ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 1 Январь 1961 Февраль № 1

ОБ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение 6
1. Однородные разностные схемы 7
2. Некоторые примеры 11
3. Об аппроксимации и точности разностных схем 14
4. Основные результаты работы 16

§ 1. Исходное семейство разностных схем 19
1. Краевая задача для дифференциального уравнения 20
2. Исходное семейство однородных разностных схем 20
3. Функционалы r-го ранга 21
4. Классы разностных схем $\mathscr{L}(n_1, n_2, n_3)$ 23
5. Погрешности аппроксимации 24
6. Порядок аппроксимации 24
7. Канонические схемы 25
8. Консервативные разностные схемы 25
9. Линейные схемы 29
10. Дискретные схемы 29
11. Линейные функционалы в классе разрывных функций 30

§ 2. Однородные разностные схемы в классе гладких коэффициентов . 32
1. О точности разностных схем в классе гладких коэффициентов 32
2. Разностная функция Грина 33
3. Оценки разностной функции Грина 35
4. О порядке аппроксимации сходящихся схем 39

§ 3. Необходимые условия сходимости в классе разрывных коэффициентов 40
1. О погрешности аппроксимации в окрестности точки разрыва коэффициентов 40
2. Случай консервативной схемы 41
3. Основная лемма 42
4. Необходимое условие сходимости для исходной схемы в классе разрывных коэффициентов 46
5. Необходимые условия второго порядка точности в классе разрывных коэффициентов 47
6. О достаточных условиях сходимости 48

§ 4. Коэффициенто-устойчивые разностные схемы 49
1. Зависимость решения дифференциального уравнения от коэффициентов 49
2. Принцип ко-устойчивости разностных схем 50
3. Ко-устойчивость консервативной схемы 51
4. Необходимое условие ко-устойчивости 52
5. Консервативность ко-устойчивой канонической схемы 54

§ 5. О сходимости и точности 57
1. О сходимости консервативных схем в классе разрывных коэффициентов 57
2. О точности консервативной схемы 59

Введение

В связи с широким применением быстродействующих электронных счетных машин возникает необходимость развития однородных вычислительных методов, пригодных для решения определенных классов математических задач.

Для нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений $Lu = 0$ с некоторыми дополнительными условиями $lu = 0$ часто обращаются к методу конечных разностей; при этом искомую функцию u заменяют сетчатой функцией u^h, определенной на разностной сетке S_h, а дифференциальный оператор Lu—разностным оператором $L_h u^h$ (см. [1]—[10]).

Приближенное решение исходной задачи определяется как решение системы разностных уравнений $L_h u^h = 0$ с соответствующими разностными дополнительными условиями $l_h u^h = 0$.

Практическое использование быстродействующих электронных счетных машин показывает, что нецелесообразно развивать численные методы применительно к индивидуальным задачам. Необходимо развитие численных алгоритмов, пригодных для решения определенных классов задач. Рассмотрим, например, класс дифференциальных уравнений $L^{(k)}u = 0$ с дополнительными условиями $l^{(k)}u = 0$, характеризуемый типом операторов $L^{(k)}$ и $l^{(k)}$ и функциональным пространством K, из которого берутся вектор-коэффициенты уравнения. Закон для написания разностных уравнений для всех коэффициентов $k(x)$ из функционального пространства K мы будем называть разностной схемой. Разностная схема $L_h^k u^h$ в соединении с разностной схемой $l_h^k u^h$ рассматривается как вычислительный алгоритм для решения любой задачи из заданного класса задач.

Развитие теории разностных схем естественно приводит к постановке следующих вопросов:

1) обеспечивает ли выбранная разностная схема сходимость решения разностной задачи к решению исходной задачи для дифференциального уравнения в заданном классе коэффициентов и каков асимптотический порядок сходимости при $h \to 0$;

2) если разностная схема не фиксирована, а рассматривается некоторое семейство «допустимых» схем, то как выбрать из этого семейства схем лучшие схемы, которые дают высокую точность в наиболее широком классе коэффициентов и устойчивы относительно возмущений, связанных с ошибками вычислений.

п. 1 введения посвящен выяснению понятия однородных разностных схем. Изучение структуры исходных классов схем необходимо, поскольку основная задача теории разностных схем состоит в установлении связи между структурой схемы и той точностью, которую она реализует. Изучению конкретных разностных схем посвящена обширная литература.

В п. 2 приведен пример разностной схемы для дифференциальных операторов типа Штурма — Лиувилля, дающей высокую точность в классе достаточно гладких коэффициентов и не дающей даже сходимости в классе разрывных коэффициентов. Между тем класс уравнений этого типа с разрывными коэффициентами представляет большой научный и практический интерес.

Большое значение имеет проблема выделения семейств разностных схем «сквозного счета», которые позволяли бы решать задачи единым способом как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов, не прибегая к явному выделению их точек разрыва. (Выяснение положения точек разрыва коэффициентов особенно сложно в том случае, когда эти коэффициенты получаются в результате приближенного решения других уравнений.)

В п. 3 приводится второй пример, существенный для обсуждения постановки вопросов.

В п. 4 дается обзор результатов всей статьи.

Настоящая работа представляет собой сводку результатов, опубликованных авторами в 1956—1960 гг. (см. [11]—[19]). В процессе написания обзорной статьи опубликованные материалы были подвергнуты существенной переработке.

1. Однородные разностные схемы. Требование единообразия или однородности вычислений, особенно важное для образования циклов, выделяемых в процессе программирования, накладывает свои требования на семейства разностных операторов и схем. Перейдем к определению однородности разностных операторов и схем, ограничиваясь случаем одного переменного, что связано с последующим изложением; однако эти определения без труда переносятся на случай многих переменных.

Рассмотрим примеры. Для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$Lu = \frac{d^2u}{dx^2} - qu, \quad q = \text{const}, \quad 0 < x < 1,$$

простейший разностный (трехточечный) оператор определяется заданием шаблона $\mathfrak{M}_0$, состоящего из трех точек $m = -1, 0, 1$, и производящей функции

$$\Phi^h[\bar{u}] = \frac{\bar{u}_{-1} - 2\bar{u}_0 + \bar{u}_1}{h^2} - q\bar{u}_0 = \Phi^h(\bar{u}_{-1}, \bar{u}_0, \bar{u}_1).$$

Эту функцию можно рассматривать как функционал, заданный на сетчатой функции $\bar{u}$, определенной на шаблоне:

$$\bar{u} = \{\bar{u}_m\}, \qquad m \in \mathfrak{M}_0\{-1, 0, 1\}.$$

Значение разностного оператора $L_h u^h$ в точке x_i сетки $S_h\{x_i = ih, h = 1/N, i = 0, 1, \ldots, N\}$ для $1 \leqslant i \leqslant N-1$ определяется как значение производящей функции оператора Φ^h от аргументов, являющихся значениями сетчатой функции $u^h = \{u_i^h\}$ в точках шаблона $\mathfrak{M}_{x_i}^h$, отнесенного к точке x_i:

$$\mathfrak{M}_{x_i}^h = \{x_i + mh\}, \qquad m \in \mathfrak{M}_0, \quad \text{т. е.}$$

$$(L_h u^h)_i = \frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} - qu_i^h = \Phi^h[u^h(x_i + mh)].$$

Аналогично определяются разностные операторы и для случая многих переменных (например, для уравнения Лапласа) (см. [1]).

Остановимся на понятии однородного разностного оператора $L_h u^h = U^h$.

Введем предварительно несколько определений.

Конечное множество $\mathfrak{M}_0 = \{-m_1, -m_1+1, \ldots, 0, 1, \ldots, m_2\}$ точек целочисленной сетки будем называть шаблоном оператора, а функцию $\Phi^h(\bar{u}_{-m_1}, \bar{u}_{-m_1+1}, \ldots, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{m_2}) = \Phi^h[\bar{u}]$ от m_1+m_2+1 переменных, зависящую от h как от параметра, будем называть производящей функцией (функционалом) разностного оператора. Функция Φ^h является h-параметрическим функционалом от сетчатой функции $\bar{u} = \{\bar{u}_m, \ m \in \mathfrak{M}_0\}$, заданной на $\mathfrak{M}_0$.

Преобразование переменных

$$x = \bar{x} + s\bar{h},$$

которое мы будем называть преобразованием сдвига, отображает (при $s = m$, $m \in \mathfrak{M}_0$) шаблон $\mathfrak{M}_0$ на множество точек $\mathfrak{M}_{\bar{x}}^{\bar{h}}$, которое мы назовем преобразованным $\bar{h}$-шаблоном в точке $\bar{x}$. Если $\bar{x} = x_i$, $m_1 < i < N - m_2$, является узловой точкой сетки S_h и $\bar{h} = h$, то преобразованный h-шаблон в точке x_i является частью сетки S_h.

Сетчатая функция u^h, заданная на основной сетке S_h, индуцирует с помощью преобразованного h-шаблона в точке x_i функцию $\bar{u}_{x_i}^h$, определенную на $\mathfrak{M}_0$:

$$\bar{u}_{x_i}^h = \{u^h(x_i + mh), \ m \in \mathfrak{M}_0\}, \text{ если только } \mathfrak{M}_{x_i}^h \subset S_h, \text{ т. е. } m_1 < i < N - m_2.$$

Разностный оператор $L_h u^h = U^h$ будем называть однородным, если существует производящая функция (функционал) $\Phi^h[\bar{u}]$, $\bar{u} = \{\bar{u}_m, m \in \mathfrak{M}_0\}$, определенная для сетчатых функций, заданных на шаблоне $\mathfrak{M}_0$, так что значения оператора в точке x_i равны

$$U_i^h = \Phi^h \bar{u}_{x_i}^h = \Phi^h[u^h(x_i + mh)],$$

где $\bar{u}_{x_i}^h$ — функция, индуцированная на шаблоне $\mathfrak{M}_0$ сетчатой функцией u^h при помощи преобразованного h-шаблона в точке x_i. Такой оператор L_h преобразует сетчатую функцию u^h, заданную на S_h, в сетчатую функцию U^h, определенную на сетке $S_h'\{x_i, \ m_1 \leqslant i \leqslant N - m_2\}$, которая является частью сетки S_h.

Рассмотрим теперь примеры разностных схем для класса дифференциальных операторов

$$L^{(k)}u = \frac{d}{dx}\left[k_1(x)\frac{du}{dx}\right] - k_2(x)u + k_3(x),$$

где коэффициенты $k(x) = (k_1(x), k_2(x), k_3(x))$ принадлежат к некоторому функциональному пространству K.

Рассмотрим в качестве примера схему

$$(L^{(k)}u^h)_i = U_i^{(h,k)} = \frac{1}{h^2}[B_i(u_{i+1}^h - u_i^h) - A_i(u_i^h - u_{i-1}^h)] - D_i u_i + F_i,$$

$$0 < i < N,$$

где

$$A_i = \left(\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k_1(x)}\right)^{-1} = \left[\int\limits_{-1}^{0}\frac{ds}{k_1(x_i+sh)}\right]^{-1},$$

$$B_i = \left[\int\limits_{0}^{1}\frac{ds}{k_1(x_i+sh)}\right]^{-1} = A_{i+1},$$

$$D_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_i-0,5h}^{x_i+0,5h} k_2(x)\,dx = \int\limits_{-0,5}^{0,5} k_2(x_i+sh)\,ds,$$

$$F_i = \int\limits_{-0,5}^{0,5} k_3(x_i+sh)\,ds, \quad x_i = ih, \ i = 1, 2, \ldots, N-1, \ h = 1/N.$$

Эта схема обладает рядом достоинств.

Значение $(L_h^{(k)}u^h)_i$ может быть определено при помощи производящего функционала

$$\Phi^h[\bar{u}, \bar{k}(s)] = \frac{1}{h^2}[B^{(\bar{k}_1)}(\bar{u}_1 - \bar{u}_0) - A^{(\bar{k}_1)}(\bar{u}_0 - \bar{u}_1)] - D^{(\bar{k}_2)}\bar{u}_0 + F^{(\bar{k}_3)},$$

где

$$A^{(\bar{k}_1)} = A[\bar{k}_1(s)] = \left[\int\limits_{-1}^{0}\frac{ds}{\bar{k}_1(s)}\right]^{-1},$$

$$B^{(\bar{k}_1)} = B[\bar{k}_1(s)] = \left[\int\limits_{0}^{1}\frac{ds}{\bar{k}_1(s)}\right]^{-1} = A[\bar{k}_1(1+s)],$$

$$D^{(\bar{k}_2)} = D[\bar{k}_2(s)] = \int\limits_{-0,5}^{0,5}\bar{k}_2(s)\,ds, \qquad F^{(\bar{k}_3)} = F[\bar{k}_3(s)] = \int\limits_{-0,5}^{0,5}\bar{k}_3(s)\,ds,$$

определенного для сетчатой функции $\bar{u} = \{\bar{u}_m\}$, заданной на трехточечном шаблоне $\mathfrak{M}_0\,(m = -1, 0, 1)$, и функций $\bar{k}(s) = \{\bar{k}_1(s), \bar{k}_2(s), \bar{k}_3(s)\}$, заданной на отрезке $\Sigma_0\,(-1 \leqslant s \leqslant 1)$, который мы будем называть коэффициентным шаблоном, если положить

$$\bar{u}_m = u^h_{i+m}, \quad m \in \mathfrak{M}_0, \quad \bar{k}_j(s) = k_j(x_i+sh), \quad j = 1, 2, 3, \quad s \in \Sigma_0.$$

Дадим определение понятия однородной разностной схемы $L_h^{(k)}u^h$. Введем предварительно несколько определений.

Конечное множество $\mathfrak{M}_0\{m = -m_1, -m_1+1, \ldots, 0, 1, \ldots, m_2\}$ точек целочисленной сетки будем называть сетчатым, а отрезок $\Sigma_0\{-m_1 \leqslant s \leqslant \mathfrak{M}_2\}$ — коэффициентным шаблоном. Функционал $\Phi^h[\bar{u}, \bar{k}(s)]$, определенный для сетчатой функции $\bar{u}\{\bar{u}_m, m \in \mathfrak{M}_9\}$ и коэффициентов $\bar{k}(s)\,(s \in \Sigma_0)$ на соответствующих шаблонах, и зависящий от h как от параметра, будем называть производящим функционалом.

При определении сетчатого шаблона $\mathfrak{M}_0$ и шаблона коэффициентов Σ_0 можно без ограничения общности m_1 и m_2 считать одинаковыми. Для случая многих переменных шаблон Σ_0 может задаваться независи-

мо от $\mathfrak{M}_0$ — множества векторов, соединяющих начало координат с точками целочисленной сетки.

Преобразование сдвига $x = \bar{x} + sh$ отображает шаблоны $\mathfrak{M}_0$ и Σ_0 на множества точек $\mathfrak{M}^h_{\bar{x}}$ и $\Sigma^h_{\bar{x}}$, которые мы будем называть преобразованными h-шаблонами в точке $\bar{x}$.

Рассмотрим функции u^h и $k(x)$, заданные, соответственно, на основной сетке S_h и на Σ, основной области изменения x. Эти функции индуцируют с помощью преобразованных шаблонов $\mathfrak{M}^h_{x_i}$ и $\Sigma^h_{x_i}$ в точке x_i функции $\bar{u}^h_{x_i}$ и $\bar{k}^h_{x_i}(s)$, определенные на $\mathfrak{M}_0$ и Σ_0:

$$\bar{u}^h_{x_i} = u^h(x_i + mh), \quad m \in \mathfrak{M}_0, \quad \bar{k}^h_{x_i}(s) = k(x_i + sh), \quad s \in \Sigma_0,$$

если только $\mathfrak{M}^h_{x_i}$ и $\Sigma^h_{x_i}$ принадлежат, соответственно, S_h и Σ.

Разностную схему $L^{(k)}_h u^h$, соответствующую дифференциальному оператору $L^{(k)}u$, мы будем называть однородной разностной схемой в классе коэффициентов $k(x) \in K$, если существует производящий функционал $\Phi^h[\bar{u}, \bar{k}(s)]$, с помощью которого значения $(L^{(k)}_h u^h)_i$ определяются по формуле:

$$(L^{(k)}_h u^h)_i = \Phi^h[\bar{u}^h_{x_i}, \bar{k}^h_{x_i}(s)] = \Phi^h[u^h(x_i + mh), k(x_i + sh)].$$

Разностная схема $L^{(k)}_h$ при любом выборе $k(x) \in K$ определяет оператор, который функцию u^h, заданную на сетке S_h, преобразует в функцию $L^{(k)}_h u^h$, заданную на сетке $S'_h(x_i, \ m_1 \leqslant i \leqslant N - m_2)$, являющуюся частью сетки S_h.

Если разностная схема $L^{(k)}_h u^h$ *линейна* относительно сетчатой функции $u^h = \{u^h_i\}$, то

$$(L^{(k)}_h u^h)_i = \sum_l a^h_{il}[k(x)]\, u^h_l + b^h_i[k(x)],$$

где суммирование проводится, вообще говоря, по всей сетке S_h. Коэффициенты $a^h_{il}[k(x)]$ и $b^h_i[k(x)]$ являются функционалами коэффициентов дифференциального оператора $L^{(k)}u$, зависящими от параметра h. Задание $L^{(k)}_h u^h$ эквивалентно заданию матрицы-функционала $(a^h_{il}[k(x)])$ и вектор-функционала $b^h_i[k(x)]$. Однородность линейной схемы $L^{(k)}_h u^h$ обозначает, что

$$(L^{(k)}_h u^h)_i = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A^h_j[\bar{k}^h_i(s)]\, u^h_{i+j} + B^h[\bar{k}^h_i(s)], \quad (\bar{k}^h_i(s) = k(x_i + sh)),$$

где $A^h_j[\bar{k}(s)]$ и $B^h[\bar{k}(s)]$ — параметрические функционалы, определенные для вектор-функций $\bar{k}(s)$, заданных на коэффициентном шаблоне $\Sigma_0(-m_1 \leqslant s \leqslant m_2)$, причем

$$\begin{aligned} &a^h_{il}[k(x)] = A^h_j[k(x_i + sh)], \quad j = l - i, && \text{для } -m_1 \leqslant j \leqslant m_2, \\ &a^h_{il}[k(x)] = 0 && \text{для } j < -m_1 \text{ и } j > m_2, \\ &b^h_i[k(x)] = B^h[k(x_i + sh)]. \end{aligned}$$

Производящий функционал этой линейной однородной схемы равен

$$\Phi^h[\bar{u}, \bar{k}(s)] = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A^h_j[\bar{k}(s)]\, \bar{u}_j + B^h[\bar{k}(s)],$$

где $\bar{k}(s)$ — функция, определенная на шаблоне $\Sigma_0 (-m_1 \leqslant s \leqslant m_2)$.

Разностную схему мы будем называть *симметричной* схемой, если выражение $L_h^{(k)} u^h$ остается неизменным при изменении направления оси x. Условие симметрии однородной схемы имеет вид

$$\Phi^h [u_{i+j},\ k(x_i + sh)] = \Phi^h [u_{i-j},\ k(x_i - sh)],$$
$$j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm \ldots,\ \pm m\ (m_1 = m_2 = m),\quad -m \leqslant s \leqslant m.$$

Симметрия линейной однородной схемы определяется равенствами

$$A_j^h [\bar{k}(s)] = A_{-j}^h [\bar{k}(-s)],\ j = 0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm m\ (m_1 = m_2 = m),$$
$$B^h [\bar{k}(s)] = B^h [\bar{k}(-s)].$$

При решении систем дифференциальных уравнений $dY/dx = k(x, Y(x))$ класс уравнений определяется не просто коэффициентами $k(x)$, зависящими от переменной x, а «коэффициентами» $k(x, Y)$, зависящими также от искомой вектор-функции $Y(x)$. Понятие однородных разностных схем переносится и на этот случай и охватывает схемы, применяемые в методах Эйлера и Адамса — Штёрмера*.

2. Некоторые примеры. Для частичного пояснения поставленных в п. 1 вопросов рассмотрим примеры.

Пример 1. Рассмотрим первую краевую задачу

$$L^{(k)} u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = 0,\quad 0 < x < 1,\quad u(0) = 1,\quad u(1) = 0.$$

Рассмотрим однородную разностную схему, определяемую производящим функционалом

$$\Phi^h [\bar{u},\ \bar{k}(s)] = \bar{k}(0)\frac{\bar{u}_1 - 2\bar{u}_0 + \bar{u}_{-1}}{h^2} + \frac{\bar{k}(1) - \bar{k}(-1)}{2h}\cdot\frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_{-1}}{2h},$$

которая приводит к системе разностных уравнений

$$(L_h^{(k)} u^h)_i = \Phi^h [u^h(x_i + mh),\quad k(x_i + sh)] =$$
$$= k_i \frac{u_{i+1}^h - 2u_i^h + u_{i-1}^h}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h}\,\frac{u_{i+1}^h - u_{i-1}^h}{2h} = 0,$$
$$m = -1,\ 0,\ 1,\quad 0 < i < N,\quad h = 1/N,$$

или

$$\frac{1}{h^2}[B_i^{(k)} \Delta u_i^h - A_i^{(k)} \nabla u_i^h] = 0,\quad 0 < i < N,\quad u_0^h = 1,\quad u_N^h = 0,$$

где

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i,\quad \nabla u_i = u_i - u_{i-1},\quad B_i^{(k)} = k_i + \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}),$$
$$A_i^{(k)} = k_i - \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}).$$

Как будет показано ниже (см. § 2, п. 4), эта схема обеспечивает второй порядок точности в классе гладких коэффициентов $k(x)$ $(k \in C^{(3)})$

$$u_i^h - u(x_i) = O(h^2).$$

* Схема Рунге—Кутта выходит за рамки данного определения однородных схем. Однако нетрудно расширить понятие однородности разностных схем так, чтобы оно охватывало и схему Рунге—Кутта.

Покажем, что эта схема не обеспечивает даже сходимости в классе разрывных коэффициентов. Рассмотрим кусочно-постоянную функцию

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leqslant x < \xi, \\ k_2, & \xi < x \leqslant 1, \end{cases}$$

где ξ иррациональное число. Пусть ξ принадлежит интервалу (x_n, x_{n+1}) сетки S_h, $\xi = x_n + \theta h$, $0 < \theta < 1$. Разностные уравнения для $i \neq n$, $i \neq n+1$ дают

$$\Delta u_i^h = \nabla u_{i+1}^h,$$

то есть u_i^h линейна относительно номера i для $i < n$ и $i > n+1$:

$$u_i^h = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{\Delta} x_i & x_i < \xi, \\ \frac{\beta}{\Delta}(1 - x_i), & x_i > \xi. \end{cases}$$

Коэффициенты $\frac{\alpha}{\Delta}$ и $\frac{\beta}{\Delta}$ определяются из уравнений для $i = n$, $n+1$:

$$\alpha = \frac{3+\varkappa}{5-\varkappa}, \quad \beta = \frac{3\varkappa+1}{5\varkappa-1}, \quad \varkappa = \frac{k_2}{k_1},$$

$$\Delta = \varkappa\xi + \beta(1-\xi) + h[1 - (\beta - \alpha)(1 - \theta)].$$

Вводя полигональную функцию $\tilde{u}^h(x, h)$, натянутую на сетчатую функцию u_i^h, и совершая предельный переход при $h \to 0$, видим, что предельная функция

$$\tilde{u}(x) = \lim_{h \to 0} \tilde{u}^h(x, h) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{\Delta_0} x, & x < \xi, \\ \frac{\beta}{\Delta_0}(1 - x), & x > \xi \end{cases}$$

$$(\Delta_0 = \varkappa\xi + \beta(1-\xi))$$

отлична от решения исходной задачи, равного

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\varkappa x}{\varkappa\xi + 1 - \xi}, & x < \xi, \\ \frac{1-x}{\varkappa\xi + 1 - \xi}, & x > \xi, \end{cases}$$

для $\varkappa \neq 1$. В самом деле, сравнивая выражения для $\tilde{u}(x)$ и $u(x)$, можно показать, что равенство $\tilde{u}(x) = u(x)$ имеет место только для $\varkappa = 1$. При некоторых $\varkappa$ и ξ имеем $\Delta_0 = 0$ и предельной функции $\tilde{u}(x)$ вообще не существует.

