., 1960, **27**, 297—311.
8. Л. И. Камынин. Об устойчивости разностных параболических уравнений. Докл. АН СССР, 1961, **132**, № 6, 1287—1290.
9. M. Lees, Energy inequalities for the solutions of differentiale equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **94**, 58—73.
10. E. Rothe. Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionales Randwertaufgaben. Math. Ann., 1932, **B102**, 650—670.
11. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. М., Изд-во ин. лит., 1948.
12. И. В. Фрязинов. Об устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 6, 1122—1127.
13. О. А. Ладыженская. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1953.