Таким образом, при использовании разностных схем необходимо изучать, в каком классе коэффициентов они дают сходимость.

Пример 2. Рассмотрим первую краевую задачу

$$L^{(k, q, f)} u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = \bar{u}_1, \quad u(1) = \bar{u}_2,$$

для класса дифференциальных уравнений, характеризуемого коэффициентами $k, q, f \in Q^{(0)}$ (т. е. кусочно-непрерывными на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$). Будем предполагать, что $k(x) \geqslant M_1 > 0$, $q(x) \geqslant 0$.

Очевидно, что в промежутке (x_{i-1}, x_{i+1})

$$u(x) = P_i^h(x)\, u_{i-1} + Q_i^h(x)\, u_{i+1} + R_i^h(x),$$

где $P_i^h(x)$ и $Q_i^h(x)$ определяются через решение $u^{(1)}(x)$ и $u^{(2)}(x)$ однородного уравнения

$$L^{(k,q)}u = \frac{d}{dx}\left[k(x), \frac{du}{dx}\right] - q(x)\, u = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u^{(1)}(x_{i-1}) = 0, \quad k_{i-1}u^{(1)}(x_{i-1}) = \frac{1}{h}, \quad u^{(2)}(x_{i+1}) = 0, \quad k_{i+1}u^{(2)}(x_{i+1}) = -\frac{1}{h},^*$$

причем

$$P_i^h(x) = \frac{u^{(2)}(x)}{u^{(2)}(x_{i-1})}, \quad Q_i^h(x) = \frac{u^{(1)}(x)}{u^{(1)}(x_{i+1})}, \quad u^{(1)}(x_{i+1}) \neq 0, \quad u^{(2)}(x_{i-1}) \neq 0$$

$$(q \geqslant 0)$$

и $R_i^h(x)$ определяется через решение $u^{(3)}(x)$ исходного неоднородного уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$, удовлетворяющее условиям

$$u^{(3)}(x_{i-1}) = u^{(3)}(x_{i+1}) = 0, \qquad R_i^h(x) = u^{(3)}(x).$$

Таким образом, точное решение в узлах сетки совпадает с решением разностных уравнений

$$y_i = P_i^h y_{i-1} + Q_i^h y_{i+1} + R_i^h, \quad y_0 = \bar{u}_1, \quad y_N = \bar{u}_2,$$

коэффициенты которых

$$P_i^h = P_i^h(x_i), \quad Q_i^h = Q_i^h(x_i), \quad R_i^h = R_i^h(x_i)$$

являются функционалами от $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$.

Преобразуем условия, определяющие P_i^h, Q_i^h и R_i^h. Преобразование

$$s = \frac{x - x_i}{h}$$

переводит $u^{(1)}(x)$ и $u^{(2)}(x)$ в решения $\bar{u}^{(1)}(s)$ и $\bar{u}^{(2)}(s)$ уравнения

$$\frac{d}{ds}\left(\bar{k}(s)\frac{d\bar{u}}{ds}\right) - h^2\bar{q}(s)\,\bar{u}(s) = 0, \quad -1 \leqslant s \leqslant 1,$$

$$\bar{k}(s) = k(x_i + sh), \quad \bar{q}(s) = q(x_i + sh),$$

удовлетворяющие условиям

$$u^{(1)}(-1) = 0, \quad \bar{k}(-1)\,\bar{u}^{(1)\prime}(-1) = 1, \quad \bar{u}^{(2)}(1) = 0, \quad \bar{k}(1)\,\bar{u}^{(2)\prime}(1) = -1,$$

а $u^{(3)}(x)$ — в решение $\bar{u}^{(3)}(s)$ неоднородного уравнения

$$\frac{d}{ds}\left(\bar{k}(s)\frac{d\bar{u}^{(3)}}{ds}\right) - h^2\bar{q}(s)\,\bar{u}^{(3)}(s) + h^2\bar{f}(s) = 0, \quad \bar{f}(s) = f(x_i + sh),$$

определяемое условиями

$$\bar{u}^{(3)}(-1) = \bar{u}^{(3)}(1) = 0.$$

* Нормировка производной произвольна. Начальные значения производных выбираются для удобства последующих вычислений.

Рассмотрим функционалы

$$P^h[\bar{k}(s),\ \bar{q}(s)] = \frac{\bar{u}^{(2)}(0)}{\bar{u}^{(2)}(-1)},\quad Q^h[\bar{k}(s),\ \bar{q}(s)] = \frac{\bar{u}^{(1)}(0)}{\bar{u}^{(1)}(1)},$$

$$R^h[\bar{k}(s),\ \bar{q}(s),\ \bar{f}(s)] = \bar{u}^{(3)}(0),$$

зависящие от $\bar{k}(s)$, $\bar{q}(s)$, $\bar{f}(s)$.

Точная разностная схема является однородной схемой и определяется характеристическим функционалом

$$\Phi^h = \bar{u}_0 - P^h\bar{u}_{-1} - Q^h\bar{u}_1 - R^h.$$

Однако практически точной схемой не пользуются ввиду сложности определения ее коэффициентов. Для решения рассматриваемой краевой задачи пользуются различными семействами «допустимых» схем, коэффициенты которых вычисляются достаточно просто.

В частности, широко распространены дискретные схемы, определяемые при помощи значений коэффициентов уравнения лишь в узловых точках сетки (например, схема примера 1).

Для построения теории однородных разностных схем надо задать исходное семейство схем, найти функциональный класс коэффициентов дифференциального уравнения, в котором схемы из исходного семейства сходятся, а также выяснить вопросы о точности отдельных схем.

3. Об аппроксимации и точности разностных схем [6]. Рассмотрим класс дифференциальных уравнений $L^{(k)}u = 0$, определенный для $k(x) \in K$, и однородную разностную схему $L_h^{(k)}u^h$, определенную для того же класса коэффициентов.

Пусть

$$\Phi^h[\bar{u},\ \bar{k}(s)]$$

есть производящий функционал схемы $L_h^{(k)}u^h$, определенный на шаблонах $\mathfrak{M}_0\,(-m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ и $\Sigma_0\,(-m_1 \leqslant s \leqslant m_2)$. Пусть $\bar{x}$ — фиксированная точка в области определения оператора $L^{(k)}v$ и $v(x)$ — некоторая функция, заданная в окрестности этой точки. Функция $v(x)$ индуцирует с помощью шаблона

$$\mathfrak{M}_{\bar{x}}^h = \{\bar{x} + mh,\quad m \in \mathfrak{M}_0\} \text{ сеточную функцию}$$

$$\bar{v}_{\bar{x}}^h = \{v(\bar{x} + mh),\quad m \in \mathfrak{M}_0\}$$

на шаблоне $\mathfrak{M}_0$.

Рассмотрим величину

$$L_h^{(k)}\bar{v}_{\bar{x}}^h = \Phi^h[v(\bar{x} + mh),\quad k(\bar{x} + sh)]$$

и разность

$$\varphi(\bar{x},\ v,\ h) = L_h^{(k_0)}\bar{v}_{\bar{x}}^h - (L^{(k_0)}v)_{x=\bar{x}},$$

где $k_0(x)$—некоторый фиксированный коэффициент из класса K; функцию φ назовем погрешностью аппроксимации в точке $\bar{x}$ оператором $L_h^{(k_0)}$ оператора $L^{(k_0)}$ или погрешностью аппроксимации для оператора $L_h^{(k_0)}$.

Будем говорить, что разностный оператор $L_h^{(k_0)}$ в точке $\bar{x}$ при $h \to 0$ имеет n-й порядок аппроксимации относительно дифференциального

оператора $L^{(k_0)}$, если можно указать такое m, что для любой m-кратно дифференцируемой функции $v(x) \in C^{(m)}$ имеет место оценка

$$\varphi(\bar{x}, v, h) = 0(h^n) \quad \text{или} \quad |\varphi(\bar{x}, v, h)| \leqslant Mh^n,$$

где M — константа, зависящая от $\bar{x}$, $v(x)$ и $k_0(x)$).

Будем говорить, что разностная схема $L_h^{(k)}$ в точке $\bar{x}$ имеет n-й порядок аппроксимации относительно $L^{(k)}$ в классе коэффициентов K, если для любого фиксированного коэффициента $k_0(x) \in K$ разностный оператор $L_h^{(k_0)}$ в точке $\bar{x}$ имеет n-й порядок аппроксимации.

Пусть $u(x)$ — решение уравнения

$$L^{(k)}u = 0,$$

удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям $lu = 0$ (задача I), а $u^h = \{u_i^h\}$ — решение разностного уравнения

$$L_h^{(k)} u_i^h = 0$$

с соответствующими дополнительными условиями $l_h u^h = 0$ (задача II).

Разность $z_i^h = u_i^h - u(x_i)$ представляет погрешность, допускаемую при решении исходной задачи; в дальнейшем будем эту разность оценивать по норме $\|z_i^h\|_1 = \max\limits_i |z_i^h|$, где max берется по всем точкам сетки, на которой задана функция z_i^h.

Будем говорить, что решение разностной задачи (II) сходится к решению задачи (I) в классе K, если

$$\|z_i^h\|_1 \leqslant \rho(h) \to 0 \quad \text{при } h \to 0$$

для любого коэффициента $k(x) \in K$.

Если же $\|z_i^n\|_1 = O(h^n)$ или $\|z_i^n\|_1 \leqslant Mh^n$, где M — постоянная, зависящая только от выбора коэффициента $k(x)$, то будем говорить, что задача (II) имеет n-й порядок точности.

Точность разностной задачи зависит как от выбора разностной схемы, так и от выбора разностных краевых условий. Если краевые условия для задач (I) и (II) совпадают (это имеет место, например, для первой краевой задачи; см. п. 4 введения), то точность разностной краевой задачи полностью определяется выбором разностной схемы. В этом случае можно говорить, что «разностная схема сходится», или «разностная схема имеет n-й порядок точности».

Если схема $L_h^{(k)}$ линейна, то для функции z_i^h получается следующее уравнение:

$$L_h^{(k)} z_i^h = -\varphi_i^h, \quad \text{где } \varphi_i^h = L_h^{(k)} u_i - (L^k u)_i$$

— погрешность аппроксимации в точке x_i для разностного оператора $L_h^{(k)}$, взятая на решении $u(x)$ дифференциального уравнения $L^{(k)}u = 0$.

Порядки аппроксимации, рассматриваемые на семействе достаточно гладких функций $v(x) \in C^{(m)}$ и на семействе решений уравнений $L^{(k)}u = 0$, могут быть существенно различными.

Будем говорить, что однородные разностные схемы $\bar{L}_h^{(k)}$ и $\bar{\bar{L}}_h^{(k)}$, определенные в одном и том же классе K, имеют n-й порядок эквивалентности в смысле аппроксимации в точке $x = \bar{x}$, если для любого $k(x) \in K$

$$\varphi(\bar{x}, v; h) = (\bar{L}_h^{(k)} v)_{x=\bar{x}} - (\bar{\bar{L}}_h^{(k)} v)_{x=\bar{x}} = O(h^n),$$

где $v(x)$ — любая достаточно гладкая функция, т. е. $|\varphi(\bar{x}, v; h)| \leqslant Mh^n$, M — константа, зависящая от выбора $k(x)$, $v(x)$ и $\bar{x}$.

Пусть $\bar{y}_i^h$ и $\bar{\bar{y}}_i^h$ — решения уравнений $\bar{L}_h^{(k)}\bar{y}_i^h = 0$ и $\bar{\bar{L}}_h^{(k)}\bar{\bar{y}}_i^h = 0$ с дополнительными условиями $\bar{l}_h^{(k)}\bar{y}^h = 0$ и $\bar{\bar{l}}_h^{(k)}y^h = 0$ (задачи II′ и II″).

Будем говорить, что разностные краевые задачи (II′) и (II″) имеют n-й порядок эквивалентности в классе K, если для любого $k(x) \in K$

$$\|\tilde{y}_i^h - y_i^h\|_1 \leqslant Mh^n,$$

где M — константа, зависящая от выбора $k(x)$ и не зависящая от h.

Очевидно, что при изучении разностных задач их можно заменять эквивалентными задачами и в классе эквивалентных задач выбирать разностные схемы наиболее простой структуры.

4. Основные результаты работы. В данной статье мы проводим изучение однородных схем для решения первой краевой задачи

$$L^{(k,q,f)}u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u + f(x) = 0 \quad (0 < x < 1),$$
$$u(0) = \bar{u}_1, \qquad u(1) = \bar{u}_2, \tag{I}$$

коэффициенты которой k, q, f являются кусочно-непрерывными функциями ($k, q, f \in Q^{(0)}$), причем $k(x) \geqslant M > 0$, $q(x) \geqslant 0$.

В § 1 в качестве исходного семейства разностных схем мы рассматриваем трехточечные однородные разностные схемы $L_h^{(k,q,f)}$, характеризуемые линейным производящим функционалом

$$\Phi^h[\bar{u}(m), \bar{k}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s)] = \frac{1}{h^2}[B^{(h,\bar{k})}(\bar{u}_1 - \bar{u}_0) - A^{(h,\bar{k})}(\bar{u}_0 - \bar{u}_{-1})] -$$
$$- D^{(h,\bar{q})}\bar{u}_0 + F^{(h,\bar{f})},$$

каждый из коэффициентов которого является функционалом только одного коэффициента дифференциального уравнения (I):

$$\left.\begin{aligned} A^{(h,k)} &= A^h[\bar{k}(s)], \quad B^{(h,\bar{k})} = B^h[\bar{k}(s)], \\ D^{(h,\bar{q})} &= D^h[\bar{q}(s)], \quad F^{(h,\bar{f})} = F^h[\bar{f}(s)] \end{aligned}\right\}, \quad -1 \leqslant s \leqslant 1.$$

При этом D^h и F^h — линейные функционалы. Такие схемы обычно применяются на практике, и мы их назовем стандартными схемами.

Одной из характеристик качества схемы является ее погрешность аппроксимации

$$\varphi(\bar{x}, u; h) = (L_h^{(k,q,f)}u)_{x=\bar{x}} - (L^{(k,q,f)}u)_{x=\bar{x}},$$

где $u(x)$ — решение уравнения (I).

Для выяснения порядка аппроксимации при $h \to 0$ необходимо функцию $\varphi(\bar{x}, u; h)$ разложить по параметру h и вычислить коэффициенты при степенях h до r-го порядка. Такое разложение возможно, если шаблонные функционалы A^h, B^h, D^h и F^h имеют производные соответствующего порядка как по параметру h, так и по своему функциональному аргументу.

Вводится определение ранга функционала, включающее, кроме требований дифференцируемости, требования однородности, монотонности и нормировки.

Опираясь на понятие ранга шаблонных функционалов, мы рассматриваем различные классы $\mathscr{L}(n_1, n_2, n_3)$ схем, у которых функционалы A^h и B^h имеют ранг n_1, функционалы D^h и F^h имеют ранги n_2, n_3 и определены на отрезке $-0{,}5 \leqslant s \leqslant 0{,}5$.

Если $n_1 = n_2 = n_3 = n$, то мы говорим, что $L_h^{(k,q,f)}$ является схемой n-го ранга.

Рассматриваются специальные семейства схем: консервативные, или самосопряженные $(B^h[\bar{k}(s)] = A^h[\bar{k}(1+s)])$, дискретные и канонические схемы, шаблонные функционалы которых не зависят от параметра h.

Выяснив необходимые и достаточные условия n-го порядка аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ $(n = 1, 2)$, которые формулируются в виде ряда соотношений (У. А. n) для моментов функционалов схемы, мы переходим в § 2 к изучению вопросов сходимости и точности исходных схем в некотором классе гладких коэффициентов $C^{(m)}$.* Доказано, что для того, чтобы исходная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathscr{L}(n+1, n, n)$ для коэффициентов $k(x) \in C^{(m_k)}$, $m_k \geqslant n+1$, $q(x) \in C^{(m_q)}$, $m_q \geqslant n$; $f(x) \in C^{(m_f)}$, $m_f \geqslant n$, имела n-й порядок точности, не только достаточно, но и необходимо, чтобы она имела такой же порядок аппроксимации (теорема 1).

Для доказательства этой теоремы используется аппарат разностной функции Грина оператора $L_h^{(k,q)}$. В п. 2 дано построение функции Грина, а в п. 3 даются равномерные оценки снизу и сверху для функции Грина, а также для ее первых разностных отношений.

Отметим, что при изучении сходимости и точности схем в классе гладких коэффициентов мы пользуемся нормой

$$\|\psi\|_1 = \max_{0<i<N} |\psi_i|,$$

а в классе разрывных коэффициентов — нормами

$$\|\psi\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} |\psi_i| h \text{ и } \|\psi\|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^{i} \psi_s h \right|.$$

Если в классе $C^{(m)}$ порядок точности схемы $L_h^{(k,q,f)}$ совпадает с порядком аппроксимации, то в классе разрывных коэффициентов такой связи нет. Достаточно вспомнить разобранный выше пример 1. Указанная там схема имеет второй порядок аппроксимации (как это нетрудно проверить) и, следовательно, имеет второй порядок точности в классе $C^{(m)}$ $(m \geqslant 3)$ и тем не менее расходится в классе разрывных коэффициентов $k(x) \in Q^m$ (при любом $m \geqslant 0$).

Исследование функции $\varphi(\bar{x}, u; h)$ в точках сетки, смежных с точкой разрыва ξ $(x_n \leqslant \xi \leqslant x_{n+1})$ коэффициента $k(x)$, показывает, что погрешность аппроксимации φ_n^h и φ_{n+1}^h при $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$, вообще говоря, стремится к бесконечности при $h \to 0$. Однако это не исключает возможности сходимости решения разностного уравнения к решению уравнения (I). Возникает вопрос: какими свойствами должна обладать схема $L_h^{(k,q,f)}$ для сходимости в классе $Q^{(m)}$?

* Обозначения C^m и Q^m см. в п. 1, § 1.

В § 3 доказывается основная лемма, дающая необходимое условие, которому должна удовлетворять схема $L_h^{(k,q,f)}$ для сходимости в классе $Q^{(m)}$. Это условие имеет вид

$$\Delta(\xi, h) = h(B_n^h \varphi_{n+1}^h + A_{n+1}^h \varphi_n^h) = \rho(h) \to 0 \tag{б}$$

или

$$\frac{B_n^h B_{n+1}^h}{k_{\text{п}}} - \frac{A_n^h A_{n+1}^h}{k_{\text{л}}} = \rho(h) \to 0 \text{ при } h \to 0, \tag{б'}$$

где $k_{\text{л}} = k(\xi - 0)$, $k_{\text{п}} = k(\xi + 0)$.

Если мы хотим, чтобы схема $L_h^{(k,q,f)}$ в $Q^{(m)}$ имела 2-й порядок точности, то необходимо удовлетворить двум условиям:

$$h^2 \varphi_n^h = O(h^2), \quad h^2 \varphi_{n+1}^h = O(h^2), \tag{а$_2$}$$

$$\Delta(\xi, h) = O(h^2). \tag{б$_2$}$$

Следует отметить, что любая консервативная схема нулевого ранга удовлетворяет необходимому условию сходимости.

Доказано, что условие (б) является для схемы типа $\mathcal{L}(1, 0, 0)$ не только необходимым, но и достаточным для сходимости схемы $L_h^{(k,q,f)}$ в классе коэффициентов $k(x) \in Q^{(1)}$, $q, f \in Q^{(0)}$ (теорема 3, § 3).

При вычислении коэффициентов разностной схемы, вообще говоря, всегда допускается некоторая погрешность. Это может происходить из-за недостаточной информации о коэффициентах k, q, f уравнения (I): например, функции $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ могут определяться приближенно (с помощью некоторого вычислительного алгоритма) на дискретном множестве точек. Кроме того, может оказаться, что шаблонные функционалы схемы вычисляются приближенно.

Отсюда ясно, насколько важной является задача изучения схем с возмущенными коэффициентами.

В § 4 вводится норма возмущения коэффициентов схемы и с ее помощью дается определение коэффициенто-устойчивой (ко-устойчивой) разностной схемы. При малом искажении коэффициентов схемы «возмущенная» схема должна сходиться при $h \to 0$ в $Q^{(m)}$, т. е. $\|\tilde{y} - u\|_1 = \rho(h) \to 0$ при $h \to 0$, если

$$\|\tilde{A}^h - A^h\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{A}_i^h - A_i^h| h = \rho(h), \quad \|\tilde{B}^h - B^h\|_3 = \rho(h);$$

$$\|\tilde{D}^h - D^h\|_3 = \rho(h), \quad \|\tilde{F}^h - F^h\|_3 = \rho(h),$$

(все $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$), где $\tilde{y}_i$ — решение разностной краевой задачи с возмущенными коэффициентами $\tilde{A}_i^h$, $\tilde{B}_i^h$, $\tilde{D}_i^h$, $\tilde{F}_i^h$, а $u(x)$ — решение задачи (I)).

Доказано, что необходимым и достаточным условием коэффициенто-устойчивости канонической схемы является ее консервативность. В последующих параграфах мы занимаемся изучением только консервативных схем.

В § 5 проводится изучение вопросов сходимости и точности консервативных разностных схем. Доказано, что консервативная схема нуле-

вого ранга сходится в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $(k, q, f \in Q^{(0)})$; любая консервативная схема первого ранга имеет в классе коэффициентов $Q^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$ первый порядок точности; любая консервативная схема $L_h^{(k, q, f)}$ второго ранга, удовлетворяющая условиям второго порядка аппроксимации (У. А. 2), имеет в классе $C^{(2)}$ второй порядок точности, а в классе Q^m (при любом $m \geqslant 1$), вообще говоря, первый порядок точности.

Следует отметить, что для доказательства указанных теорем о сходимости и точности разностных схем использовалась установленная в § 2 априорная оценка

$$\|z\|_1 \leqslant M \|\varphi\|_2,$$

где z — погрешность решения разностной краевой задачи, а φ — погрешность аппроксимации схемы $L_h^{(k, q, f)}$ на решении задачи (I).

Оценка погрешности аппроксимации φ по норме $\|\ \|_2$ позволяет, кроме того, снизить ранг шаблонных функционалов и порядок m классов $C^{(m)}$ или $Q^{(m)}$ коэффициентов уравнения (I).

Таким образом, перечисленные результаты дают ответ на поставленный выше вопрос о выделении схем сквозного счета, пригодных для решения краевых задач для уравнения (I) в классе $Q^{(m)}$ $(m \geqslant 0)$ разрывных коэффициентов без явного выделения при этом точек разрыва. Как показано, схемы сквозного счета принадлежат к семейству консервативных разностных схем.

Полученные в данной работе результаты используются для построения разностных схем сквозного счета при решении уравнений параболического типа с разрывными коэффициентами (см. [20]).

В заключение укажем несколько вопросов, выходящих за рамки настоящей статьи. Результаты данной работы без существенных изменений переносятся на класс краевых задач, соответствующих граничным условиям третьего рода. Мы не рассматриваем здесь весьма важных вопросов о схемах второго порядка точности в классе разрывных коэффициентов, о наилучшей канонической схеме второго порядка точности, о точности разностных методов решения задачи Штурма — Лиувилля в классе разрывных коэффициентов, а также об однородных разностных схемах на неравномерных сетках.

Проведенные здесь исследования ставят также ряд аналогичных вопросов для случая многих независимых переменных. Эти вопросы будут рассмотрены в последующих статьях.

§ 1. Исходное семейство разностных схем

В § 1 дается характеристика семейств разностных схем для дифференциального уравнения (I) в классе $Q^{(0)}$ кусочно-непрерывных коэффициентов. Рассматриваются различные схемы из этого семейства: канонические, дискретные и консервативные, имеющие большое значение для последующей теории.

1. Краевая задача для дифференциального уравнения. Выяснение поставленных во введении вопросов для однородных разностных схем мы

будем проводить на примере обыкновенного дифференциального уравнения

$$L^{(k,q,f)}u = L^{(k)}u - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

где $L^{(k)}u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right]$.

Все изложение проведем для первой краевой задачи

$$L^{(k,q,f)}u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \bar{u}_1, \quad u(1) = \bar{u}_2(1). \tag{I}$$

Класс краевых задач (I) определен, если указаны семейства функций, которым принадлежат коэффициенты уравнения $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$.

Обозначим $C^{(n)}[a, b]$ — класс функций, имеющих на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ непрерывную n-ю производную, а $Q^{(n)}[a, b]$ — класс функций, кусочно-непрерывных на отрезке $[a, b]$ вместе с производными до n-го порядка включительно. Для класса функций $C^{(n)}[0, 1]$ ($Q^{(n)}$ $[0,1]$) мы будем пользоваться обозначением $C^{(n)}(Q^{(n)})$.

В дальнейшем всюду предполагается, что коэффициенты уравнения (I) удовлетворяют условиям

$$0 < M_1 \leqslant k(x) \leqslant M_2, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant M_3, \quad |f(x)| \leqslant M_4, \tag{α}$$

где M_j ($j = 1, 2, 3, 4$) — положительные постоянные. Условия (α) мы включаем в постановку задачи (I).

Нам понадобятся следующие свойства решения задачи (I): 1) если $k(x) \in C^{(r+1)}$, $q(x) \in C^{(r)}$, $f(x) \in C^{(r)}$, то $u(x) \in C^{(r+2)}(r \geqslant 0)$; 2) если $k(x) \in Q^{(m)}$ $(m \geqslant 0)$ и в точке $x = \xi$ имеет разрыв ($k_л \neq k_п$, где $k_л = k(\xi - 0)$, $k_п = k(\xi + 0)$), то решение уравнения (1) удовлетворяет условиям сопряжения $u(\xi - 0) = u(\xi + 0) = u(\xi)$, $k_л u'_л = k_п u'_п$, или $[u] = 0$, $[ku'] = 0$ при $x = \xi$.

2. Исходное семейство однородных разностных схем. Рассмотрим на $0 \leqslant x \leqslant 1$ сетку $S_h = \{x_0 = 0, x_1 = h, \ldots, x_i = ih, \ldots, x_N = Nh = 1\}$ и обозначим через y_i сетчатую функцию.

Краевой задаче (I) поставим в соответствие разностную краевую задачу

$$L_h^{(k,q,f)}y_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \bar{u}_1, \quad y_N = \bar{u}_2, \tag{II}$$

где $L_h^{(k,q,f)}$ — однородная стандартная трехточечная разностная схема, определяемая формулами

$$L_h^{(k,q,f)}y_i = L_h^{(k)}y_i - D_i^{(h,q)}y_i + F_i^{(h,f)}, \tag{2}$$

$$L_h^{(k)}y_i = \frac{1}{h^2}[B_i^{(h,k)}\Delta y_i - A_i^{(h,k)}\nabla y_i] \quad (\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1}). \tag{3}$$

Особенность рассматриваемых нами схем состоит в том, что каждый из коэффициентов разностной схемы $L_h^{(k,q,f)}$ является функционалом только одного коэффициента дифференциального уравнения (1). Мы предполагаем, что стандартная трехточечная разностная схема однородна. Это значит, что она имеет производящий функционал вида

$$\Phi^h[\bar{v}(m), \bar{k}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s)] = \frac{1}{h^2}[B^{(\bar{h},k)}\Delta\bar{v}_0 - A^{(\bar{h},k)}\nabla\bar{v}_0] - D^{(h,\bar{q})}\bar{v}_0 + F^{(h,\bar{f})}, \tag{4}$$

где

$$m = -1, 0, 1,$$
$$A^{(h,\bar{k})} = A^h[\bar{k}(s)], \quad B^{(h,\bar{k})} = B^h[\bar{k}(s)],$$
$$D^{(h,\bar{q})} = D^h[\bar{q}(s)], \quad F^{(h,\bar{f})} = F^h[\bar{f}(s)], \tag{5}$$

причем шаблонные функционалы $A^h[\psi(s)]$, $B^h[\psi(s)]$, $D^h[\psi(s)]$, $F^h[\psi(s)]$ определены для кусочно-непрерывных функций $\psi(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$, заданных для $-1 \leqslant s \leqslant 1$, и зависят, вообще говоря, от параметра h.

Коэффициенты разностной схемы в каждой точке вычисляются по формулам

$$A_i^{(h,k)} = A^h[\bar{k}_i(s)], \quad B_i^{(h,k)} = B^h[\bar{k}_i(s)], \quad k_i(s) = k(x_i + sh), \tag{6}$$

$$D_i^{(h,q)} = D^h[\bar{q}_i(s)], \quad \bar{q}_i(s) = q(x_i + sh); \quad F_i^{(h,f)} = F^h[\bar{f}_i(s)], \quad \bar{f}_i(s) = f(x_i + sh)$$

где $f_i(s) = f(x_i + sh)$.

В соответствии с определением однородной схемы имеем

$$L_h^{(k,q,f)} v_i = \Phi^h[v(x_i + mh), \quad k(x_i + sh), \quad q(x_i + sh), \quad f(x_i + sh)], \tag{7}$$

где $m = -1, 0, 1, \ -1 \leqslant s \leqslant 1$.

Следует отметить, что трехточечность рассматриваемой разностной схемы является следствием ее однородности.

Разностная краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$. Нетрудно убедиться (см. § 2) в том, что эта задача всегда разрешима, если во всех точках $i = 1, 2, \ldots, N-1$ выполнены условия

$$A_i^{(h,k)} > 0, \quad B_i^{(h,k)} > 0, \quad D_i^{(h,q)} \geqslant 0.$$

В дальнейшем, говоря «исходное семейство разностных схем», мы имеем в виду однородные трехточечные стандартные схемы, определяемые формулами (2), (3), (6).

3. Функционалы r-го ранга. Для более детальной характеристики исходного семейства разностных схем надо задать класс ее «шаблонных» функционалов A^h, B^h, D^h и F^h. В дальнейшем нам потребуется разложение коэффициентов схемы (например, $A_i^{(h,k)} = A^h[k(x_i + sh)]$) по степеням h, что оказывается возможным, если сами шаблонные функционалы обладают некоторыми свойствами дифференцируемости как по своему функциональному аргументу, так и по параметру h.

Будем называть $A^h[\psi]$ функционалом r-го ранга ($r \geqslant 0$), если выполнены условия:

I.$^{(r)}$ Имеет место разложение

$$A^h[\psi] = \sum_{\sigma=0}^{r} h^\sigma A^{(\sigma)}[\psi] + h^r \rho(h, \psi), \tag{8}$$

где $|\rho(h, \psi)| \leqslant \rho(h)$ *, если $|\psi| \leqslant M$ (M — положительная постоянная).

* В дальнейшем будем обозначать $\rho(h)$ величины, стремящиеся к нулю при $h \to 0$. Этим же символом мы будем пользоваться и в случае нескольких аргументов для обозначения выражения, равномерно стремящегося к нулю при $h \to 0$.

Каждый из функционалов $A^{(\sigma)}[\psi]$ $(\sigma = 0, 1, 2, \ldots, r)$ имеет дифференциал* порядка $r - \sigma$ для любой функции $\psi \in Q^{(0)}$; это означает, например, что для $A^{(0)}[\psi]$ можно написать

$$A^{(0)}[\psi + \delta \cdot \varphi] = A^{(0)}[\psi] + \delta \cdot A_1^{(0)}[\psi, \varphi] + \ldots + \delta^r A_r^{(0)}[\psi, \varphi] + \delta^r \rho(\delta, \psi, \varphi), \quad (9)$$

где $|\rho| \leqslant \rho(\delta)$, если $|\varphi| \leqslant M$ $(\rho(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0)$.

II.$^{(r)}$ Функционал $A^h[\psi]$ и, следовательно, все функционалы $A^{(\sigma)}[\psi]$ $(\sigma = 0, 1, \ldots, r)$ являются однородными функционалами первой степени:

$$A^h[c\psi] = cA^h[\psi], \quad A^{(\sigma)}[c\psi] = cA^{(\sigma)}[\psi], \quad (10)$$

где c — положительная постоянная.

III.^{r} Функционалы $A^h[\psi]$ и $A^{(\sigma)}[\psi]$ $(\sigma = 0, 1, \ldots, r)$ являются неубывающими, т. е.

$$A^h[\psi_2] \geqslant A^h[\psi_1], \text{ если } \psi_2 \geqslant \psi_1, \quad (11)$$

причем $A^h[\psi]$ — нормированный функционал, т. е.

$$A^h[1] = 1. \quad (12)$$

Если $A^h[\psi]$ — линейный функционал, то все функционалы $A^{(\sigma)}[\psi]$ также линейны. Поэтому требование дифференцируемости в условии I$^{(r)}$ выполняется автоматически. Кроме того, условие II$^{(r)}$ является непосредственным следствием линейности.

Если $A^h[\psi]$ — функционал r-го ранга, то

$$A^{(0)}[1] = 1, \quad A^{(\sigma)}[1] = 0 \text{ для } \sigma = 1, 2, \ldots, r. \quad (13)$$

В дальнейшем мы пользуемся обозначением

$$A_m^{(\sigma)}[\varphi] = A_m^{(\sigma)}[1, \varphi] \quad (\psi \equiv 1). \quad (14)$$

Пусть $A^h[\psi]$ — функционал r-го ранга. На основании (I$^{(r)}$) и (II$^{(r)}$), для любой $k(x) \in C^{(r)}$, удовлетворяющей условию $k(x) \geqslant M_1 > 0$, имеет место разложение

$$A_i^{(h,k)} = A^h[k(x_i + sh)] = k_i + hk_i' A_1^{(0)}[s] + h^2 \left\{ k_i' A_1^{(1)}[s] + \right.$$
$$\left. + \frac{(k_i')^2}{k_i} A_2^{(0)}[s] + \frac{k_i''}{2} A_1^{(0)}[s^2] \right\} + \ldots + h^r \rho(h). \quad (15)$$

В самом деле, в силу II$^{(r)}$

$$A_i^{(h,k)} = A^h\left[k_i\left(1 + \frac{k(x_i + sh) - k_i}{k_i}\right)\right] =$$
$$= k_i A^h\left[1 + \frac{h}{k_i}\left(k_i' s + \frac{k_i'' s^2}{2} h + \ldots + h^{r-1} \rho(h)\right)\right]. \quad (16)$$

Пользуясь теперь разложениями I$^{(r)}$ и учитывая также свойства линейного $A_1^{(0)}[\psi]$, квадратичного $A_2^{(0)}[\psi]$ и т. д. функционалов, приходим к формуле (15).

Отметим некоторые свойства однородных функционалов первой степени, опуская доказательства.

* См. М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник. «Основы вариационного исчисления». Т. I, ч. II. М.— Л., 1935, гл. VI.

Лемма 1. *Любой однородный функционал* $A[\psi]$ *первой степени, имеющий дифференциал первого порядка* $A_1[f, \varphi]$, *можно представить в виде*

$$A[f] = A_1[f, f].$$

Эта лемма является аналогом известной теоремы Эйлера об однородных функциях.

Лемма 2. *Если* $A[f]$ — *однородный функционал первой степени, а* $A_k[f_1\varphi]$ — *его дифференциал* k*-го порядка, то*

$$A_k[cf, \varphi] = \frac{1}{c^{k-1}} A_k[f_1\varphi], \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где c — *любая положительная постоянная. В частности,* $A_1[cf_1\varphi]$ *не зависит от* c:

$$A_1[cf, \varphi] = A_1[f, \varphi].$$

Лемма 3. *Дифференциал* $A_1[f, \varphi]$ *неубывающего нормированного однородного функционала первой степени* $A[f]$ *является линейным положительным функционалом по аргументу* φ.

Лемма 4. *Если* $A[f]$ — *неубывающий нормированный однородный функционал первой степени, имеющий дифференциал первого порядка, то*

$$0 \leqslant \frac{A_1[f, \varphi]}{A[f]} \leqslant 1, \text{ если } 0 \leqslant \varphi \leqslant f, \ f \geqslant \varepsilon > 0. \tag{18}$$

Эти леммы будут использованы в дальнейшем (например, в § 4, § 6 и др.).

4. Классы разностных схем $\mathscr{L}(n_1, n_2, n_3)$. Рассмотрим разностную краевую задачу (II) и сравним ее решение y_i^h с решением $u(x)$ задачи (I). Характеристикой точности решения задачи (II) является разность

$$z_i^h = y_i^h - u(x_i), \tag{19}$$

которая, как нетрудно заметить, определяется условиями

$$L_h^{(k, q)} z_i^h = -\varphi_i^h, \quad 0 < i < N, \quad z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0, \tag{III}$$

где

$$L_h^{(k, q)} z_i^h = L_h^{(k)} z_i^h - D_i^{(h, q)} z_i^h, \tag{20}$$

$$\varphi_i^h = L_h^{(k, q, f)} u_i - (L^{(k, q, f)} u)_i \tag{21}$$

обозначает погрешность аппроксимации схемы $L_h^{(k, q, f)}$ в узловой точке $x = x_i$ сетки S_h, взятую на решении $u(x)$ задачи (I).

В силу однородности схемы погрешность аппроксимации можно рассматривать в любой фиксированной точке $x = \bar{x}$ интервала $0 < x < 1$:

$$\varphi(x, v; h) = (L_h^{(k, q, f)} v)_{x=\bar{x}} - (L^{(k, q, f)} v)_{x=\bar{x}},$$

где $v(x)$ — любая достаточно гладкая функция $h \leqslant h_0 < 1$, h_0 — расстояние от точки $x = \bar{x}$ до границы отрезка $[0, 1]$.

Для выяснения вопроса о порядке аппроксимации схемы необходимо иметь разложение функции $\varphi(x, v; h)$ в ряд по степеням h. Для этого мы должны формулировать свойства дифференцируемости шаблонных функционалов, пользуясь определением ранга функционала.

Будем говорить, что разностная схема $L_h^{(k, q, f)}$ из исходного семейства принадлежит классу схем $\mathscr{L}(n_1, n_2, n_3)$, если функционалы $B^h[\psi]$ и $A^h[\psi]$

имеют ранг n_1, а функционалы $D^h[\psi(s)]$ и $F^h[\psi(s)]$ соответственно имеют ранг n_2, ранг n_3, линейны и определены для функций из $Q^{(0)}$, заданных на отрезке $-0{,}5 \leqslant s \leqslant 0{,}5$ $(\psi \in Q^{(0)}[-0{,}5,\ 0{,}5])$.

Аналогично определяются классы $\mathscr{L}(n_1)$ и $\mathscr{L}(n_1, n_2)$ для схем $L_h^{(k)}$ и $L_h^{(k,q)}$ соответственно.

Схемы $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathscr{L}(n_1, n_2, n_3)$ будем называть схемами n-го ранга (все шаблонные функционалы имеют ранг n). Схемой n-го ранга является любая схема $L_h^{(k)}$ из $\mathscr{L}(n)$.

5. Погрешность аппроксимации. Перейдем к вычислению погрешности аппроксимации для схем из класса $\mathscr{L}(n_1, n_2, n_3)$ (обычно $n_2 = n_3$).

Рассмотрим схему $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathscr{L}(n+1, n, n)$ и предположим, что $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x) \in C^{(n)}$, $f(x) \in C^{(n)}$, а функция $v(x) \in C^{(n+2)}$, где $n \geqslant 0$; решение $u(x)$ уравнения (1), в частности, принадлежит $C^{(n+2)}$, если k, q, f удовлетворяют указанным выше требованиям (см. п. 1); поэтому можно брать $v = u(x)$.

Воспользуемся разложениями $A_i^{(h,k)}$ и $B_i^{(h,k)}$ по формуле (15) для $r = n+1$, а для $D_i^{(h,q)}$ (и $F_i^{(h,f)}$)— разложением по h:

$$D_i^{(h,q)} = D^h[q(x_i + sh)] = \sum_{\sigma=0}^{n} D_i^{(\sigma)}[q(x_i + sh)]\, h^\sigma + h^n \rho(h) =$$
$$= q_i + hq_i' D^{(0)}[s] + \ldots + h^n \rho(h). \tag{22}$$

Учитывая затем разложение функции $v(x)$ в окрестности точки $x = \bar{x}$

$$v(\bar{x} + sh) = v(\bar{x}) + shv'(\bar{x}) + \ldots + \frac{(sh)^{n+2}}{(n+2)!} v^{(n+2)}(\bar{x}) + h^{n+2}\rho(h),$$

получим

$$\varphi(x,\ v;\ h)|_{x=\bar{x}} = \varphi^{(0)} + h\varphi^{(1)} + \ldots + h^n\varphi^{(n)} + h^n\rho(h). \tag{23}$$

Коэффициенты $\varphi^{(j)} = \varphi^{(j)}(x, v)|_{x=\bar{x}}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ при степенях h^j зависят от функций v, k, q, f и их производных. В дальнейшем нам понадобятся выражения для $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$:

$$\varphi^{(0)} = a_0 k'(\bar{x})\, v'(\bar{x}), \tag{24}$$

$$\varphi^{(1)} = a_1 k'(\bar{x})\, v'(\bar{x}) + a_2 \frac{(k'(\bar{x}))^2}{k(\bar{x})} v'(\bar{x}) + a_3 k''(\bar{x})\, v(\bar{x}) + a_4 k(\bar{x})\, v''(\bar{x}) +$$
$$+ b_1 q'(\bar{x})\, v(\bar{x}) + c_1 f'(\bar{x}), \tag{25}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = B_1^{(0)}[s] - A_1^{(0)}[s] - 1, \quad a_1 = B_1^{(1)}[s] - A_1^{(1)}[s], \\ &a_2 = B_2^{(0)}[s] - A_2^{(0)}[s], \quad a_3 = 0{,}5\,(B_1^{(0)}[s^2] - A_1^{(0)}[s^2]), \\ &a_4 = 0{,}5\,(B_1^{(0)}[s] + A_1^{(0)}[s]), \quad b_1 = -D^{(0)}[s], \quad c = F^{(0)}[s]. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

6. Порядок аппроксимации. Будем говорить, что однородная разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$ имеет n-й порядок аппроксимации, если погрешность аппроксимации

$$\varphi(\bar{x},\ v;\ h) = (L_h^{(k,q,f)} v)_{x=\bar{x}} - (L^{(k,q,f)})_{x=\bar{x}}$$

для этой схемы имеет n-й порядок малости по h:

$$\varphi(\bar{x}, v; h) = O(h^n)$$

для достаточно гладких функций $v(x)$, $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ (а именно, $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x) \in C^{(n)}$, $f(x) \in C^{(n)}$, $v(x) \in C^{(m)}$, $m \geqslant n+2$).

Из разложения (23) следует, что для того чтобы схема $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ имела n-й ($n = 1, 2$) порядок аппроксимации, необходимо и достаточно выполнение следующих условий аппроксимации (У. А.) для моментов шаблонных функционалов:

1) для схемы первого порядка ($n = 1$)

$$B_1^{(0)}[s] - A_1^{(0)}[s] = 1, \quad B^{(0)}[1] = A^{(0)}[1] = D^{(0)}[1] = F^{(0)}[1] = 1 \quad \text{(У. А. 1)}$$

(условия нормировки шаблонных функционалов выполнены автоматически для схем рассматриваемого класса);

2) для схемы 2-го порядка ($n = 2$)

$$\left.\begin{aligned} &B_1^{(0)}[s] = 0{,}5, \quad A_1^{(0)}[s] = -0{,}5, \quad B_1^{(0)}[s^2] = A_1^{(0)}[s^2], \\ &B_2^{(0)}[s] = A_2^{(0)}[s], \\ &B_1^{(1)}[s] = A_1^{(1)}[s], \quad D^{(0)}[s] = F^{(1)}[s] = 0, \\ &A_1^{(1)}[1] = B_1^{(1)}[1] = D^{(1)}[1] = F^{(1)}[1] = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(У. А. 2)}$$

(последние 4 условия являются следствием нормировки шаблонных функционалов).

7. Канонические схемы. Если шаблонные функционалы схемы $L_h^{(k,q,f)}$ не зависят от параметра h, то такие функционалы мы назовем каноническими, а схему $L_h^{(k,q,f)}$ — канонической схемой.

Каждой схеме $L_h^{(k,q,f)}$ исходного типа соответствует каноническая схема $\bar{L}_h^{(k,q,f)}$ того же ранга

$$\bar{L}_h^{(k,q,f)} y_i = \bar{L}_h^{(k)} y_i - D_i^{(0,q)} \cdot y_i + F_0^{(0,f)},$$

где

$$\bar{L}_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2}[B_i^{(0,k)} \Delta y_i - A_i^{(0,k)} \nabla y_i],$$

$$B_i^{(0,k)} = B^{(0)}[k(x_i + sh)], \quad A_i^{(0,k)} = A^{(0)}[k(x_i + sh)],$$

$$D_i^{(0,q)} = D^{(0)}[q(x_i + sh)], \quad F_i^{(0,f)} = F^{(0)}[f(x_i + sh)].$$

Если $L_h^{(k,q,f)}$ имеет n-й ($n = 1, 2$) порядок аппроксимации, то и $\bar{L}_h^{(k,q,f)}$ (в силу (У. А. 1) и (У. А. 2)) имеет тот же порядок аппроксимации и эти схемы эквивалентны в смысле аппроксимации.

В дальнейшем при изучении канонических схем мы будем опускать индекс нуль у ее шаблонных функционалов $A[\psi]$, $B[\psi]$, $D[\psi]$ и $F[\psi]$. Тогда условия, например, второго порядка аппроксимации примут вид:

$$B_1[s] = -A_1[s] = 0{,}5, \quad B_1[s^2] = A_1[s^2], \quad D[s] = F[s] = 0. \quad \text{(У. А. 2}^{(0)}\text{)}$$

8. Консервативные разностные схемы. Рассмотрим разностную схему $L_h^{(k)} = L_h^{(k,0,0)}$. Фиксируя $k(x)$, получим разностный оператор

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2}[B_i \Delta y_i - A_i \nabla y_i], \quad 0 < i < N.$$

По аналогии с дифференциальным оператором второго порядка, назовем разностный оператор L_h самосопряженным, если выражение $u_iL_hv_i - v_iL_hu_i$ можно представить для любых u_i, v_i в каждой точке i в виде некоторой разности $\Delta Q_i = Q_{i+1} - Q_i$. Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием самосопряженности разностного оператора L_h является соотношение $B_i = A_{i+1}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant N-1$, так что можно написать

$$L_hy_i = \frac{1}{h^2}\Delta(A_i\nabla y_i) \quad \text{или} \quad L_hy_i = \frac{1}{h^2}\Delta(A_i\Delta y_{i-1}). \tag{27}$$

При этом имеет место тождество

$$u_iL_hv_i - v_iL_hu_i = \frac{1}{h^2}\Delta[A_i(u_{i-1}v_i - u_iv_{i-1})],$$

где u_i и v_i — произвольные сеточные функции.

Отсюда сразу следует вторая разностная формула Грина

$$\sum_{i=1}^{N-1}(u_iL_hv_i - v_iL_hu_i)h = \frac{1}{h}(A_i(u_{i-1}v_i - v_{i-1}u_i)\Big|_1^N.$$

Разностный оператор (27) мы называем консервативным оператором. Этот термин отражает физическое содержание разностного уравнения $L_hy_i = -F_i$, которое можно трактовать как уравнение для стационарного распределения температуры y_i при наличии источников тепла.

Вводя разностный аналог теплового потока $w_i = -A_i\nabla y_i/h$ в точке $x = x_{i-1/2}$ и переписывая уравнение $L_hy_i = -F_i$ в виде

$$w_{i+1} - w_i = -F_ih,$$

видим, что оно выражает закон сохранения тепла на интервале $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ длиной h. Слева — разность потоков тепла на концах интервала, а справа — количество тепла, выделяющегося на интервале за счет источников.

Обратимся теперь к разностной схеме

$$L_h^{(k)}y_i = \frac{1}{h^2}(B_i^{(h,k)}\Delta y_i - A_i^{(h,k)}\nabla y_i).$$

Разностную схему $L_h^{(k)}$ будем называть консервативной, если для любой функции $k(x) \in Q^{(0)}$ соответствующий разностный оператор консервативен, т. е.

$$B_i^{(h,k)} = A_{i+1}^{(h,k)}$$

и, следовательно,

$$B^h[\psi(s)] = A^h[\psi(1+s)] \quad (\psi(s) \in Q^{(0)}).$$

Отсюда следует, что функционал $A^h[\psi(s)]$ не зависит от значений функции $\psi(s)$ при $0 < s \leqslant 1$, а функционал $B^h[\psi(s)]$ не зависит от значений $\psi(s)$ при $-1 \leqslant s < 0$.

Если схема $L_h^{(k)}$ консервативна, то, очевидно, и соответствующая ей каноническая схема консервативна.

Разностную схему $L_h^{(k,q,f)}$ будем называть консервативной, если консервативна схема $L_h^{(k)}$.

Для получения разностных схем при решении различных физических задач может быть применен следующий метод, который мы называем интегро-интерполяционным методом (ИИМ). Вместо дифференциального уравнения пишется интегральное соотношение, выражающее закон сохранения (баланс) для элементарной ячейки сетки. Для замены входящих в уравнение баланса производных и интегралов искомая функция и коэффициенты интерполируются в окрестности счетного узла. В результате получается разностное уравнение, коэффициенты которого существенно зависят от характера применяемой интерполяции как искомой функции, так и коэффициентов исходного уравнения.

Проиллюстрируем этот метод на примере уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$ и покажем, что он приводит к консервативным схемам. Напишем уравнение баланса тепла для интервала $\left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right)$:

$$w_{i-1/2} - w_{i+1/2} - \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, u(x)\, dx = - \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\, dx, \tag{28}$$

где $w(x) = -k(x)\, u'(x)$ — тепловой поток в точке x. Отсюда

$$u'(x) = -\frac{w(x)}{k(x)}.$$

Интегрируя по x от x_{i-1} до x_i, будем иметь

$$u_i - u_{i-1} = -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)}\, dx. \tag{29}$$

Уравнения (28) и (29) являются точными.

Предполагая, например, что $w(x) = \text{const} = w_{i-1/2}$ при $x_{i-1} < x < x_i$, получаем

$$w_{i-1/2} \approx -A_i \frac{\nabla u_i}{h}, \quad A_i = \left[\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}.$$

Если $q(x) \equiv 0$, то таким образом мы получаем наилучшую каноническую схему $L_h^{(k,f)}$. Чтобы получить наилучшую каноническую схему $L_h^{(k,q,f)}$, предположим $u = \text{const} = u_i$ при $x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$, так, что

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, u(x)\, dx \approx u_i \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, dx.$$

Следует отметить, что интерполяции $w = \text{const}$ при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ и $u = \text{const}$ при $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ не согласованы между собой. Однако, последовательное использование одной и той же интерполяции $w = w_{i-1/2}$ при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ приводит к заметному усложнению разностной схемы, не повышая ее точности.

Возможны и другие интерполяции, например

$\frac{w}{k} = \left(\frac{w}{k}\right)_{i-1/2} = \text{const}$ при $x \in (x_{i-1}, x_i)$, что дает $A_i = k_{i-1/2}$.

Таким способом мы получаем консервативные схемы вида

$$L_h^{(k,q,f)}y_i = \frac{1}{h}\Delta w_{i-1/2} - D_i^{(h,q)}w_{i-1/2} + F_i^{(h,f)},$$

где

$$w_{i-1/2} = -A_i^{(h,k)}\frac{\nabla y_i}{h}, \quad A_i^{(h,k)} = A^h[k(x_i+sh)], \quad -1 \leqslant s \leqslant 0,$$

$$D_i^{(h,q)} = D^h[q(x_i+sh)], \quad F_i^{(h,f)} = F^h[f(x_i+sh)], \quad -0{,}5 \leqslant s \leqslant 0{,}5,$$

причем D^h и F^h — линейные фукционалы.

Интегро-интерполяционный метод использовал в [10] также Г. И. Марчук для построения дискретных схем (см. п. 10) сквозного счета в связи с расчетом критических размеров ядерных реакторов.

Рассмотрим теперь консервативную схему $L_h^{(k,q,f)}$ из $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ и будем считать, что $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x)$, $f(x) \in C^{(n)}$ $(n = 0, 1)$. Если $n=0$, то погрешность аппроксимации

$$\varphi(x, u, h) = \varphi^{(0)}(x, u) + \rho(h).$$

Если же $n = 1$, то

$$\varphi(x, u, h) = \varphi^{(0)}(x, u) + O(h),$$

где $\varphi^{(0)}$ определяется формулой (24).

Покажем, что условие первого порядка аппроксимации $B_1^{(0)}[s] - A_1^{(0)}[s] = 1$ $(a_0 = 0)$ выполняется для любой консервативной схемы из $\mathcal{L}(1, 0, 0)$. В самом деле, $B^h[\psi(s)] = A^h[\psi(1+s)]$ и, следовательно, $B_1^{(0)}[s] = A_1^{(0)}[1+s)] = 1 + A_1^{(0)}[s]$. Поэтому для консервативной схемы $\varphi^{(0)}(x, u) \equiv 0$.

Тем самым доказана

Лемма 4. *Любая консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из семейства $\mathcal{L}(1, 0, 0)$ удовлетворяет условиям первого порядка аппроксимации, а консервативная схема типа $\mathcal{L}(2, 1, 1)$ имеет первый порядок аппроксимации.*

Если консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ симметрична, то

$$A^h[\psi(-s)] = A^h[\psi(1+s)], \quad D^h[\psi(-s)] = D^h[\psi(s)],$$
$$F^h[\psi(-s)] = F^h[\psi(s)].$$

Отсюда следует, что верна

Лемма 5. *Любая консервативная симметричная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из $\mathcal{L}(2, 1, 1)$ удовлетворяет* (У. А. 2); *если же эта схема принадлежит семейству $\mathcal{L}(3, 2, 2)$, то она имеет второй порядок аппроксимации.*

Остановимся теперь на процедуре консерватизации оператора

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2}(B_i\Delta y_i - A_i\nabla y_i).$$

Умножим его на некоторую функцию Λ_i и потребуем, чтобы оператор $L_h^* = \Lambda_i L_h$ был консервативным, то есть $B_i\Lambda_i = A_{i+1}^*$, $A_i\Lambda_i = A_i^*$. Отсюда находим

$$\Lambda_{i+1} = \Lambda_i(B_i / A_{i+1}) = \prod_{s=1}^{i}(B_s / A_{s+1}),$$

если положить $\Lambda_1 = 1$. Таким образом, получаем консервативный оператор

$$L_h^* y_i = \Lambda_i L_h y_i = \frac{1}{h^2}\Delta(A_i^*\nabla y_i), \qquad A_i^* = A_i\Lambda_i.$$

Если исходная схема $L_h^{(k)}$ однородна, то консервативная схема $L_h^{*(k)} = \Lambda_i L_h^{(k)}$ не является однородной.

9. Линейные схемы. Если $A^h[\psi]$ и $B^h[\psi]$ являются линейными функционалами относительно ψ, то схему $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ мы будем называть k-линейной схемой.

Наряду с k-линейными схемами можно рассматривать так называемые p-линейные схемы

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{b_i^{(h,\,p)}}\Delta y_i - \frac{1}{a_i^{(h,p)}}\nabla y_i\right],$$

где $b_i^{(h,\,p)} = b^h[p(x_i + sh)]$, $a_i^{(h,\,p)} = a^h[p(x_i + sh)$, причем $a^h[\bar{p}\ (s)]$ и $b^h[\bar{p}\ (s)]$ являются линейными функционалами $\bar{p}(s) \in Q^{(0)}$ $[-1, 1]$. Эта форма записи соответствует дифференциальному оператору

$$L^{(p)} u = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right] \qquad \left(p = \frac{1}{k}\right).$$

Исследование линейных схем в классе разрывных коэффициентов облегчается тем, что для линейных функционалов существует в $Q^{(0)}$ интегральное представление с помощью характеристических функций (см. п. 11).

Отметим, что полученная в § 4 наилучшая каноническая схема $L_h^{(k)}$, для которой

$$B_i = A_{i+1},\ A_i = \left[\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx\right]^{-1},$$

является канонической консервативной p-линейной схемой, у которой

$$b[\bar{p}(s)] = a[\bar{p}(1+s)], \qquad a[\bar{p}(s)] = \int\limits_{-1}^{0}\bar{p}(s)\,ds.$$

10. Дискретные схемы. Если шаблонные функционалы $A^h[\psi(s)]$ и $B^h[\psi(s)]$ зависят от значений функции $\psi(s)$ на дискретном множестве точек, то такие функционалы мы назовем дискретными, а соответствующую схему $L_h^{(k)}$—дискретной схемой. В случае $\psi \in Q^{(0)}$ дискретный функционал может зависеть не только от значений ψ в отдельных точках, но и от левого и правого предельных значений функций ψ в этих точках.

В качестве примера рассмотрим каноническую дискретную схему $L_h^{(k)}$, коэффициенты которой являются трехточечными дискретными функционалами:

$$A_i = f_1(k_{i-1},\ k_i,\ k_{i+1}), \qquad B_i = f_2(k_{i-1},\ k_i,\ k_{i+1}) \qquad (k_i = k(x_i)),$$

где $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$—некоторые функции трех переменных.

Из условия $(\mathrm{II}^{(r)})$ для шаблонов $A[\bar{k}(s)]$ и $B[\bar{k}(s)]$ следует, что

$$f_1(x, y, z) = y\varphi(\bar{x}, \bar{z}), \quad f_2(x, y, z) = y\psi(\bar{x}, \bar{z}) \quad (\bar{x} = x/y,\ \bar{z} = z/y),$$

причем $\varphi(1, 1) = 1$, $\psi(1, 1) = 1$.

Рассмотренная в п. 2 введения (пример 1) схема дискретна:

$$A_i = k_i - \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}), \qquad B_i = k_i + \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}).$$

Если схема консервативна, то

$$B_i = k_i \Psi\left(\frac{k_{i+1}}{k_i}\right) = A_{i+1}, \qquad A_i = k_i \Phi\left(\frac{k_{i-1}}{k_i}\right),$$

так как для консервативных схем $\varphi(\bar{x}, \bar{z}) = \Phi(\bar{x})$ не зависит от $\bar{z}$, а $\psi(\bar{x}, \bar{z}) = \Psi(\bar{z})$ не зависит от $\bar{x}$.

Отсюда следует, что

$$\Psi(\xi) = \xi \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right), \qquad \Phi(1) = 1.$$

Если схема $L_h^{(k)}$, кроме того, симметрична, то $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$ и мы получаем для $\Phi(\xi)$ функциональное уравнение

$$\Phi(\xi) = \xi \Phi\left(\frac{1}{\xi}\right), \qquad \Phi(1) = 1. \tag{29'}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $\Phi(\xi) = \sqrt{\xi}\,\omega(\ln \xi)$, где $\omega(t)$—произвольная четная функция, удовлетворяющая условию $\omega(0) = 1$. *

Приведем два примера функции $\Phi(\xi)$:

1. $\Phi(\xi) = 0{,}5(1 + \xi), \qquad A_i = 0{,}5(k_{i-1} + k_i), \qquad B_i = A_{i+1}.$
2. $\Phi(\xi) = \dfrac{2\xi}{1 + \xi}, \qquad A_i = \dfrac{2k_{i-1}k_i}{k_{i-1} + k_i}, \qquad B_i = A_{i+1}.$

11. Линейные функционалы в классе разрывных функций. Как известно, линейный функционал $A[f]$ определяется с помощью условий

$$1^\circ.\ A[f_1 + f_2] = A[f_1 + f_2]; \qquad 2^\circ.\ |A[f]| \leqslant M \sup |f|. \tag{30}$$

Рассмотрим линейный функционал $A[f]$, определенный для кусочно-непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

В связи с тем, что известное представление линейного функционала вклассе $C^{(0)}[a, b]$ с помощью интеграла Стильтьеса

$$A[f] = \int_a^b f(s)\, d\alpha(s) \quad \text{(теорема Рисса)}$$

продолжается на класс $Q^{(0)}$ неоднозначно, требуется найти представление $A[f]$ в $Q^{(0)}[a, b]$. Такое представление получено в [12]. Доказано (теорема 1), что линейный функционал $A[f(s)]$, где $f(s) \in Q^{(0)}[a, b]$, однозначно определяется двумя характеристическими функциями:

$$\alpha(\lambda) = A[\eta_\lambda(s)], \qquad \sigma(\lambda) = A[\pi_\lambda(s)], \tag{31}$$

где

$$\eta_\lambda(s) = \begin{cases} 1, & s < \lambda, \\ 0, & s \geqslant \lambda, \end{cases} \qquad \pi_\lambda(s) = \begin{cases} 1, & s = \lambda, \\ 0, & s \neq \lambda. \end{cases} \tag{32}$$

Если $\sigma(\lambda) \equiv 0$ для $\lambda \in [a, b]$, то функционал называется регулярным; если же $\alpha(\lambda) \equiv 0$ для $\lambda \in [a, b]$, то такой функционал мы называем точечным.

Приведем необходимые для дальнейшего свойства линейных функ-

* На существование общего решения уравнения (29′) обратил наше внимание М. В. Масленников.

ционалов и их характеристических функций, отсылая за доказательствами к [12].

1. Существует не более счетного числа точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots$, в которых $\sigma(\zeta_j) \neq 0$, причем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sigma(\zeta_j)| \leqslant M.$$

2. Всякий линейный функционал A может быть представлен в виде суммы регулярного $\overline{A}$ и точечного A^* линейных функционалов:

$$A[f] = \overline{A}[f] + A^*[f],$$

где

$$A^*[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(\zeta_j) f(\zeta_j).$$

Регулярный функционал $\overline{A}[f]$ целиком определяется характеристической функцией

$$\overline{\alpha}(\lambda) = \overline{A}[\eta_\lambda(s)] = \alpha(\lambda) - \sum_{\zeta_j < \lambda} \sigma(\zeta_j).$$

3. а) Функция $\overline{\alpha}(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию;

б) существует не более счетного числа точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$, в которых $\overline{\alpha}_л(\lambda_i) \neq \overline{\alpha}(\lambda_i)$ или $\overline{\alpha}(\lambda_i) \neq \overline{\alpha}_п(\lambda_i)$, $s = 1, 2, \ldots$;

в) функция

$$\overline{\overline{\alpha}}(\lambda) = \overline{\alpha}_л(\lambda) - \sum_{\lambda_i < \lambda} [\overline{\alpha}_п(\lambda_i) - \overline{\alpha}_л(\lambda_i)]$$

является непрерывной функцией на $[a, b]$.

4. Имеет место основная

Теорема 1. *Всякий линейный функционал $A[f]$, определенный в классе $Q^{(0)}[a, b]$, может быть представлен в виде*

$$A[f] = \int_a^b f(s)\, d\overline{\overline{\alpha}}(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \{f_п(\lambda_i)[\overline{\alpha}_п(\lambda_i) - \overline{\alpha}(\lambda_i)] + f_л(\lambda_i)[\overline{\alpha}(\lambda_i) - \overline{\alpha}_л(\lambda_i)]\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(\zeta_j) f(\zeta_j). \tag{33}$$

Если из $f \geqslant 0$ следует $A[f] \geqslant 0$, то линейный функционал $A[f]$ называют неотрицательным.

Теорема 2. *Для того чтобы линейный функционал $A[f]$ был неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) *характеристическая функция $\overline{\alpha}(\lambda)$ регулярной части $\overline{A}$ функционала A есть неубывающая функция;*

2) $\sigma(\zeta_j) \geqslant 0$ *для всех* $j = 1, 2, \ldots$

Достаточность условий 1) и 2) следует из представления (33). Докажем их необходимость. Итак, пусть $A[f]$ — неубывающий функционал. Выбирая

$$f_j(s) = \pi_{\zeta_j}(s) \geqslant 0,$$

будем иметь $\sigma(\zeta_j) = A[f_j(s)] \geqslant 0$ для любого $j = 1, 2, \ldots$

Вводя функцию $\bar{f}_\lambda(s) = \eta_\lambda(s) - \sum_{\zeta_j < \lambda} \pi_{\zeta_j}(s) \geqslant 0,$

замечаем, что

$$A[\bar{f}_\lambda(s)] = \alpha(\lambda) - \sum_{\zeta_j < \lambda} \sigma(\zeta_j) = \bar{\alpha}(\lambda). \tag{34}$$

Пусть λ_1 и $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$ — любые точки отрезка $[a, b]$.

Из неравенства

$$\bar{f}_{\lambda_2}(s) - \bar{f}_{\lambda_1}(s) \geqslant 0,$$

в силу формулы (34), следует

$$A[\bar{f}_{\lambda_2}(s) - \bar{f}_{\lambda_1}(s)] = \bar{\alpha}(\lambda_2) - \bar{\alpha}(\lambda_1) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \lambda_2 \geqslant \lambda_1,$$

т. е. $\bar{\alpha}(\lambda)$ является неубывающей функцией.

Иными словами, необходимыми и достаточными условиями неотрицательности линейного функционала $A[f]$ являются условия неотрицательности его регулярной $\bar{A}[f]$ и точечной $A^*[f]$ компонент.

Однородный функционал первой степени $A[f]$ полностью определяется своим первым дифференциалом $A_1[f, \varphi]$, который является линейным функционалом относительно второго аргумента φ; имеет место равенство

$$A[f] = A_1[f, f] \text{ (лемма 1).} \tag{35}$$

§ 2. Однородные разностные схемы в классе гладких коэффициентов

В этом параграфе доказано, что в классе достаточно гладких коэффициентов порядок аппроксимации однородной схемы из исходного семейства $\mathscr{L}(n_1, n_2, n_3)$ совпадает с порядком точности этой схемы.

1. О точности разностных схем в классе гладких коэффициентов. Изучая вопрос о точности решения y_i^h разностной краевой задачи (II) по отношению к решению $u = u(x)$ исходной задачи (I), мы в § 1 получили для сетчатой функции $z_i^h = y_i^h - u(x)$ следующие условия:

$$L_h^{(k,q)} z_i^h = -\varphi_i^h, \quad 0 < i < N, \quad z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0, \tag{III}$$

где

$$L_h^{(k,q)} z_i^h = \frac{1}{h^2}[B_i^{(h,k)} \Delta z_i^h - A_i^{(h,k)} \nabla z_i^h] - D_i^{(h,q)} z_i^h \tag{1}$$

исходная схема и

$$\varphi_i^h = L_h^{(k,q,f)} u_i - (L^{(k,q,f)} u)_i \tag{2}$$

есть погрешность аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ на решении $u(x)$ краевой задачи (I).

Пусть R_h — оператор, дающий решение задачи (III):

$$z_i^h = R_h \varphi_i^h. \tag{3}$$

Введем норму для сетчатой функции z_i^h:

$$\|z_i^h\|_1 = \max_{0 < i < N} |z_i^h| \tag{4}$$

и некоторую норму $\|\varphi^h\|_2$ для функции φ_i^h. Если при фиксированных

k и q норма оператора R_h равномерно ограничена по h:

$$\| z_i^h \|_1 = \| R^h \varphi_i^h \|_1 \leqslant M_h^{(k,\,q)} \| \varphi_i^h \|_\sigma, \quad M_h^{(k,\,q)} \leqslant M^{(k,\,q)}, \tag{5}$$

то из малости погрешности аппроксимации по норме $\| \ \|_\sigma$ будет следовать равномерная сходимость (см. [6]) решений разностной краевой задачи (II) к решению задачи (I).

При изучении сходимости разностных схем в классе гладких коэффициентов достаточно взять для φ_i^h и z_i^h одну и ту же норму:

$$\| \varphi_i^h \|_\sigma = \| \varphi_i^h \|_1 = \max_{0<i<N} | \varphi_i^h | \qquad (\sigma = 1).$$

В п. 3 исследована разностная функция Грина задачи (III) и показано, что операторы R_h, дающие решение задачи (III), равномерно ограничены по h для любой схемы $L_h^{(k,\,q)}$ (из класса $\mathscr{L}$ (2, 1)), если $k(x) \in C^{(1)}$ и $q(x) \in C^{(0)}$ (лемма 2).

Если $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x) \in C^{(n)}$, $f(x) \in C^{(n)}$ $(n = 1, 2)$, а схема $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ из класса $\mathscr{L}(n+1, n, n)$ имеет n-й порядок аппроксимации, т. е. удовлетворяет условиям (У.А.1), $n = 1$ или (У.А.2), $n = 2$ (см. § 1, п. 6), то для погрешности φ_i^h имеет место равномерная оценка

$$\| \varphi^h \|_1 = O(h^n) \quad \text{или} \quad \| \varphi^h \|_1 \leqslant M \cdot h^n, \tag{6}$$

где M — положительная постоянная, зависящая от выбора k, q, f и не зависящая от h.

Отсюда и из леммы 2 следует

Лемма 3. *Если исходная схема $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ из $\mathscr{L}(n+1, n, n)$ имеет n-й $(n = 1, 2)$ порядок аппроксимации, то решение краевой задачи* (II) *имеет в классе $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x) \in C^{(n)}$, $f(x) \in C^{(n)}$ тот же n-й порядок точности.*

Для изучения точности решения краевой задачи (II) в классе разрывных коэффициентов нам потребуется ограниченность оператора R_h по норме

$$\| \varphi_i^h \|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^{i} h \varphi_s^h \right|. \tag{7}$$

Равномерная ограниченность по h операторов R_h в этой норме будет показана в п. 3.

2. Разностная функция Грина. Перейдем теперь к выяснению вопроса о существовании и ограниченности оператора R_h, определяемого с помощью разностной функции Грина.

Рассмотрим разностную краевую задачу

$$L_h z_i^h = -\varphi_i, \quad 0 < i < N, \quad z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0, \tag{8}$$

где L_h — разностный оператор, определяемый выражением

$$L_h z_i = \frac{1}{h^2} (B_i^h \Delta z_i - A_i^h \nabla z_i) - D_i^h z_i. \tag{9}$$

Будем предполагать, что коэффициенты оператора L_h удовлетворяют условиям:

$$0 < M_1 \leqslant A_i^h \leqslant M_2, \quad 0 < M_1 \leqslant B_i^h \leqslant M_2, \quad 0 \leqslant D_i^h \leqslant M_3 \ (0 < i < N), \tag{α}$$

где M_1, M_2 и M_3 — положительные постоянные, не зависящие от h.

Решение этой задачи можно представить с помощью разностной функции Грина G_{ij} в виде

$$z_i^h = R_h \varphi_i^h = \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} \varphi_i^h h. \tag{10}$$

В частности, если краевые условия неоднородны, то

$$z_i^h = \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} \varphi_j^h h - \frac{A_1^h G_{i1}}{h} z_0^h + \frac{B_{N-1}^h G_{i,\,N-1}}{h} z_N^h. \tag{11}$$

Разностную функцию Грина G_{ij} задачи (8) определим с помощью условий:

а) G_{ij} по переменному i при фиксированном j $(0 \leqslant j \leqslant N)$ удовлетворяет уравнению

$$L_h G_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{n} \quad \text{при} \quad 0 < i < N, \quad \text{где} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \tag{12}$$

б) G_{ij} удовлетворяет однородным краевым условиям

$$G_{1j} = 0, \qquad G_{Nj} = 0. \tag{13}$$

Покажем, что функция G_{ij} существует, если выполнены условия (α). Рассмотрим два случая.

А. Разностный оператор L_h консервативен, т. е. $B_i^h = A_{i+1}^h$ и $L_h z_i = \frac{1}{h^2} \Delta (A_i^h \nabla z_i) - D_i^h z_i$.

По аналогии с дифференциальными уравнениями будем искать G_{ij} в виде:

$$G_{ij} = \begin{cases} a_j v_i, & i < j, \\ b_j w_i, & i > j, \end{cases} \tag{14}$$

где a_j и b_j — подлежащие определению множители, а v_i и w_i — решения однородного уравнения $L_h z_i = 0$, удовлетворяющие условиям

$$L_h v_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad v_0 = 0, \quad \frac{A_1^h \Delta v_0}{h} = 1 \quad \text{или} \quad v_j = \frac{h}{A_1^h}; \tag{15}$$

$$L_h w_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad w_N = 0, \quad -A_N^h \frac{\Delta w_{N-1}}{h} = 1 \quad \text{или} \quad w_{N-1} = \frac{h}{A_N^h}. \tag{15'}$$

Применяя вторую разностную формулу Грина (см. п. 8, § 1) к функциям v_i и w_i, видим, что

$$v_N = w_0. \tag{16}$$

Из условий (15) получаем

$$A_i \frac{\nabla v_i}{h} = 1 + \sum_{s=1}^{i-1} D_s^h v_s h. \tag{17}$$

Отсюда и из условий $D_s^h \geqslant 0$, $v_1 = \frac{h}{A_1^h} > 0$ следует, что $v_i > 0$ при $i > 0$, точнее,

$$v_i \geqslant \sum_{k=1}^{i} \frac{h}{A_k^h} \geqslant \frac{x_i}{M_2}, \quad v_N \geqslant \frac{1}{M_2},$$

и, аналогично, $w_i \geqslant \frac{1 - x_i}{M_2}$.

Таким образом, функция Грина $G_{ij} \geqslant 0$ $(0 \leqslant i,\ j \leqslant N)$.

Из условия $a_j v_j = b_j w_j$ и уравнения (12) при $i = j$ находим

$$a_j = \frac{w_j}{\Delta}, \quad b_j = \frac{v_j}{\Delta},$$

где
$$\Delta = \frac{1}{h} A_i (v_i w_{i-1} - v_{i-1} w_i) = \text{const}.$$

Из условий (15) и (15′) для функций v_i и w_i следует, что

$$\Delta = v_N = w_0.$$

В результате получаем следующее выражение для разностной функции Грина:

$$G_{ij} = \begin{cases} v_i w_j / v_N, & i < j, \\ w_i v_j / v_N, & i > j. \end{cases} \tag{18}$$

Отсюда сразу получаем свойство симметрии функции Грина: $G_{ij} = G_{ji}$.

Б. Если разностный оператор L_h не консервативен, т. е.

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2} (B_i^h \Delta y_i - A_i^h \nabla y_i) - D_i^h y_i,$$

то, умножая его на множитель

$$\Lambda_i = \prod_{s=1}^{i-1} \frac{B_s^h}{A_{s+1}^h},$$

мы, в соответствии с п. 6 § 1, получим консервативный оператор

$$\overset{*}{L}_h y_i = \frac{1}{h^2} \Delta (A_i^{*h} \nabla y_i) - D_i^{*h} y_i,$$

где $A_i^{*h} = A_i^h \Lambda_i$. Оператору $\overset{*}{L}_h$ соответствует разностная функция Грина $\overset{*}{G}_{ij}$, которая строится так же, как и для случая **А**.

Из уравнений для G_{ij} и $\overset{*}{G}_{ij}$ видно, что

$$G_{ij} = \Lambda_j \overset{*}{G}_{ij}.$$

3. Оценки разностной функции Грина. При выводе равномерных по h оценок для функции Грина мы будем предполагать, что наряду с условием (α) выполняется неравенство

$$e^{-bh} \leqslant \frac{B_i^h}{A_{i+1}^h} \leqslant e^{bh}, \quad 0 < i < N - 1, \tag{β}$$

где b — положительная постоянная, не зависящая от параметра h.

Рассмотрим сначала случай **А**.

Из формулы (18) в силу неравенства $v_i \geqslant x_i / M_2$, $w_j \geqslant (1 - x_j) / M_2$ следует

$$\frac{\psi_{ij}}{M_2 v_N} \leqslant G_{ij} \leqslant v_N, \tag{19}$$

где $\psi_{ij} = \begin{cases} x_i (1 - x_j) & \text{при } i < j, \\ x_j (1 - x_i) & \text{при } i > j. \end{cases}$

Отсюда видно, что для получения двухсторонней оценки функции Грина достаточно оценить сверху v_N. Для этого нам нужна

Лемма 1. *Пусть* v_i — *решение задачи* (15), *а* $\bar{v}_i$ — *решение задачи*

$$\bar{L}_h\bar{v}_i = 0,\ \bar{v}_0 = 0,\ \bar{A}_1\bar{v}_1 = h,\ \bar{L}_h\bar{v}_i = \frac{1}{h^2}\Delta(\bar{A}_i\nabla\bar{v}_i) - \bar{D}_i\bar{v}_i.$$

Если выполнены условия $\bar{A}_i \leqslant A_i$, $\bar{D}_i \geqslant D_i$, *а также условия* (α) *для коэффициентов операторов* L_h *и* $\bar{L}_h$, *то имеет место неравенство* $\bar{v}_i \geqslant v_i$.

В самом деле, функция $z_i = \bar{v}_i - v_i$ удовлетворяет условиям

$$\bar{L}_h z_i = \frac{1}{h^2}\Delta[(A_i - \bar{A}_i)\ \nabla v_i] + (\bar{D}_i - D_i)v_i,\quad z_0 = 0,\quad z_1 = h\left(\frac{1}{\bar{A}} - \frac{1}{A_1}\right) \geqslant 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\bar{A}_i\nabla z_i}{h} = \left(1 - \frac{\bar{A}_i}{A_i}\right)\left(1 + \sum_{s=1}^{i-1} D_s v_s h\right) + \sum_{s=1}^{i-1} D_s v_s h + \sum_{s=1}^{i-1}(\bar{D}_s - D_s)\,v_s h \geqslant 0,$$

т. е. $z_i \geqslant z_{i-1} \geqslant z_1 \geqslant 0$ или $\bar{v}_i \geqslant v_i$.

Полагая $\bar{A}_i = M_1$, $\bar{D}_i = M_3$, получаем для $\bar{v}_i$ уравнение с постоянными коэффициентами

$$\Delta^2\bar{v}_{i-1} - \varkappa^2 h^2\bar{v}_i = 0,\quad \varkappa^2 = M_3/M_1,$$

решение которого при условиях $\bar{v}_0 = 0$, $\bar{v}_1 = \frac{h}{\bar{A}_1}$ имеет вид

$$\bar{v}_i = \frac{\operatorname{sh}\omega x_i}{M_1\varkappa\sqrt{1 + \left(\frac{\varkappa h}{2}\right)^2}},$$

где ω — корень уравнения $\operatorname{sh}\frac{\omega h}{2} = \frac{\varkappa h}{2}$, так что $\sin\omega \leqslant \sin\varkappa$.

Поэтому для v_N получаем оценку

$$v_N \leqslant \frac{\operatorname{sh}\varkappa}{M_1\varkappa} = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{M_3}{M_1}}}{\sqrt{M_1M_3}} \tag{20}$$

при любых значениях $h > 0$.

В результате мы приходим к следующей оценке функции Грина снизу и сверху:

$$2g_0\psi_{ij} = \frac{\psi_{ij}\sqrt{M_1M_3}}{M_2^2\operatorname{sh}\sqrt{\frac{M_3}{M_1}}} \leqslant G_{ij} \leqslant \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{M_3}{M_1}}}{\sqrt{M_1M_3}}. \tag{21}$$

Если $D_i^h = 0$, то для соответствующей функции Грина G_{ij}^0 формула (21) (при $M_3 = 0$) дает

$$\frac{M_1}{M_2^2}\psi_{ij} \leqslant G_{ij}^0 \leqslant \frac{1}{M_1}. \tag{22}$$

Из неравенства $G_{ij} \leqslant G_{ij}^0$ (при условии $D_i^h \geqslant 0$) следует, что для функции Грина G_{ij} можно пользоваться более простой оценкой сверху

$$G_{ij} \leqslant \frac{1}{M_1} = g_1. \tag{23}$$

Для первого разностного отношения функции Грина имеем

$$\frac{G_{i,j+1}-G_{i,j}}{h}=\begin{cases}\dfrac{v_i}{v_N}\dfrac{\Delta w_j}{h}, & i<j,\\ \dfrac{w_i}{v_N}\dfrac{\Delta v_j}{h}, & i>j.\end{cases}$$

Учитывая неравенство

$$\frac{\nabla v_j}{h}=\frac{1}{A_j}+\frac{1}{A_j}\sum_{s=1}^{j-1}D_s v_s h\leqslant\frac{1}{M_1}+\frac{M_3}{M_1}v_N\leqslant M_5(M_1,\ M_3),$$

получаем

$$\left|\frac{G_{i,j+1}-G_{i,j}}{h}\right|\leqslant M_5, \tag{24}$$

где $M_5=M_5(M_1,\ M_3)$ — положительная постоянная, зависящая только от M_1 и M_3.

Выбирая, например, $i=j=i_0=\left[\frac{N}{2}\right]$, получаем из (21)

$$G_{i_0,i_0}\geqslant g_0=\frac{\sqrt{M_1M_3}}{2M_2^2\operatorname{sh}\sqrt{M_3/M_1}}. \tag{25}$$

Если оператор L_h неконсервативен и удовлетворяет условиям (α) и (β), то для коэффициентов консервативного оператора $\overset{*}{L}_h=\Lambda_i L_h$ будем иметь

$$0<M_1'\leqslant A_i^*\leqslant M_2',\quad 0\leqslant D_i^*\leqslant M_3', \tag{26}$$

где $M_1'=M_1\bar{e}^b$, $M_2'=M_2e^b$, $M_3'=M_3e^b$.

Для множителя Λ_i имеет место двухсторонняя оценка

$$\bar{e}^b\leqslant\Lambda_i\leqslant e^b,\quad 0<i<N. \tag{27}$$

Для оценки G_{ij}^* можно пользоваться формулой (21), заменив константы $M_k\,(k=1,\ 2,\ 3)$ константами M_k'. Оценку для G_{ij} мы получим, если воспользуемся соотношением (27) и формулой

$$G_{ij}=\Lambda_j G_{ij}^*.$$

Обратимся теперь к формуле

$$z_i^h=\sum_{j=1}^{N-1}G_{ij}\varphi_j^h h.$$

Учитывая неравенство (23), находим

$$\|z^h\|_1=\max_{0<i<N}|z_i^h|\leqslant\frac{1}{M_1'}\sum_{j=1}^{N-1}|\varphi_j^h|\,h. \tag{28}$$

Отсюда следует

$$\|z^h\|_1\leqslant\frac{1}{M_1'}\|\varphi^h\|_\sigma,\quad \sigma=1,\ 3. \tag{29}$$

Таким образом, константа $\frac{1}{M'_1}$ и дает равномерную оценку оператора R_h.

Лемма 2. *Операторы R_h, представляющие решение задачи* (III) ($z^h = R_h\varphi^h$) *для любой схемы $L_h^{(k,q)}$ из класса $\mathcal{L}$* (2,1) *и для $k(x) \in C^{(1)}$, q, $f \in C^{(0)}$, равномерно ограничены как по норме $\| \|_1$, так и по норме $\| \|_2$, т. е.*

$$\|z^h\|_1 \leqslant g_\sigma \|\varphi^h\|_\sigma, \quad \sigma = 1,2,$$

где g_1 и g_2 — положительные постоянные, зависящие только от M_1, M_2, M_3 и b

$$\left(\|\varphi^h\|_1 = \max_{0<i<N} |\varphi_i^h|, \quad \|\varphi^h\|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^{i} \varphi_s h \right| \right).$$

В самом деле, условия (α) будут выполнены, если

$$0 < M_1 \leqslant k(x) \leqslant M_2, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant M_3,$$

так как шаблонные функционалы схемы нормированы и являются неубывающими.

Если $k(x) \in C^{(1)}$, то $A_i^{(h,k)} = k_i + hk_1' A_1^{(0)}[s] + h\rho(h)$,

$$B_i^{(h,k)} = k_i + hk_1' B_1^{(0)}[s] + h\rho(h),$$

$$B_i^{(h,k)} / A_{i+1}^{(h,k)} = 1 + h\left(\frac{k'}{k}\right)_i \cdot a_0 + h\rho(h), \quad a_0 = B_1^{(0)}[s] - A_1^{(0)}[s] - 1.$$

Отсюда видно, что всегда можно выбрать константу b так, чтобы выполнялось условие (β). Например,

$$b = (1 + |a_0|) \max_{(0 \leqslant x \leqslant 1)} \left| \frac{k'}{k} \right|.$$

При изучении сходимости наших схем в классе разрывных коэффициентов, помимо оценки (29), понадобится более тонкая оценка. Представляя z_i в виде

$$z_i^h = \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} \Delta \left(\sum_{s=1}^{j-1} \varphi_s^h h \right)$$

и учитывая тождество $u_j \Delta v_j = -v_{j+1} \Delta u_j + \Delta(u_j v_j)$, получим

$$z_i^h = -\sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{h} \right) \left(\sum_{s=1}^{j} \varphi_s^h h \right) h.$$

Отсюда следует неравенство

$$\|z^h\|_1 \leqslant \max_{0 \leqslant i,j \leqslant N-1} \left| \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{h} \right| \cdot \sum_{s=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^{j} \varphi_s^h h \right|,$$

которое, если воспользоваться равномерной оценкой (24) для разностного отношения функции Грина, принимает вид:

$$\|z^h\|_1 \leqslant M_5' \|\varphi^h\|_2, \text{ где } M_5' = e^b M_5 (M_1', M_3'), \tag{30}$$

Замечание. *Если условие* (β) *выполняется всюду, кроме конечного числа точек $j = 1, 2, \ldots, j_0$, то все полученные выше оценки сохраняют силу, если вместо b ввести новую константу b_1 с помощью условия $b_1 = b + j_0 \ln \frac{M_2}{M_1}$; тогда $e^{-b_1} \leqslant \Lambda_i \leqslant e^{b_1}$, $M_1' = e^{-b} M_1$, $M_2' = e^b M_2$ и т. д.*

4. О порядке аппроксимации сходящихся схем. Перейдем теперь к установлению связи между порядком аппроксимации и порядком точности схемы для задачи (II). В п. 1 сформулирована лемма 3. Ее доказательство следует из неравенств (29) и (5).

Имеет ли место обратное утверждение? Определяет ли порядок точности схемы ее порядок аппроксимации? Ответ на этот вопрос дает

Лемма 4. *Если разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из семейства $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ имеет n-й порядок точности в классе достаточно гладких коэффициентов*

$$k(x) \in C^{(m_k)}, \quad q(x) \in C^{(m_q)}, \quad f(x) \in C^{(m_f)}, \quad m_k \geqslant n+1, \quad m_q \geqslant n, \quad m_f \geqslant n,$$

то она имеет тот же n-й порядок аппроксимации ($n = 1, 2$).

Итак, пусть $z_i = O(h^n)$ для любых коэффициентов из указанного выше класса. Докажем, что при этом обязательно выполнены условия n-го порядка аппроксимации (см.(У. А. 1) и (У. А. 2); п. 6, § 1). Для оценок будем пользоваться неравенством

$$|z_{i_0}| \geqslant g_0 \left| \sum_{j=1}^{N-1} \psi_{i_0 j} \varphi_j h \right| > {}^1/_4\, g_0 \,.$$

В частности, если $\varphi_j = \bar{\varphi} \cdot h^m + O(h^{m+1})$, где $\bar{\varphi} = \text{const}$, $m \geqslant 0$, то отсюда следует

$$|\bar{\varphi}| \leqslant \frac{|z_{i_0}|}{\bar{g}_0 h^m} + O(h), \quad 0 < \bar{g}_0 \leqslant g_0 \sum_{j=1}^{N-1} \psi_{i_0 j} h. \tag{31}$$

В п. 5 § 1 для погрешности аппроксимации $\varphi(x, u, h)$ было получено разложение по степеням h:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + h\varphi^{(1)} + O(h^2),$$

где $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ определяются формулами (25) и (26), § 1, через моменты дифференциалов шаблонных функционалов, функции $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ и их производные.

Будем выбирать функции $u(x)$, $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ таким образом, чтобы $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ были постоянны.

Пусть $n = 1$. Полагая $k(x) = e^x$, $u(x) = e^{-x}$ и пользуясь (31) для $m = 0$, находим, что $\varphi^{(0)} = -a_0 = O(h)$, т. е. $a_0 = 0$.

Рассмотрим теперь схему из $\mathcal{L}(3, 2, 2)$, $n = 2$. Для нее имеем $\varphi = \varphi^{(1)}h + O(h^2)$, так как $\varphi^{(0)} = 0$ $(m = 1)$. Чтобы убедиться в справедливости соотношений $a_j = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, выберем следующие примеры:

1) $k(x) = 1$, $f(x) = x$, $q(x) = 0$, $\varphi^{(1)} = F_1^{(0)}[s]$

неравенство (31) дает $\varphi^{(1)} = O(h)$, т. е. $F_1^{(0)}[s] = 0$);

2) $k(x) = 1$, $f(x) = 1 - x$, $q(x) = 1 - x$, $u(x) = 1$, $\varphi^{(1)} = D_1^{(0)}[s] = 0$;

3) $k(x) = e^x$, $u(x) = e^{-x}$, $\varphi^{(1)} = -a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 0$;

4) $k(x) = e^x$, $u(x) = e^x$, $\varphi^{(1)} = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = 0$, $a_1 = 0$, $a_4 = a_2 + a_3$;

поэтому $\varphi^{(1)}$ можно переписать в виде

$$\varphi^{(1)} = a_3 \left(\frac{k'}{k}\right)' \cdot ku' - a_4 \left(\frac{k'}{k}\right) \cdot f \cdot u,$$

если воспользоваться для этого уравнением $ku'' + k'u' = -f$;

5) $k(x) = e^x$, $f(x) = -1$, $q(x) = 0$, $\varphi^{(1)} = -a_4 = 0$;

6) $\left(\frac{k'}{k}\right) \cdot ku' = 1$, $\varphi^{(1)} = a_3 = 0$.

Тем самым лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 вытекает следующая

Теорема 1. *Для того чтобы разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathcal{L}(n+1, n, n)$ имела для любых коэффициентов $k(x) \in C^{(n+1)}$, $q(x) \in C^{(n)}$, $f(x) \in C^{(n)}$ (удовлетворяющих условиям* (α) *и* (β), см. п. 1, § 1) *n-й порядок точности, необходимо и достаточно, чтобы она имела n-й порядок аппроксимации* ($n = 1, 2$).

§ 3. Необходимые условия сходимости в классе разрывных коэффициентов

В этом параграфе устанавливаются необходимые условия сходимости разностной схемы $L_h^{(k,q,f)}$ в классе разрывных коэффициентов.

1. О погрешности аппроксимации в окрестности точки разрыва коэффициентов. Погрешность $z_i^h = y_i^h - u(x_i)$ решения y_i^h разностной задачи (II) относительно решения $u(x)$ задачи (I) определяется, как мы видели, условиями

$$L_h^{(k,q,f)} z_i^h = -\varphi_i^h, \quad 0 < i < N, \quad z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0. \tag{III}$$

Правая часть уравнения $\varphi_i^h = L_h^{(k,q,f)} u_i - (L^{(k,q,f)} u)_i$ **есть погрешность** аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,f)}$ на решении $u = u(x)$ задачи (I).

Если коэффициент уравнения $k(x)$ имеет в некоторой точке $x = \xi$ разрыв первого рода, то в окрестности этой точки схема $L_h^{(k,q,f)}$ не аппроксимирует дифференциальный оператор $L^{(k,q,f)}$.

Положение точки $x = \xi$ на разностной сетке S_h $\{x_0 = 0, \ldots, x_i = xh, \ldots, x_N = Nh = 1\}$ определяется двумя числами n и θ:

$$\xi = x_n + \theta h, \quad 0 < \theta < 1, \quad x_n = nh. \tag{1}$$

Очевидно, что n и θ являются функциями шага h или номера N:

$$n = n(h), \quad \theta = \theta(h). \tag{2}$$

В точке $x = \xi$ решение $u = u(x)$ задачи (I) удовлетворяет условиям сопряжения

$$u(\xi - 0) = u(\xi + 0) = u(\xi), \; k_л u_л' = k_п u_п' \quad (k_л = k(\xi - 0), \; k_п = k(\xi + 0)). \tag{3}$$

Будем рассматривать исходную схему $L_h^{(k,q,f)}$ из семейства схем $\mathcal{L}(2, 1, 1)$ первого порядка аппроксимации с коэффициентами

$$A_i^{(h,k)} = A^h[k(x_i + sh)], \; B_i^{(h,k)} = B^h[k(x_i + sh)],$$

$$D_i^{(h,q)} = D^h[q(x_i + sh)], \quad F_i^{(h,f)} = F^h[f(x_i + sh)],$$

причем D^h и F^h — линейные функционалы. Предположим теперь, что $k(x) \in Q^{(2)}$, $q(x) \in Q^{(1)}$, $f(x) \in Q^{(1)}$. В силу трехточечности схемы

$$\varphi_i^h = O(h), \quad i \neq n, \quad i \neq n+1. \tag{4}$$

Для оценки φ_n^h и φ_{n+1}^h разложим $u(x)$ в окрестности точки $x = \xi$:

$$u_{n+j} = u(\xi) + (j - \theta) h u_n' + \frac{(j-\theta)^2}{2!} h^2 \cdot u_n'' + O(h^3) \quad (j = 2, 1, 0, -1).$$

В дальнейшем индекс h у φ_i^h опускаем.

Учитывая условия сопряжения (4) при $x = \xi$, получим

$$\varphi_n = \varphi_n^{(0)} + \omega_n^{(0)} + O(h), \quad \varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}^{(0)} + \omega_{n+1}^{(0)} + O(h), \tag{5}$$

$$\varphi_n^{(0)} = \frac{w}{h}\left[B_n^h\left(\frac{1-\theta}{k_п} + \frac{\theta}{k_л}\right) - A_n^h \cdot \frac{1}{k_л}\right] + \frac{1}{2} B_n^h [(1-\theta)^2 u_п'' - \theta^2 u_л''] + $$
$$+ (0{,}5 + \theta) A_n^h u_л'' - (ku')'_л, \tag{6}$$

$$\varphi_{n+1}^{(0)} = \frac{w}{h}\left[B_{n+1}^h \cdot \frac{1}{k_п} - A_{n+1}^h\left(\frac{1-\theta}{k_п} + \frac{\theta}{k_л}\right)\right] - \frac{1}{2} A_{n+1}^h [(1-\theta)^2 u_п'' - \theta^2 u_л''] +$$
$$+ (1{,}5 - \theta) B_{n+1}^h u_п'' - (ku')'_п,$$

$$w = k_л u_л' = k_п u_п',$$

$$\omega_n^{(0)} = (F_n^h - f_n) - (D_n^h - q_n) u(\xi);$$

$$\omega_{n+1}^{(0)} = (F_{n+1}^h - f_{n+1}) - (D_{n+1}^h - q_{n+1}) u(\xi). \tag{7}$$

Отсюда видно, что члены φ_n и φ_{n+1} имеют порядок $\frac{1}{h}$, т. е. разностный оператор $L_h^{(k,q,f)}$ не аппроксимирует дифференциальный оператор $L^{(k,q,f)}$ в точках $x = x_n$, $x = x_{n+1}$.

Если $k(x) \in Q^{(1)}$, $q(x) \in Q^{(0)}$, $f(x) \in Q^{(0)}$, то $\varphi_i = \rho(h)$ при $i \neq n$, $n+1$, $\varphi_n = \varphi_n^0 + \omega_n^0 + \rho(h)$, $\varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}^0 + \omega_{n+1}^0 + \rho(h)$, где $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

2. Случай консервативной схемы. Предположим теперь, что $L_h^{(k,q,f)}$ — консервативная схема, т. е. $B_i^{(h,k)} = A_{i+1}^{(h,k)}$. В этом случае формулы (6) принимают вид:

$$\varphi_n^{(0)} = \frac{w}{h}\left[A_{n+1}^h\left(\frac{\theta}{k_л} + \frac{1-\theta}{k_п}\right) - A_n^h \cdot \frac{1}{k_л}\right] + \frac{1}{2} A_{n+1}^h [(1-\theta)^2 u_п'' - \theta^2 u_л''] +$$
$$+ A_n^h (0{,}5 + \theta) u_л'' - (L^{(k)} u)_л + \theta h (L^k u)'_л, \tag{8}$$

$$\varphi_{n+1}^{(0)} = \frac{w}{h}\left[A_{n+2}^h \cdot \frac{1}{k_п} - A_{n+1}^h\left(\frac{\theta}{k_л} + \frac{1-\theta}{k_п}\right)\right] - \frac{1}{2} A_{n+1}^h [(1-\theta)^2 u_п'' - \theta^2 u_л''] +$$
$$+ A_{n+2}^h (1{,}5 - \theta) u_п'' - (L^{(k)} u)_п - h(1-\theta)(L^{(k)} u)'_п. \tag{9}$$

В дальнейшем нам понадобится сумма

$$\varphi_n^{(0)} + \varphi_{n+1}^{(0)} = \frac{w}{h}\left(\frac{1}{k_п} A_{n+2}^h - \frac{1}{k_л} A_n^h\right) + A_n^h (\theta + 0{,}5) u_л'' + A_{n+2}^h (1{,}5 - \theta) u_п'' -$$
$$- (L^{(k)} u)_л - (L^{(k)} u)_п + O(h). \tag{10}$$

Если $L_h^{(k)}$ — исходная схема 2-го порядка аппроксимации, то $A_n^h = k_л - (0{,}5 + \theta) h k_л' + O(h^2)$, $A_{n+2}^h = k_п + (1{,}5 - \theta) h k_п' + O(h^2)$ и, следовательно,

$$\frac{1}{k_п} A_{n+2}^h - \frac{1}{k_л} A_n^h = h\left[(1{,}5 - \theta)\frac{k_п'}{k_п} + (0{,}5 + \theta) \cdot \frac{k_п'}{k_л}\right] + O(h^2).$$

В результате получаем

$$\varphi_n^{(0)} + \varphi_{n+1}^{(0)} = (0{,}5 - \theta)\{(L^{(k)} u)_п - (L^{(k)} u)_л\} + O(h). \tag{11}$$

Вычислим теперь сумму $\omega_n^0 + \omega_{n+1}^0$. Для простоты приведем вычисления, относящиеся к слагаемым, содержащим f.

Следует различать два случая:

а) если $\theta < 0{,}5$, то

$$F_{n+1}^h = f_{\text{п}} + O(h), \quad F_n^h = F_n^{(0)} + O(h),$$
$$\omega_n^0 + \omega_{n+1}^0 = F_n^{(0)} - f_{\text{л}} + O(h), \quad F_n^{(0)} = F^{(0)}[f(x_n + sh)],$$

б) если $\theta > 0{,}5$, то $F_{n+1}^h = F_{n+1}^{(0)} + O(h)$, $F_n^h = f_{\text{л}} + O(h)$,

$$\omega_n^0 + \omega_{n+1}^0 = F_{n+1}^0 f_{\text{п}} + O(h).$$

В общем случае для схемы $L_h^{(k,q,f)}$ второго порядка аппроксимации получаем:

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = (0{,}5 - \theta)\,[(L^{(k,q,f)}u)_{\text{п}} - (L^{(k,q,f)}u)_{\text{л}}] + \chi_n + \\ + O(h) = \chi_n + O(h), \tag{12}$$

где

$$\chi_n = F_n^{(0)} - D_n^{(0)} u(\xi) - (0{,}5 + \theta)(f_{\text{л}} - q_{\text{л}} u(\xi)) + \\ + (0{,}5 - \theta)(f_{\text{п}} - q_{\text{п}} u(\xi)), \quad \theta < 0{,}5,$$

$$\chi_n = F_{n+1}^{(0)} - D_{n+1}^{(0)} u(\xi) + (1{,}5 - \theta)(f_{\text{л}} - q_{\text{л}} u(\xi)) - \\ - (1{,}5 - \theta)(f_{\text{п}} - q_{\text{п}} u(\xi)), \quad \theta > 0{,}5.$$

Заметим, что в случае $q(x) = 0$, $f(x) = 0$

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = O(h). \tag{13}$$

В общем же случае

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = O(1). \tag{14}$$

3. Основная лемма. В связи с тем, что в окрестности точки разрыва коэффициентов уравнения $L^{(k,q,f)}u = 0$ разностный оператор не аппроксимирует дифференциального оператора, возникает вопрос: каковы необходимые условия, которым должны удовлетворять φ_n и φ_{n+1}, чтобы схема $L_h^{(k,q,f)}$ сходилась или имела n-й порядок точности ($n = 1, 2$) на любой последовательности сеток S_h при $h \to 0$ (или $N \to \infty$)?

Ответ на этот вопрос будет получен с помощью основной леммы, доказываемой в этом пункте.

Рассмотрим разностный оператор

$$\widetilde{L}_h z_i = \frac{1}{h^2}(\widetilde{B}_i^h \Delta z_i - \widetilde{A}_i^h \nabla z_i), \tag{15}$$

определенный на любой последовательности сеток $S_h\left(h = \frac{1}{N}\right)$.

Пусть $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ — некоторая окрестность особой точки $\xi \in (0, 1)$, $0 < \bar{x} < \xi < \bar{\bar{x}} < 1$, причем

$$\bar{x} = x_{\bar{n}-1} + \bar{\theta}h, \quad \xi = x_n + \theta h, \quad \bar{\bar{x}} = x_{\bar{\bar{n}}} + \bar{\bar{\theta}}h, \quad 0 \leqslant \bar{\theta}, \ \theta, \ \bar{\bar{\theta}}, \leqslant 1,$$

где

$$x_i = ih.$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с операторами $\widetilde{L}_h$, коэффициен-

ты которых удовлетворяют условиям

$$0 < M_1 \leqslant \widetilde{A}_i^h \leqslant M_2, \quad 0 < M_1 \leqslant \widetilde{B}_i^h \leqslant M_2, \quad \bar{n} < i < \bar{\bar{n}}, \tag{$\bar{\alpha}$}$$

$$e^{-bh} \leqslant \widetilde{\varkappa}_i = \frac{\widetilde{B}_i^h}{\widetilde{A}_{i+1}^h} \leqslant e^{bh}, \ \bar{n} < i < \bar{\bar{n}}, \ i \neq n-1, \ n, \ n+1, \tag{$\bar{\beta}$}$$

где M_1, M_2 и b — положительные постоянные, не зависящие от h.

Основная лемма. *Если коэффициенты $\widetilde{A}_i^h$ и $\widetilde{B}_i^h$ оператора $\widetilde{L}_h$ удовлетворяют условиям ($\bar{\alpha}$) и ($\bar{\beta}$) и функция $\widetilde{\varphi}_i^h$ равномерно сходится к нулю на интервале $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ при $h \to 0$ для всех $i \neq n$, $n+1$:*

$$|\widetilde{\varphi}_i^h| \leqslant \rho(h), \tag{16}$$

то для равномерной сходимости некоторой последовательности решений уравнения

$$\widetilde{L}_h z_i^h = -\widetilde{\varphi}_i^h \tag{17}$$

к нулю при $h \to 0$ на интервале $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ ($|z_i^h| \leqslant \rho(h)$, $\bar{n} \leqslant i \leqslant \bar{\bar{n}}$) необходимо выполнение условий

$$h^2 \widetilde{\varphi}_{n+1}^h = \rho(h), \ h^2 \widetilde{\varphi}_n^h = \rho(h), \tag{а}$$

$$\Delta(\xi, h) = h(\widetilde{A}_{n+1}^h \widetilde{\varphi}_n^h + \widetilde{B}_n^h \widetilde{\varphi}_{n+1}^h) = \rho(h). \tag{б}$$

Введем функции

$$\varphi_i^{(1)} = \delta_{i,\,n} \widetilde{\varphi}_n^h + \delta_{i,\,n+1} \widetilde{\varphi}_{n+1}^h, \quad \varphi_i^{(2)} = \widetilde{\varphi}_i^h - \varphi_i^{(1)},$$

где $\delta_{i,\,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, и представим рассматриваемое решение z_i^h уравнения (17) в виде суммы

$$z_i^h = z_i^{(1)} + z_i^{(2)},$$

где $z_i^{(2)}$ — решение уравнения $L_h z_i^{(2)} = -\varphi_i^{(2)}$ с некоторыми краевыми условиями, например $z_{\bar{n}}^{(2)} = 0$, $z_{\bar{\bar{n}}}^{(2)} = 0$.

Условия ($\bar{\alpha}$) и ($\bar{\beta}$), как было показано в § 2, обеспечивают существование и двухстороннюю ограниченность разностной функции Грина оператора $\widetilde{L}_h$.

Ниже при доказательстве основной леммы мы вводим разностные функции Грина $G_{ij}^{(а)}$ и $G_{ij}^{(б)}$ консервативного оператора $\Lambda_i \widetilde{L}_h$ для первой краевой задачи на отрезках $n \leqslant i \leqslant \bar{\bar{n}}$ и $\bar{n} \leqslant i \leqslant \bar{\bar{n}}$ соответственно.

Функции $G_{ij}^{(а)}$ и $G_{ij}^{(б)}$ определяются из условий $\Lambda_i^{(а)} \widetilde{L}_h G_{ij}^{(а)} = -\dfrac{\delta_{ij}}{h}$

$$(n < i < \bar{\bar{n}}; \ j \text{ фиксировано}, \ n \leqslant j \leqslant \bar{\bar{n}}),$$

$$G_{ij}^{(а)} = 0 \ \text{ при } \ i = n \ \text{ и } \ i = \bar{\bar{n}}, \ \Lambda_i^{(а)} = \sum_{s=n}^{i-1} \widetilde{\varkappa}_s;$$

$$\Lambda_i^{(б)} \widetilde{L}_h G_{ij}^{(б)} = -\frac{\delta_{ij}}{h} (\bar{n} < i < \bar{\bar{n}}; \ j \text{ фиксировано}, \ \bar{n} \leqslant j \leqslant \bar{\bar{n}}),$$

$$G_{ij}^{(б)} = 0 \text{ при } i = \bar{n} \text{ и } i = \bar{\bar{n}}) \quad \Lambda_i^{(б)} = \prod_{s=\bar{n}}^{i-1} \tilde{\varkappa}_s .$$

Пользуясь формулой Грина, находим

$$z_i^{(2)} = \sum_{i=\bar{n}+1}^{\bar{\bar{n}}} G_{ij}^{(б)} \Lambda_j^{(б)} \varphi_j^{(2)} h \qquad (z_{\bar{n}}^{(2)} = z_{\bar{\bar{n}}}^{(2)} = 0).$$

Отсюда, в силу ограниченности $G_{ij}^{(б)}$, следует

$$\| z_i^{(2)} \|_1 = \rho(h) \quad (\| \psi \|_1 = \max_{\bar{n} \leqslant i \leqslant \bar{n}} | \psi_i |). \tag{18}$$

Таким образом, вместо решения уравнения (17) можно рассматривать на отрезке $\bar{n} \leqslant i \leqslant \bar{\bar{n}}$ решение $z_i^{(1)}$ уравнения

$$L_h z_i^{(1)} = -\varphi_i^{(1)}. \tag{19}$$

По условию леммы $\| z_i^h \|_1 = \rho(h)$. Отсюда и из (18) следует, что $z_i^{(1)} = \rho(h)$ на $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$.

Требуется доказать, что при этом условии должны выполняться условия (а) и (б).

Для доказательства леммы мы представляем решение уравнения (19) с помощью функций Грина $G_{ij}^{(а)}$ и $G_{ij}^{(б)}$. Так, например, решение на интервале $n < i < \bar{\bar{n}}$ выражается через $\tilde{\varphi}_{n+1}^h$ и краевые значения $z_n^{(1)}$, $z_{\bar{\bar{n}}}^{(1)}$, стремящиеся к нулю при $h \to 0$. Для получения нужной оценки (а) или (б) мы пользуемся оценками снизу для разностной функции Грина (см. § 2, п. 3).

1°. Решение уравнения (19) внутри интервала $n < i < \bar{\bar{n}}$ представим в виде:

$$z_i^{(1)} = \bar{z}_i^{(1)} + \bar{\bar{z}}_i^{(1)}, \quad \bar{z}_i^{(1)} = \sum_{i=n+1}^{\bar{\bar{n}}-1} G_{ij}^{(а)} \Lambda_j^{(а)} \tilde{\varphi}_j^h h = G_{i,n+1}^{(а)} \Lambda_{n+1}^{(а)} \tilde{\varphi}_{n+1}^h h, \tag{20}$$

$$\bar{\bar{z}}_i^{(1)} = \frac{1}{h} \tilde{A}_{n+1}^h G_{i,n+1}^{(а)} \Lambda_{n+1}^{(а)} z_n^{(1)} + \frac{1}{h} \tilde{B}_{\bar{\bar{n}}-1}^h G_{i,\bar{\bar{n}}-1}^{(а)} \Lambda_{\bar{\bar{n}}-1}^{(а)} \cdot z_{\bar{\bar{n}}}^{(1)}. \tag{21}$$

В силу ограниченности разностных отношений функции Грина $G_{ij}^{(а)}$ при $j = n$ и $j = \bar{\bar{n}} - 1$, получаем

$$\| \bar{\bar{z}}_i^{(1)} \|_1 \leqslant M (| z_n^{(1)} | + | z_{\bar{\bar{n}}-1}^{(1)} |) = \rho(h),$$

так как по условию $z_i^{(1)} = \rho(h)$.

Пользуясь оценкой снизу для $G_{i,j}^{(а)}$ (см. § 2, п. 3, (22)), видим, что

$$\Lambda_{n+1}^{(а)} G_{i,n+1}^{(а)} \geqslant \frac{M_1'}{(M_2')^2} \psi_{i,n+1} = \frac{M_1'}{(M_2')^2} h (x_{\bar{\bar{n}}} - x_i).$$

Выберем для определенности $i = i_0$ так, чтобы $x_{\bar{\bar{n}}} - x_{i_0} \geqslant 0{,}5 (\bar{\bar{x}} - \xi)$; тогда

$$\Lambda_{n+1}^{(а)} G_{i_0,n+1}^{(а)} \geqslant h \cdot g_0^{(а)}, \quad g_0^{(а)} = \frac{M_1'}{(M_2')^2} \cdot 0{,}5 (\bar{\bar{x}} - \xi).$$

Отсюда и из (21) следует, что

$$|\tilde{\varphi}^h_{n+1}|\cdot h^2 \leqslant \max_{\bar{n}<i<\bar{\bar{n}}} |z_i^{(1)} - \bar{\bar{z}}_i^{(1)}|,$$

$$h^2\,\tilde{\varphi}^h_{n+1} = \rho(h). \tag{22}$$

2°. Чтобы получить условие (б), представим решение уравнения (19) внутри интервала $\bar{n} < i < \bar{\bar{n}}$ с помощью функции Грина $G^{(б)}_{ij}$:

$$z_j^{(1)} = \bar{z}_i^{(1)} + \bar{\bar{z}}_i^{(1)},$$

где

$$\bar{z}_i^{(1)} = G^{(б)}_{i,\,n}\,\Lambda^{(б)}_n\,\tilde{\varphi}^h_n\cdot h + G^{(б)}_{i,\,n+1}\,\Lambda^{(б)}_{n+1}\,\tilde{\varphi}^h_{n+1}\cdot h,$$

$\bar{\bar{z}}_i^{(1)}$ выражается формулой, аналогичной (21).

Учитывая, что

$$\Lambda^{(б)}_{n+1} = \Lambda^{(б)}_n\cdot(\tilde{B}^h_n/\tilde{A}^h_{n+1}),$$

представим $\bar{z}_i^{(1)}$ в виде

$$\bar{z}_i^{(1)} = G^{(1)}_{i,\,n}\cdot\frac{\Delta(\xi,h)}{\tilde{A}^h_{n+1}}\cdot\Lambda^{(б)}_n + \frac{G^{(б)}_{i,\,n+1} - G^{(б)}_{i,\,n}}{h}\cdot\Lambda^{(б)}_{n+1}(h^2\,\tilde{\varphi}^h_{n+1}). \tag{23}$$

В силу (22) второе слагаемое есть величина $\rho(h)$.

Выберем затем $i = i_0$ так, что $x_{i_0} - x_{\bar{n}} \geqslant 0{,}5\,(\bar{\bar{x}} - \bar{x})$, получим

$$\frac{\Lambda^{(б)}_n}{\tilde{A}^h_{n+1}}\,G^{(б)}_{i_0,\,n} \geqslant g^{(б)}_0.$$

Поэтому из (23) следует оценка

$$\Delta(\xi,h) \leqslant \frac{|\bar{z}^{(1)}_{i_0}|}{g^{(б)}_0} + \rho(h) = \rho(h). \tag{24}$$

Условие $h^2\,\tilde{\varphi}^h_n = \rho(h)$, очевидно, является следствием условий (22) и (24). Лемма доказана.

Замечание. Основная лемма сохраняет силу, если функция $\varphi^{(2)}_i = \varphi^h_i - (\delta_{i,\,n}\,\tilde{\varphi}^h_n + \delta_{i,\,n+1}\,\varphi^h_{n+1})$ удовлетворяет условию сходимости по одной из применяемых нами норм:

$$\|\varphi^{(2)}_i\|_1 = \max_{\bar{n}<i<\bar{\bar{n}}} |\varphi^{(2)}_i| = \rho(h),$$

$$\|\varphi^{(2)}_i\|_2 = \sum_{i=\bar{n}+1}^{\bar{\bar{n}}-1} h\,\Big|\sum_{s=\bar{n}+1}^{i} h\varphi^{(2)}_s\Big| = \sum_{i=\bar{n}+1}^{\bar{\bar{n}}-1} h\,\Big|\sum_{\substack{s=\bar{n}+1\\(s\neq n,\ s\neq n+1)}}^{i} h\varphi_s\Big| = \rho(h),$$

$$\|\varphi^{(2)}_i\|_3 = \sum_{i=\bar{n}+1}^{\bar{\bar{n}}-1} h\,|\varphi^{(2)}_i| = \rho(h).$$

В самом деле, из неравенств

$$\|z^{(2)}_i\|_1 \leqslant M\,\|\varphi^{(2)}_i\|_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, 3),$$

полученных в § 2 п. 3, следует

$$\| z_i^{(2)} \|_1 = \rho(h).$$

Лемма 1. *Если коэффициенты оператора $\tilde{L}_h$ удовлетворяют условиям* ($\bar{\alpha}$) и ($\bar{\beta}$), *а функция* $\varphi_i^{(2)} = \tilde{\varphi}_i^h - (\delta_{i,n}\tilde{\varphi}_n^h + \delta_{i,n+1}\tilde{\varphi}_{n+1}^h)$ *на интервале* $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ *имеет по какой-либо норме* $\| \varphi_i^{(2)} \|_\sigma$ ($\sigma = 1, 2, 3$) *порядок* h^m:

$$\| \varphi_i^{(2)} \|_\sigma = O(h^m),$$

то для того чтобы некоторая последовательность решений уравнения (17) *имела на интервале* $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ *m-й* ($m = 1, 2$) *порядок малости при* $h \to 0$ ($\| \bar{z}_i^h \|_1 = O(h^m)$), *необходимо выполнение условий*

$$h^2 \tilde{\varphi}_n^h = O(h^m), \quad h^2 \varphi_{n+1}^h = O(h^m), \qquad (\text{а}_m)$$

$$\Delta(\xi, h) = O(h^m). \qquad (\text{б}_m)$$

4. Необходимое условие сходимости для исходной схемы в классе разрывных коэффициентов. Для выяснения необходимых условий сходимости разностной схемы $L_h^{(k, q, f)}$ из исходного семейства $\mathscr{L}(n_1, n_2, n_3)$ в классе разрывных коэффициентов рассмотрим разностную задачу (III) для погрешности $z_i = y_i - u(x_i)$.

Проведем сначала исследование для схемы $L_h^{(k)}$ первого ранга, удовлетворяющей (У. А. 1).

Пусть $\xi = x_n + \theta \cdot h$ ($0 < \theta \leqslant 1$) — точка разрыва коэффициента $k(x) \in Q^{(1)}$. Учитывая, что при $i \neq n$, $i \neq n+1$

$$B_i^{(h, k)} = k_i + hk_i' B_1^{(0)}[s] + h\rho(h),$$

$$A_i^{(h, k)} = k_i + hk_i'(1 + A_1^{(0)}[s]) + h\rho(h),$$

получим, что $\varkappa_i = \dfrac{B_i^{(h, k)}}{A_{i+1}^{(h, k)}} = 1 + h\rho(h)$ при $i \neq n$ в некоторой окрестности $(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ точки ξ, не содержащей других точек разрыва функции $k(x)$.

Отсюда и из условия $0 \leqslant M_1 \leqslant k(x) \leqslant M_2$ следует, что условия (α) и (β) выполнены и

$$\varphi_i^h = (L_h^{(k)} u_i) - (L^{(k)} u)_i = \rho(h)$$

в точках $i \neq n$, $i \neq n+1$ на интервале $(\bar{x} + h, \bar{\bar{x}} - h)$.

Учитывая замечание в конце п. 3, убеждаемся, что условие

$$\Delta = h(B_n^{(h, k)} \varphi_{n+1}^h + A_{n+1}^{(h, k)} \varphi_n^h) = \rho(h) \qquad (23')$$

необходимо для сходимости к нулю решения задачи (III), т. е. для сходимости разностной схемы $L_h^{(k)}$ и, следовательно, схемы $L_h^{(k, q, f)}$ из $\mathscr{L}(1, 0, 0)$ в классе разрывных коэффициентов.

Условие $h^2 \varphi_n^h = \rho(h)$ выполнено, так как $h\varphi_n^h = O(1)$.

Подставляя в (23) выражения (5) и (6) для φ_n^h и φ_{n+1}^h, получим необходимое условие сходимости схемы $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ из семейства $\mathcal{L}(1,\ 0,\ 0)$ в форме

$$\frac{B_n^{(h,\,k)}\,B_{n+1}^{(h,\,k)}}{k_{\text{п}}}-\frac{A_n^{(h,\,k)}\,A_{n+1}^{(h,\,k)}}{k_{\text{л}}}=\rho\,(h). \tag{24'}$$

Рассмотрим теперь консервативные схемы.

Теорема 1. *Любая консервативная схема $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ нулевого ранга удовлетворяет необходимому условию сходимости в классе $k,\ q,\ f\in Q^{(0)}$.*

В самом деле, если схема консервативна, то $B_n^{(h,\,k)}=A_{n+1}^{(h,\,k)}$,

$$A_n^{(h,\,k)}=A^h\,[k\,(x_n+sh)]=A^{(0)}\,[k\,(x_n+sh)]+\rho\,(h)=k_n+\rho\,(h)=k_{\text{л}}+\rho\,(h),$$

$$B_{n+1}^{(h,\,k)}=A_{n+2}^{(h,\,k)}=k_{n+2}+\rho\,(h)=k_{\text{п}}+\rho\,(h).$$

Подставляя эти выражения в левую часть условия (24′), будем иметь

$$\frac{B_n^{(h,\,k)}\,B_{n+1}^{(h,\,k)}}{k_{\text{п}}}-\frac{A_n^{(h,\,k)}\,A_{n+1}^{(h,\,k)}}{k_{\text{л}}}=A_{n+1}^{(h,\,k)}\left(\frac{B_{n+1}^{(h,\,k)}}{k_{\text{п}}}-\frac{A_n^{(h,\,k)}}{k_{\text{л}}}\right)=\rho\,(h).$$

Теорема 2. *Любая консервативная схема $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ первого порядка аппроксимации из семейства $\mathcal{L}(2,\,1,\,1)$ удовлетворяет необходимым условиям 1-го порядка точности в классе разрывных коэффициентов $k(x)\in Q^{(1)}$, $q\,(x)\in Q^{(0)}$, $f\,(x)\in Q^{(0)}$.*

В самом деле, условие $h^2\varphi_n=O\,(h)$ или $h\varphi_n=O\,(1)$ выполнено автоматически. Что касается второго условия $\Delta=O\,(h)$, то оно легко проверяется, если учесть, что $B_n^{(h,\,k)}=A_{n+1}^{(h,k)}$, $B_{n+1}^{(h,\,k)}=k_{\text{п}}+O\,(h)$, $A_n^{(h,\,k)}=k_{\text{л}}+O\,(h)$. Из условий теоремы следует, что $\varphi_i=O\,(h)$ при $i\neq n$, $i\neq n+1$. Поэтому здесь лемма 1 применима ($m=1$).

5. Необходимые условия второго порядка точности в классе разрывных коэффициентов. Рассмотрим разностную краевую задачу (III) для функции $z_i=y_i-u\,(x_i)$.

Для простоты предположим, что $k,\ q,\ f$ имеют одну точку разрыва. Полагаем $\varphi_i^{(1)}=\delta_{i,\,n}\,\varphi_n+\delta_{i,\,n+1}\,\varphi_{n+1}$, $\varphi_i^{(2)}=\varphi_i-\varphi_i^{(1)}$. Если $k\,(x)\in Q^{(3)}$, $q\,(x)\in Q^{(2)}$, $f\,(x)\in Q^{(2)}$, а схема $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ принадлежит семейству $\mathcal{L}\ (3,\ 2,\ 2)$ и имеет второй порядок аппроксимации, то $\|\varphi_i^{(2)}\|_1=O\,(h^2)$ и условия леммы 1 выполнены.

В силу леммы 1 необходимые условия второго порядка точности схемы $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ в классе разрывных коэффициентов имеют вид:

$$\varphi_n=O\,(1)\ \text{или}\ \varphi_{n+1}=O\,(1), \tag{а$_2$}$$

$$\Delta=O\,(h^2). \tag{б$_2$}$$

Если схема консервативна, то условие (б$_2$) эквивалентно условию (б$_2'$): $\varphi_n+\varphi_{n+1}=O\,(h)$.

Лемма 2. *Необходимому условию второго порядка точности*

$$\varphi_n+\varphi_{n+1}=O\,(h) \tag{25}$$

в классе разрывных коэффициентов $k(x) \in Q^{(2)}$ удовлетворяет любая консервативная схема $L_h^{(k)}$ второго порядка аппроксимации.

Это утверждение является следствием формулы

$$\varphi_n^{(0)} + \varphi_{n+1}^{(0)} = (0{,}5 - \theta)\{(L^{(k)}u)_{\text{п}} - (L^{(k)}u)_{\text{л}}\} + O(h) = O(h),$$

так как $(L^{(k)}u)_{\text{п}} = (L^{(k)}u)_{\text{л}} = 0$, поскольку $u = u(x)$ есть решение уравнения $L^{(k)}u = 0$.

Отсюда следует, что для консервативной схемы $L_h^{(k)}$ второго порядка надо проверять только первое из необходимых условий $\varphi_n = O(1)$.

6. О достаточных условиях сходимости. В п. 5 мы установили необходимое условие сходимости исходной схемы $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ в некотором классе разрывных коэффициентов $(k(x) \in Q^{(1)},\ q(x) \in Q^{(0)},\ f(x) \in Q^{(0)})$.

Покажем, что это условие является и достаточным для сходимости.

Теорема 3. *Для того чтобы разностная схема $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ первого порядка аппроксимации из класса $\mathcal{L}(2,\ 1,\ 1)$ сходилась для любых коэффициентов $k(x) \in Q^{(1)}$, $q(x) \in Q^{(0)}$, $f(x) \in Q^{(0)}$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h$ $(j = 1,\ 2, \ldots, j_0)$ разрыва функций k, q и f выполнялось условие*

$$\Delta_j = h\,(B_{n_j}^{(h,\,k)}\varphi_{n_j+1} + A_{n_j+1}^{(h,\,k)}\varphi_{n_j}) = \rho(h), \tag{26}$$

где $\varphi_i = L_h^{(k,\,q,\,f)}u_i - (L^{(k,\,q,\,f)}u)_i$.

Доказательство. Необходимость условия $\Delta_j = \rho(h)$ установлена ранее. Для доказательства достаточности воспользуемся формулой

$$\|z_i\|_1 = \|y_i - u_i\|_1 \leqslant M\,\|\varphi_i\|_{\mathfrak{S}} \qquad (\mathfrak{S} = 1,\ 2,\ 3),$$

где M — постоянная, не зависящая от h.

Представим φ_i и z_i в виде сумм:

$$\varphi_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)},\quad \varphi_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{j_0}(\delta_{i,\,n_j}\varphi_{n_j} + \delta_{i,\,n_j+1}\varphi_{n_j+1}),$$

$z_i = z_i^{(1)} + z_i^{(2)}$, где $z_i^{(m)}$ — решение задачи (III) с правой частью $\varphi_i^{(m)}$ $(m = 1, 2)$. В точках $i \neq n_j$, $i \neq n_j + 1$ $(j = 1, 2, \ldots, j_0)$ $\varphi_i^{(2)} = \rho(h)$, пользуясь неравенством

$$\|z_i^{(2)}\|_1 \leqslant \frac{1}{M_1}\|\varphi_i^{(2)}\|_1,$$

получим $\|z_i^{(2)}\|_1 = \max\limits_{0<i<N}|z_i^{(2)}| = \rho(h)$.

Для оценки $z_i^{(1)}$ воспользуемся неравенством

$$\|z_i^{(1)}\|_1 \leqslant M\,\|\Lambda_s\varphi_s^{(1)}\|_2 \qquad \left(\|\psi_s\|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h\left|\sum_{s=1}^{i} h\psi_s\right|\right), \tag{27}$$

где $\Lambda_s = \prod\limits_{m=1}^{s-1}(B_m^h / A_{m+1}^h)$, а M — постоянная, не зависящая от h.

Для определенности будем считать, что $n_j < n_{j+1}$.

Подставляя в (27) выражение для $\varphi_s^{(1)}$, получим

$$\|z_i^{(1)}\|_1 \leqslant M \sum_{j=1}^{j_0} [\Lambda_{n_j} \varphi_{n_j} h^2 + h (\Lambda_{n_j} \varphi_{n_j} + \Lambda_{n_j+1} \varphi_{n_j+1})].$$

Подставляя в первую часть $\Lambda_{n_j+1} = \Lambda_{n_j} (B_{n_j} / A_{n_j+1})$, находим

$$\|z_i^{(1)}\|_1 \leqslant M \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} \Lambda_{n_j} \varphi_{n_j} h^2 + \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\Lambda_{n_j}}{A_{n_j+1}} \Delta_j \right\}. \tag{28}$$

Первое слагаемое имеет первый порядок малости, так как $h\varphi_{n_j} = O(1)$. Второе слагаемое сходится к нулю при $h \to 0$, так как по условию $\Delta_j = \rho(h)$, а число j_0 — конечно. Таким образом,

$$\|z_i\|_1 \leqslant \|z_i^{(1)}\|_1 + \|z_i^{(2)}\|_1 = \rho(h).$$

Теорема 4. *Если $L_h^{(k, q, f)}$ — разностная схема типа $\mathcal{L}(m+1, m, m)$ m-го ($m = 1, 2$) порядка аппроксимации, то для того, чтобы она в классе $k(x) \in Q^{(m+1)}$, $q, f \in Q^{(m)}$ имела m-й порядок точности, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждой точки $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h$ ($j = 1, 2, \ldots, j_0$) разрыва функций k, q, f выполнялись условия*

$$h^2 \varphi_{n_j}^h = O(h^m), \quad h^2 \varphi_{n_j+1}^h = O(h^m), \tag{а$_m$}$$

$$\Delta(\xi_j, h) = O(h^m) \quad (j = 1, 2, \ldots, j_0). \tag{б$_m$}$$

Для доказательства достаточности условий (а$_m$) и (б$_m$) надо учесть, что $\varphi_i^{(2)} = O(h^m)$, $\|z_i^{(2)}\|_1 = O(h^m)$, и воспользоваться неравенством (28). Необходимость следует из леммы 1.

§ 4. Коэффициенто-устойчивые разностные схемы

При решении дифференциального уравнения $L^{(k,q,f)}$ методом конечных разностей может оказаться, что информация о коэффициентах уравнения k, q, f является недостаточно полной. Это может случиться, например, когда эти коэффициенты определяются приближенно с помощью некоторого вычислительного алгоритма.

Поэтому даже при точном вычислении коэффициентов разностной схемы $L_h^{(k, q, f)}$ будет допускаться погрешность. С другой стороны, может оказаться, что функционалы A^h, B^h, D^h, F^h сами вычисляются приближенно, что приводит также к погрешности в коэффициентах схемы. Отсюда ясно, насколько важной является задача изучения схем с возмущенными коэффициентами.

Ниже вводится норма возмущения коэффициентов схемы и с ее помощью дается определение коэффициенто-устойчивой, или ко-устойчивой, разностной схемы.

Основной результат данного параграфа выражает теорема о том, что необходимым и достаточным условием ко-устойчивости канонической схемы типа $\mathcal{L}(1, 0, 0)$ является ее консервативность (теорема 3).

1. Зависимость решения дифференциального уравнения от коэффициентов. Рассмотрим краевую задачу

$$L^{(k, q, f)} u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \overline{u}_1, \quad u(1) = \overline{u}_2 \tag{1}$$

и сравним ее решение $u(x)$ с решением $\tilde{u}(x)$ возмущенной задачи

$$L_{\tilde{u}}^{(\tilde{k},\tilde{q},\tilde{f})} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad \tilde{u}(0) = \bar{u}_1, \quad \tilde{u}(1) = \bar{u}_2. \tag{2}$$

Будем предполагать, что коэффициенты задач (1) и (2) удовлетворяют условиям

$$0 < M_1 \leqslant k(x) \leqslant M_2, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant M_3, \quad |f(x)| \leqslant M_4. \tag{α}$$

Лемма 1. *Если коэффициенты уравнений* (1) *и* (2) *кусочно-непрерывны и удовлетворяют условиям* (α), *то*

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leqslant C_1 \int_0^1 |k(x) - \tilde{k}(x)|\,dx + C_2 \int_0^1 |q(x) - \tilde{q}(x)|\,dx + \\ + C_3 \int_0^1 |f(x) - \tilde{f}(x)|\,dx, \tag{3}$$

где C_1, C_2, C_3 — *положительные постоянные, зависящие только от* M_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$.

В самом деле, разность $z = u - \tilde{u}$ определяется из

$$L^{(k,q)} z = -\varphi, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \tag{4}$$

где $\varphi = L^{(k,q,f)}\tilde{u} - L^{(\tilde{k},\tilde{q},\tilde{f})}\tilde{u} = [(k - \tilde{k})\tilde{u}']' - (q - \tilde{q})\tilde{u} + (f - \tilde{f})$. (5)

Решение задачи (4) представим в виде

$$z(x) = \int_0^1 G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = -\int_0^1 [k(\xi) - \tilde{k}(\xi)]\,\frac{dG}{d\xi}(x, \xi)\,\tilde{u}'(\xi)\,d\xi - \\ - \int_0^1 G(x, \xi)\,[q(\xi) - \tilde{q}(\xi)]\,\tilde{u}(\xi)\,d\xi + \int_0^1 G(x, \xi)\,[f(\xi) - \tilde{f}(\xi)]\,d\xi, \tag{6}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи (1).

Учитывая оценки для функции Грина и решения задачи (1), устанавливаемые по аналогии с оценками, найденными в § 2:

$$0 \leqslant G(x, \xi) \leqslant \frac{1}{M_1}, \quad \left|\frac{dG}{d\xi}\right| \leqslant \frac{M_1 + M_3}{M_1^2}, \quad |u| \leqslant M_5, \quad |u'| \leqslant M_5 (M_1 + M_3) / M_1^2,$$

где

$$M_5 = [M_4 + (|\bar{u}_1| + |\bar{u}_2|) M_3] / M_1 + |\bar{u}_2| + |\bar{u}_1|,$$

получим из (6) неравенство (3).

Неравенство (3) выражает устойчивость решения задачи (1) по отношению к изменению коэффициентов уравнения.

2. Принцип ко-устойчивости разностных схем. Переходя к разностным схемам, естественно требовать, чтобы они обладали также свойством устойчивости по отношению к возмущению их коэффициентов независимо от природы этого возмущения.

Наряду с исходной схемой $L_h^{(k,q,f)}$ рассмотрим «возмущенную» схему $\tilde{L}_h^{(\tilde{k},\tilde{q},\tilde{f})}$, коэффициенты которой $\tilde{A}_i^h$, $\tilde{B}_i^h$, $\tilde{D}_i^h$, $\tilde{F}_i^h$ получаются из коэффициентов A_i^h, B_i^h, D_i^h, F_i^h с помощью произвольного возмущения. В общем случае это возмущение может быть вызвано искажением коэффициентов дифференциального уравнения $L^{(k,q,f)} u = 0$, искажением функционалов

$A^h[\psi]$, $B^h[\psi]$, $D^h[\psi]$ и $F^h[\psi]$ и погрешностями, допускаемыми уже при вычислении самих коэффициентов схемы в точках сетки.

Наряду с задачей (II) мы будем рассматривать задачу

$$\widetilde{L}_h^{(\widetilde{k},\widetilde{q},\widetilde{f})}\widetilde{y}_i = 0,\ 0 < i < N,\ \widetilde{y}_0 = \bar{u}_1,\ \widetilde{y}_N = \bar{u}_2. \tag{$\widetilde{\text{II}}$}$$

Для оценки величины искажения коэффициентов мы вводим некоторую норму, например,

$$\|\psi_i\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} |\psi_i|\, h. \tag{7}$$

Для оценки решения мы по-прежнему пользуемся нормой

$$\|z_i\|_1 = \max_{0<i<N} |z_i|. \tag{8}$$

Будем говорить, что схема $L_h^{(k,q,f)}$ коэффициенто-устойчива, или ко-устойчива, если в случае сходимости при $h \to 0$ по норме (7) коэффициентов любым образом возмущенной схемы $\widetilde{L}_h^{(\widetilde{k},\widetilde{q},\widetilde{f})}$ к коэффициентам схемы $L_h^{(k,q,f)}$ решение задачи ($\widetilde{\text{II}}$) равномерно сходится к решению задачи (I) при условии, что коэффициенты $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ принадлежат некоторому классу $Q^{(m)}$ $(m \geqslant 0)$.

Иными словами, схема $L_h^{(k,q,f)}$ ко-устойчива, если из условий

$$\|\widetilde{A}_i^h - A_i^h\|_3 = \rho(h),\ \|\widetilde{B}_i^h - B_i^h\|_3 = \rho(h),\ \|\widetilde{D}_i^h - D_i^h\|_3 = \rho(h),$$
$$\|\widetilde{F}_i^h - F_i^h\|_3 = \rho(h) \tag{9}$$

следует

$$\|\widetilde{z}_i\|_1 = \|\widetilde{y}_i - u(x_i)\|_1 = \rho(h). \tag{10}$$

Из определения видно, что ко-устойчивость схемы сводится к двум требованиям: 1) сходимости схемы ($\|y_i^h - u(x_i)\|_1 = \rho(h)$ в $Q^{(m)}(m \geqslant 0)$); 2) устойчивости решения разностной краевой задачи (II) относительно возмущения коэффициентов схемы ($\|\widetilde{y}_i - y_i\|_1 = \rho(h)$):

$$\|\widetilde{y}_i - u(x_i)\|_1 \leqslant \|\widetilde{y}_i - y_i\|_1 + \|y_i - u(x_i)\|_1. \tag{11}$$

Для изучения структуры ко-устойчивых разностных схем, принадлежащих исходному семейству, мы специализируем тип возмущения коэффициентов разностного уравнения, предполагая, что оно вызвано возмущением коэффициентов дифференциального уравнения. Обозначим через $\widetilde{k}(x, h)$, $\widetilde{q}(x, h)$, $\widetilde{f}(x, h)$ возмущенные коэффициенты дифференциального уравнения, зависящие от шага h разностной сетки S_h. Соответствующие коэффициенты уравнения $L_h^{(\widetilde{k},\widetilde{q},\widetilde{f})} y_i = 0$ равны

$$\widetilde{A}_i^h = A^h[\widetilde{k}(x_i + sh, h)],\ \widetilde{B}_i^h = B^h[\widetilde{k}(x_i + sh, h)],$$
$$D_i^h = D^h[\widetilde{q}(x_i + sh, h)],\ \widetilde{F}_i^h = F^h[\widetilde{f}(x_i + sh, h)].$$

В частности, в п. 4 мы будем рассматривать возмущения коэффициентов k, q, f на одном интервале сетки в окрестности точки разрыва этих функций.

3. **Ко-устойчивость консервативной схемы.** Покажем, что консервативные схемы обладают свойством ко-устойчивости.

Рассмотрим сначала решения y_i^h и $\tilde{y}_i^h$ двух разностных краевых задач:

$$L_h y_i^h = \frac{1}{h^2}\Delta(A_i^h \nabla y_i^h) - D_i^h y_i^h = -F_i^h, \quad 0 < i < N, \quad y_0^h = \bar{u}_1, \quad y_N^h = \bar{u}_2, \tag{12}$$

$$\tilde{L}_h \tilde{y}_i^h = \frac{1}{h^2}\Delta(\tilde{A}_i^h \nabla \tilde{y}_i^h) - \tilde{D}_i^h \tilde{y}_i^h = -F_i^h, \quad 0 < i < N, \quad \tilde{y}_0^h = \bar{u}_1, \quad \tilde{y}_N^h = \bar{u}_2, \tag{13}$$

где L_h и $\tilde{L}_h$ — консервативные разностные операторы.

Лемма 2. *Если коэффициенты консервативных разностных уравнений* (12) и (13) *удовлетворяют условиям* (α), *то справедливо неравенство*

$$\|\tilde{y}_i^h - y_i^h\|_1 \leqslant C_1\|\tilde{A}_i^h - A_i^h\|_2 + C_2\|\tilde{D}_i^h - D_i^h\|_2 + C_3\|\tilde{F}_i^h - F_i^h\|_2, \tag{14}$$

где C_1, C_2, C_3 — положительные постоянные, зависящие только от постоянных M_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Для доказательства этой леммы достаточно составить уравнение для разности $z_i^h = \tilde{y}_i^h - y_i^h$, после чего представить z_i^h с помощью разностной функции Грина задачи (13) и, применив первую разностную формулу Грина, воспользоваться оценками из § 2 для функции Грина и ее разностного отношения.

Обратимся теперь к вопросу о ко-устойчивости консервативной схемы $L_h^{(k,q,f)}$. Для этого нужно сравнить решения задач (II) и ($\tilde{\text{II}}$) при условии, что

$$\|\tilde{A}_i^h - A_i^h\|_3 = \rho(h), \quad \|\tilde{D}_i^h - D_i^h\|_3 = \rho(h), \quad \|\tilde{F}_i^h - F_i^h\|_3 = \rho(h). \tag{15}$$

Лемма 2 применима к консервативной схеме любого ранга. Поэтому будем иметь

$$\|\tilde{y}_i^h - y_i^h\|_1 = \rho(h). \tag{16}$$

Отсюда в силу неравенства (14) следует, что доказательство ко-устойчивости консервативной схемы целиком сводится к доказательству сходимости этой схемы в классе разрывных коэффициентов, так как

$$\|\tilde{y}^h - u\|_1 \leqslant \|y^h - u\|_1 + \rho(h).$$

Из теоремы § 3, п. 6 следует, что консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ из класса $\mathscr{L}(1, 0, 0)$ сходится, если

$$k(x) \in Q^{(1)}, \quad q(x) \in Q^{(0)}, \quad f(x) \in Q^{(0)}.$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Консервативная разностная схема $L_h^{(k,q,f)}$ первого ранга является ко-устойчивой, если $k(x) \in Q^{(1)}$, $q, f \in Q^{(0)}$.*

В § 5 будет доказана теорема о ко-устойчивости консервативной схемы нулевого ранга в классе $Q^{(0)}$ ($k, q, f \in Q^{(0)}$).

Справедливо ли обратное утверждение, т. е. всякая ли ко-устойчивая схема консервативна? Положительный ответ на этот вопрос будет дан в п. 5.

4. Необходимое условие ко-устойчивости. Для практического использования требования ко-устойчивости схемы найдем необходимое условие ко-устойчивости, которое носит локальный характер и аналогично необходимому условию сходимости из § 3, п. 3.

Пусть $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ — некоторая ко-устойчивая схема типа $\mathscr{L}(1,\,0,\,0)$. Поскольку речь идет о необходимом условии, то мы можем вести изложение для простейшего случая схемы $L_h^{(k)}$ первого ранга, полагая $q(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 0$.

Пусть $k(x)$ — некоторая функция из $Q^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$, имеющая разрыв в иррациональной точке $\xi = x_n + \theta \cdot h$, $x_n = n \cdot h$, $0 < \theta < 1$. Введем функцию $\widetilde{k}(x,\,h)$, совпадающую с $k(x)$ всюду, кроме интервала $(x_n,\,x_{n+1})$. Тогда коэффициенты $\widetilde{A}_i^h = A_i^{(h,\,\widetilde{k})}$ и $\widetilde{B}_i^h = B_i^{(h,\,\widetilde{k})}$ будут совпадать с $A_i^h = A^{(h,\,k)}$ и $B_i^h = B_i^{(h,\,k)}$ всюду, кроме $i = n$ и $i = n + 1$.

Поскольку схема $L_h^{(k)}$ по предположению ко-устойчива (т. е. $\|\widetilde{y}^h - u\| = \rho(h)$) и имеет первый ранг, то мы находимся в условиях применимости основной леммы § 3. Пользуясь выражениями $\widetilde{\varphi}_n$ и $\widetilde{\varphi}_{n+1}$ для схемы $L_h^{(\widetilde{k})}$, приведенными в п. 1, § 3, получим условие

$$\frac{\widetilde{B}_n^h \widetilde{B}_{n+1}^h}{k_{\text{п}}} - \frac{\widetilde{A}_n^h \widetilde{A}_{n+1}^h}{k_{\text{л}}} = \rho(h), \tag{17}$$

которое тем самым является необходимым условием ко-устойчивости.

В дальнейшем мы будем для простоты считать, что $k(x)$ — кусочно-постоянная функция ($k(x) = k_{\text{л}}$ при $x < \xi$ и $k(x) = k_{\text{п}}$ при $x \geqslant \xi$).

Для задания функции $\widetilde{k}(x,\,h)$ введем произвольную кусочно-непрерывную положительную функцию $\mu^*(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, а также функцию

$$\mu(s) = \begin{cases} k_{\text{л}}, & s \leqslant 0, \\ \mu^*(s), & 0 < s < 1, \\ k_{\text{п}}, & s \geqslant 1 \end{cases} \tag{18}$$

и положим

$$\widetilde{k}(x,\,h) = \mu\left(\frac{x - x_n}{h}\right). \tag{19}$$

Поскольку коэффициент $\widetilde{k}(x,\,h)$ должен удовлетворять условию ограниченности снизу ($\widetilde{k}(x,\,h) \geqslant M_1 > 0$), то и функция $\mu(s)$ подчинена этому условию.

Функции той же структуры, что и $\mu(s)$, в дальнейшем будем называть функциями типа μ.

Подставляя (19) в условие (17), получим необходимое условие ко-устойчивости

$$\frac{B[\mu(s)]\,B[\mu(1+s)]}{k_{\text{п}}} - \frac{A[\mu(s)]\,A[\mu(1+s)]}{k_{\text{л}}} = 0, \tag{20}$$

где $A[\mu]$ и $B[\mu]$ — канонические части функционалов $A^h[\mu]$ и $B^h[\mu]$ (индекс (0) у функционалов $A^{(0)}$ и $B^{(0)}$ мы опускаем).

Потребуем теперь, чтобы условие (20) выполнялось для функции $\mu(s) + \delta \cdot \varphi(s)$ (типа μ), где δ — произвольный неотрицательный параметр,

$$\varphi(s) = \begin{cases} k_{\text{л}}, & s \leqslant 0, \\ \varphi^*(s), & 0 < s < 1, \\ 0, & s \geqslant 1, \end{cases} \tag{21}$$

где $\varphi^*(s)$ — произвольная кусочно-непрерывная неотрицательная функция.

Тогда будем иметь

$$\frac{B[\mu(s)+\delta\cdot\varphi(s)]\,B[\mu(1+s)+\delta\cdot\varphi(1+s)]}{k_{\text{п}}}-$$
$$-\frac{A[\mu(s)+\delta\cdot\varphi(s)]\,A[\mu(1+s)+\delta\cdot\varphi(1+s)]}{k_{\text{л}}(1+\delta)}=0. \tag{22}$$

Учитывая затем разложения

$$A[\mu+\delta\cdot\varphi]=A[\mu]+\delta\cdot A_1[\mu,\ \varphi]+\delta\cdot\rho(\delta),$$
$$B[\mu+\delta\cdot\varphi]=B[\mu]+\delta\cdot B_1[\mu,\ \varphi]+\delta\cdot\rho(\delta),$$

в силу произвольности δ получим из (22):

$$1+\beta[\mu(s),\ \varphi(s)]+\beta[\mu(1+s),\ \varphi(1+s)]=$$
$$=\alpha[\mu(s),\ \varphi(s)]+\alpha[\mu(1+s),\ \varphi(1+s)], \tag{23}$$

где $\beta[f,\ \varphi]=\frac{B_1[f,\ \varphi]}{B[\varphi]}$, $\alpha[f,\ \varphi]=\frac{A_1[f,\ \varphi]}{A[f]}$ — логарифмические производные функционалов $B[f]$ и $A[f]$.

Аналогично находим

$$1+\alpha[\mu(s),\ \psi(-1+s)]+\alpha[\mu(1+s),\ \varphi(s)]=$$
$$=\beta[\mu(s),\ \psi(-1+s)]+\beta[\mu(1+s),\ \psi(s)], \tag{24}$$

где

$$\psi(s)=\begin{cases}0, & s\leqslant -1,\\ \psi^*(s), & -1<s<0,\\ k_{\text{п}}, & s\geqslant 0,\end{cases}$$

$\psi^*(s)$ — произвольная неотрицательная кусочно-непрерывная функция.

Тождества (23) и (24) являются также необходимыми условиями ко-устойчивости схемы $L_h^{(k)}$ и используются в п. 5.

5. Консервативность ко-устойчивой канонической схемы. Потребуем теперь, чтобы каноническая схема $L_h^{(k)}$ первого ранга удовлетворяла необходимому условию ко-устойчивости и, следовательно, соотношениям (23) и (24).

Лемма 3. *Если выполнено условие* (23), *то*

$$\beta[\mu(s),\ \omega(s)]=0, \tag{25}$$

где $\omega(s)$ — *произвольная неотрицательная кусочно-непрерывная функция*

$$\omega(s)\not\equiv 0,\ -1\leqslant s<0, \qquad \omega(s)\equiv 0 \text{ при } s\geqslant 0.$$

Возьмем ступенчатую функцию

$$\omega_0(s)=\begin{cases}k_{\text{л}}, & s<0,\\ 0, & s\geqslant 0.\end{cases} \tag{26}$$

Учитывая, что $\omega_0(1+s)=0$, $-1\leqslant s\leqslant 1$, находим:

$$\alpha[\mu(1+s),\ \omega_0(1+s)]=\beta[\mu(1+s),\ \omega_0(1+s)]=0.$$

Условие (23) для $\varphi(s)=\omega_0(s)$ принимает вид:

$$1+\beta[\mu(s),\ \omega_0(s)]=\alpha[\mu(s),\ \omega_0(s)]. \tag{27}$$

Шаблонные функционалы $A[f]$ и $B[f]$ схемы $L_h^{(k)}$ любого ранга явля-

ются нормированными и невозрастающими функционалами. Отсюда следует, что функционалы $\alpha[f, \varphi]$ и $\beta[f, \varphi]$ положительны по φ и $\beta[f, f] = 1$, $0 \leqslant \beta[f, \varphi] \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha[f, \varphi] \leqslant 1$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, $0 < \varepsilon \leqslant f$ (см. леммы 1, 3, 4, п. 3, § 1), в частности

$$\beta[\mu(s), \omega_0(s)] \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \alpha[\mu(s), \omega_0(s)] \leqslant 1.$$

Поэтому (27) справедливо только при

$$\beta[\mu(s), \omega_0(s)] = 0, \tag{28}$$
$$\alpha[\mu(s), \omega_0(s)] = 1. \tag{29}$$

Без ограничения общности можно считать $\omega(s) \leqslant \omega_0(s)$. В силу неотрицательности по второму аргументу функционала $\beta[f_1, f_2]$ будем иметь

$$0 \leqslant \beta[\mu(s), \omega(s)] \leqslant \beta[\mu(s), \omega_0(s)] = 0,$$

и, следовательно, $\beta[\mu(s), \omega(s)] = 0$.

Аналогично доказывается

Лемма 3*. *Если выполнено условие* (24), *то*

$$\alpha[\mu(s), \chi(s)] = 0, \tag{30}$$

где $\chi(s) \not\equiv 0$ *только на интервале* $0 < s \leqslant 1$, *а в остальном является произвольной кусочно-непрерывной неотрицательной функцией.*

Лемма 4. *Если* $B[f(s)]$ — *канонический функционал первого ранга, определенный для* $f(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$, *и его первый дифференциал* $B_1[f, \varphi] = \beta[f, \varphi] \cdot B[f]$ *удовлетворяет условию* (25), *то* $B[f(s)]$ *не зависит от* $f(s)$ *при* $-1 \leqslant s < 0$.

Докажем сначала лемму для функций типа μ. Пусть $\mu_0(s)$ и $\mu_1(s) = \mu_0(s) + \omega_0(s)$ — две функции типа μ, совпадающие при $s \geqslant 0$ и различные при $s < 0$. Введем функцию $\mu_\lambda(s) = \mu_0(s) + \lambda\omega_0(s)$, где λ — произвольное число на отрезке $[0,1]$. Если предположить, что $B[\mu_0(s)] \neq B[\mu_1(s)]$, то найдется такое число $\lambda = \bar{\lambda}$, что $\frac{\partial}{\partial\lambda} B[\mu_\lambda(s)]|_{\lambda=\bar{\lambda}} = B_1[\mu_{\bar{\lambda}}(s), \omega_0(s)] \neq 0$ и, следовательно, $\beta[\mu_\lambda(s), \omega_0(s)] \neq 0$, что противоречит условию (25) леммы.

Любую функцию $f(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$ (ограниченную снизу константой $M_1 > 0$) можно представить в виде

$$f(s) = \mu(s) + \omega(s), \tag{31}$$

где $\mu(s)$ — произвольная функция вида (18), а $\omega(s)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, отличная от нуля только при $s < 0$.

Лемма будет доказана, если мы убедимся, что

$$B[f(s)] = B[\mu(s)]. \tag{32}$$

Пусть $\omega_0^{(1)}(s)$ и $\omega_0^{(2)}(s)$ — ступенчатые функции вида (26), ограничивающие $\omega(s)$ снизу и сверху:

$$0 \leqslant \omega_0^{(1)}(s) \leqslant \omega(s) \leqslant \omega_0^{(2)}(s).$$

Тогда

$$f_1(s) \leqslant f(s) \leqslant f_2(s), \tag{33}$$

где $f_1(s) = \mu(s) + \omega_0^{(1)}(s)$, $f_2(s) = \mu(s) + \omega_0^{(2)}(s)$ — функции типа μ, для которых лемма уже доказана, так что

$$B[f_j(s)] = B[\mu(s)], \quad j = 0, 1.$$

Так как $B[f]$ — неубывающий функционал, то отсюда и из (33) вытекает (32).

Аналогично доказывается

Лемма 4*. *Если $A[f(s)]$ — канонический функционал первого ранга, определенный для $f(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$ и удовлетворяющий условию* (30), *то он не зависит от значений $f(s)$ при $s > 0$.*

Обратимся теперь к условию (23).

Учитывая, что $\varphi(1+s) = 0$ при $s \geqslant 0$ ($\varphi(s)$ — любая функция вида (21)), и пользуясь леммой 4, получаем

$$\beta[\mu(1+s), \varphi(1+s)] = 0.$$

Из леммы 4* следует, что

$$\alpha[\mu(s), \varphi(s)] = \alpha[k_л, k_л] = 1,$$

так как $\mu(s) = \varphi(s) = k_л$ при $s \leqslant 0$.

В результате формула (23) принимает вид:

$$\beta[\mu(s), \varphi(s)] = \alpha[\mu(1-s), \varphi(1+s)], \tag{34}$$

где $\mu(s)$ и $\varphi(s)$ — произвольные функции типа (18) и (21).

Покажем, что (34) эквивалентно равенству

$$B[\mu(s)] = A[\mu(1+s)]. \tag{35}$$

С этой целью образуем функционал

$$H[\mu(s)] = \ln \frac{B[\mu(s)]}{A[\mu(1+s)]},$$

равный нулю в силу лемм 4 и 4* при $\mu^*(s) = \mu_0^*(s) = k_л^{(0)} = \text{const}$, и докажем, что он равен нулю для любой функции $\mu(s)$. Допустим, что для некоторой функции $\mu_1(s) = \mu_0(s) + \varphi(s)$ ($\varphi(s)$ — функция вида (21)) $H[\mu_1(s)] = H[\mu_1(s)] - H[\mu_0(s)] \neq 0$. Тогда существует такое значение $\lambda = \bar{\lambda}$, при котором

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} H[\mu_\lambda(s)]\big|_{\lambda=\bar{\lambda}} = \beta[\mu_{\bar{\lambda}}(s), \varphi(s)] - \alpha[\mu_{\bar{\lambda}}(1+s), \varphi(1+s)] \neq 0,$$

где

$$\mu_\lambda(s) = \mu_0(s) + \lambda\varphi(s), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad \varphi(s) = k_л - k_л^{(0)} \neq 0 \text{ при } s \leqslant 0.$$

Полученное противоречие с условием (34) и означает, что $H[\mu] = 0$ для любой функции типа μ.

Пользуясь теперь леммами 4 и 4* и представлением (31), заключаем, что

$$B[f(s)] = A[f(1+s)],$$

где $f(s)$ — любая кусочно-непрерывная положительная функция, заданная на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 1$.

Тем самым доказана

Теорема 2. *Если разностная схема $L_h^{(k)}$ первого ранга удовлетворяет необходимому условию ко-устойчивости, то она консервативна.*

В самом деле, условие (36) означает, что

$$B[k(x_i + sh)] = A[k(x_i + (1+s)h)] = A[k(x_{i+1} + sh)], \text{ т. е. } B_i = A_{i+1}.$$

Из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием ко-устойчивости канонической схемы $L_h^{(k,q,f)}$ из семейства $\mathcal{L}(1, 0, 0)$ является консервативность этой схемы.*

§ 5. О сходимости и точности

После выяснения в § 4 того, что свойством ко-устойчивости обладают только схемы с консервативной канонической частью, мы в § 5 будем изучать только консервативные схемы.

В данном параграфе рассматриваются вопросы о сходимости и точности консервативных схем $L_h^{(k,q,f)}$ в классах $Q^{(m)}$ разрывных коэффициентов k, q, f дифференциального уравнения.

При этом используется оценка

$$\|z^h\|_1 \leqslant M \|\varphi^h\|_2,$$

полученная в § 2, п. 3 (формула (30)) для решения z_i^h задачи (III) с правой частью φ_i^h. Норма

$$\|\varphi^h\|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^{i} h\varphi_s^h \right|$$

оказывается весьма эффективным средством для доказательства не только теорем о сходимости и точности в случае разрывных коэффициентов, но и при доказательстве теоремы 3 о точности в классе $C^{(m)}$ гладких коэффициентов, так как использование этой нормы позволяет снизить требования как на ранг n схемы, так и на порядок m класса коэффициентов по сравнению с соответствующей теоремой, доказываемой при помощи неравенства

$$\|z^h\|_1 \leqslant M \|\varphi^h\|_1, \quad \|\varphi^h\|_1 = \max_{0 < i < N} |\varphi_i^h|$$

(см. § 2, п. 3, формула (29)).

1. О сходимости консервативных схем в классе разрывных коэффициентов.

Теорема 1. *Любая консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ нулевого ранга сходится в классе кусочно-непрерывных коэффициентов k, q, $f \in Q^{(0)}$.*

Для упрощения изложения приведем доказательство теоремы для случая, когда имеется только одна точка $\xi = x_n + \theta h$ $(x_n = nh,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ разрыва коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$. Вводя, как обычно, разность $z_i^h = y_i^h - u(x_i)$, получаем для нее разностную краевую задачу

$$L_h^{(k,q)} z_i^h = -\varphi_i^h, \quad 0 < i < N, \quad z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0, \tag{III}$$

где $\varphi_i^h = L_h^{(k,q,f)} u_i - (L^{(k,q,f)} u)_i$.

Представим правую часть φ_i^h в виде суммы

$$\varphi_i^h = \overline{\varphi}_i^{(1)} + \overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)}, \tag{1}$$

где

$$\varphi_i^{(2)} = \varphi_n^h \delta_{i,\,n} + \varphi_{n+1}^h \cdot \delta_{i,\,n+1}, \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{2}$$

$$\overline{\varphi}_i^{(1)} = -(D_i^{(h,\,q)} - q_i)\, u_i + (F_i^{(h,\,f)} - f_i), \quad i \neq n, \quad i \neq n+1, \tag{3}$$

$$\overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)} = \frac{1}{h^2}\, \Delta (A_i^{(h,\,k)} \nabla u_i) - (ku')_i', \quad i \neq n, \quad i \neq n+1, \tag{4}$$

$$\overline{\varphi}_i^{(1)} = \overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)} = 0, \quad i = n, \quad i = n+1.$$

Если $i \neq n$, $i \neq n+1$, то

$$F_i^{(h,\,f)} = F^h\,[f(x_i + sh)] = F^{(0)}\,[f_i + \rho(h)] + \rho(h) = f_i + \rho(h) \tag{5}$$

и, аналогично,

$$D_i^{(h,\,q)} = q_i + \rho(h), \tag{5'}$$

так что

$$\| \overline{\varphi}_i^{(1)} \|_1 = \rho(h). \tag{6}$$

В п. 1, § 1 было отмечено, что если $k, q, f \in Q^{(0)}$, то и производные u', $(ku')'$ решения $u(x)$ задачи (I) также кусочно-непрерывны. Поэтому при $i \neq n$ и $i \neq n+1$ можно написать

$$(ku')_{i+\frac{1}{2}} = (ku')_i + \frac{h}{2}\,(ku')_i' + h\rho(h),$$

$$(ku')_{i-\frac{1}{2}} = (ku')_i - \frac{h}{2}\,(ku')_i' + h\rho(h),$$

и, следовательно,

$$(ku')_i' = \frac{(ku')_{i+1/2} - (ku')_{i-1/2}}{h} + \rho(h). \tag{7}$$

Поскольку производная $u'(x)$ при $x \neq \xi$ непрерывна, то

$$\frac{\nabla u_i}{h} = u'_{i-1/2} + \rho(h), \text{ если } i \neq n+1. \tag{8}$$

В результате выражение для $\overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)}$ представим в следующем виде:

$$\overline{\overline{\varphi}}_i^{(1)} = \frac{\Delta\Omega_i}{h} + \rho(h), \tag{9}$$

где

$$\Omega_i = (A_i^{(h,\,k)} - k_{i-1/2})\, u'_{i-1/2} + \rho(h). \tag{10}$$

Так как $L_h^{(k)}$ — схема нулевого ранга, то

$$A_i^{(h,\,k)} = k_i + \rho(h) = k_{i-1/2} + \rho(h), \quad i \neq n+1.$$

Отсюда и из (10) заключаем, что

$$\Omega_i = \rho(h) \text{ для всех } i \neq n+1. \tag{11}$$

Для оценки решения задачи (III) воспользуемся полученным в § 2, п. 3 неравенством

$$\| z^h \|_1 \leqslant \overline{M}_5 \| \varphi^h \|_2. \tag{12}$$

Поскольку коэффициенты k и q удовлетворяют условиям

$$0 < M_1 \leqslant k(x) \leqslant M_2, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant M_3, \tag{α}$$

то таким же условиям удовлетворяют и $A_i^{(h,k)}$ и $D_i^{(h,q)}$. Тогда $\overline{M}_5 = \overline{M}_5(M_1, M_3)$ есть константа, зависящая только от M_1 и M_3.

Подставляя в (12) $\varphi_i^h = \overline{\varphi}_i^{(1)} + \overline{\overline{\varphi}}^{(1)} + \varphi_i^{(2)}$, получим

$$\| \varphi^h \|_1 \leqslant M_5 \{ \| \overline{\varphi}^{(1)} \|_2 + \| \overline{\overline{\varphi}}^{(1)} \|_2 + \| \varphi^{(2)} \|_2 \}.$$

Учитывая, что $\| \varphi^h \|_2 \leqslant \| \varphi^h \|_1$, из условия (6) найдем

$$\| \overline{\varphi}^{(1)} \|_2 = \rho(h). \tag{13}$$

Далее имеем

$$\| \overline{\overline{\varphi}}^{(1)} \|_2 = \sum_{i=1}^{n-1} h \, | \Omega_{i+1} - \Omega_1 | + \sum_{i=n+2}^{N-1} h \, | (\Omega_{i+1} - \Omega_1) + (\Omega_n - \Omega_{n+2}) | +$$
$$+ 2h \, | \Omega_n - \Omega_1 | \leqslant 4 \max_{0 < i < N \, (i \neq n+1)} | \Omega_i | + \rho(h). \tag{14}$$

Учитывая затем оценку (11), будем иметь

$$\| \overline{\overline{\varphi}}^{(1)} \|_2 = \rho(h). \tag{15}$$

Вычислим норму функции $\varphi^{(2)}$, определяемой формулой (2):

$$\| \varphi^{(2)} \|_2 = h^2 | \varphi_n^h | + h \, | \varphi_n^h + \varphi_{n+1}^h | \sum_{i=n+2}^{N-1} h \leqslant h^2 | \varphi_n | + h \, | \varphi_n + \varphi_{n+1} |. \tag{16}$$

Необходимое условие сходимости $\varphi_n + \varphi_{n+1} = \rho(h)$ для нашей схемы выполнено, и $h\varphi_n = O(1)$; поэтому

$$\| \varphi^{(2)} \|_2 = \rho(h). \tag{16'}$$

Объединяя оценки (13), (15) и (16′), получаем

$$\| z^h \|_1 = \rho(h). \tag{17}$$

2. О точности консервативной схемы.

Теорема 2. *Консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ первого ранга имеет в классе кусочно-непрерывных и кусочно-гладких функций $k, q, f \in Q^{(1)}$ первый порядок точности.*

Чтобы убедиться в справедливости теоремы (2), достаточно повторить доказательство теоремы 1, заменив всюду $\rho(h)$ через $O(h)$.

Теорема 3. *Консервативная схема $L_h^{(k,q,f)}$ второго ранга, удовлетворяющая условиям* (У.А.2) *второго порядка аппроксимации, имеет второй порядок точности в классе $C^{(2)}$ коэффициентов k, q, f.*

Однако такая схема имеет, вообще говоря, первый порядок точности в $Q^{(m)}$ (при любом $m \geqslant 1$).

Если $k(x) \in C^{(2)}$, то

$$A_i^{(h,k)} = k_{i-1/2} + hk'_{i-1/2}(A_1^{(0)}[s] + 0{,}5) + O(h^2) = k_{i-1/2} + O(h^2), \tag{18}$$

так как $A_1^{(0)}[s] = -0{,}5$ (условие второго порядка аппроксимации схемы $L_h^{(k)}$).

Так как существуют производные u''' и k'', то

$$(ku')'_i = \frac{(ku')_{i+1/2} - (ku')'_{i-1/2}}{h} + O(h^2),$$
$$\Delta u_i / h = u'_{i+1/2} + O(h^2).$$

Положим $\varphi_i^h = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)}$, где

$$\begin{gathered}\varphi_i^{(1)} = -(D_i^{(h,q)} - q_i)\,u_i + (F_i^{(h,f)} - f_i),\\ \varphi_i^{(2)} = \frac{\Delta(A_i^{(h,k)}\nabla u_i)}{h^2} - (ku')'_i = \frac{\Delta\Omega_i}{h} + O(h^2),\\ \Omega_i = (A_i^{(h,k)} - k_{i-1/2})\,u'_{i-1/2} + O(h^2).\end{gathered} \tag{19}$$

Если учесть условие (18), то получим сразу

$$\Omega_i = O(h^2). \tag{20}$$

Из условий теоремы следует также, что

$$\begin{gathered}D_i^{(h,q)} = q_i + O(h^2),\ F_i^{(h,f)} = f_i + O(h^2),\\ \varphi_i^{(1)} = O(h^2).\end{gathered} \tag{21}$$

Обращаясь затем к формуле (12), будем иметь для решения задачи (III)

$$\|z^h\|_1 \leqslant M_5\{\|\varphi^{(1)}\|_2 + \varphi^{(2)}\|_2\},$$

причем $\|\varphi^{(1)}\|_2 = O(h^2)$ в силу условия (21).

Воспользуемся формулой (19):

$$\|\varphi^{(2)}\|_2 = \sum_{i=1}^{N} h\,|\Omega_i - \Omega_1| + O(h^2),$$

откуда, учитывая оценку (20), получаем

$$\|\varphi^{(2)}\|_2 = O(h^2),$$

т. е. $\|z^h\|_1 = O(h^2)$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Консервативная симметричная схема $L_h^{(k,q,f)}$ второго ранга имеет второй порядок точности в $C^{(2)}$.* В самом деле, такая схема удовлетворяет (У. А. 2.), т. е. всем условиям теоремы (3).

Замечание. В условиях теорем 2 и 3 можно ослабить требования дифференцируемости коэффициентов. Теорема 3 сохраняет силу, если k, q, $f \in C^{(1,1)}$, где $C^{(1,1)}$ — класс функций, первая производная которых удовлетворяет на отрезке $[0, 1]$ условию Липшица. Теорема 2 сохраняет силу, если k, q, $f \in Q^{(0,1)}$, где $Q^{(0,1)}$ — класс кусочно-непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, удовлетворяющих в интервалах их непрерывности условию Липшица.

Замечание аналогичного типа относится и к теореме 4.

Теорема 4. *Для того чтобы консервативная схема второго ранга, удовлетворяющая условиям второго порядка аппроксимации, имела второй порядок точности в классе $Q^{(m)}$ $(m \geqslant 2)$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям*

$$\varphi_{n_j}^h = O(1), \tag{а$_2$}$$

$$\varphi_{n_j}^h + \varphi_{n_j+1}^h = O(h) \tag{б$_2$}$$

в окрестности точек $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h$ $(x_{n_j} \cdot h,\quad 0 \leqslant \theta_j \leqslant 1,\quad j = 1, 2, \ldots, j_0)$ разрыва коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$.

Заметим, что отличие этой теоремы от аналогичной теоремы из § 3 состоит в ослаблении требований ранга схемы и порядка m класса $Q^{(m)}$ коэффициентов. Доказательство необходимости и в этом случае не представит труда. Изложение, как обычно, проведем для одного разрыва.

Проводя разбиение задачи (III) на три задачи в соответствии с формулами (1)—(4), убеждаемся, по аналогии с п. 1, что

$$\|\bar{\varphi}^{(1)}\|_1 = O(h^2),$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_i^{(1)} = \frac{\Delta\Omega_i}{h} + O(h^2), \quad \Omega_i = (A_i^{(h,k)} - k_{i-1/2})\, u'_{i-1/2} + O(h^2)$$

$$(i \neq n,\ i \neq n+1),$$

$$\bar{\varphi}_i^{(1)} = 0 \text{ при } i = n,\ n+1.$$

Поскольку $L_h^{(k)}$ — схема второго ранга, удовлетворяющая (У. А. 2), то $A_i^{(h,k)} = k_{i-1/2} + O(h^2)$ при $i \neq n+1$.

Отсюда следует, что

$$\Omega_i = O(h^2) \text{ для } i \neq n+1.$$

Пользуясь затем аналогом неравенства (14)

$$\|\bar{\varphi}^{(1)}\|_2 \leqslant 4 \max_{0 \leqslant i \leqslant N,\ i \neq n+1} |\Omega_i| + O(h^2),$$

будем иметь $\|\bar{\bar{\varphi}}^{(1)}\|_2 = O(h^2)$.

Если $\bar{z}_i^{(1)}$ и $\bar{\bar{z}}_i^{(1)}$ — решения задачи (III) с правыми частями $\bar{\varphi}_i^{(1)}$ и, соответственно, $\bar{\bar{\varphi}}_i^{(1)}$, то формула (12) и оценки для $\|\bar{\varphi}^{(1)}\|_2$ и $\|\bar{\bar{\varphi}}^{(1)}\|_2$ дают

$$\|\bar{z}^{(1)}\|_1 = O(h^2), \quad \|\bar{\bar{z}}^{(1)}\|_1 = O(h^2). \tag{22}$$

Обращаясь к задаче (III) для $z_i^{(2)} = z_i - (\bar{z}_i^{(1)} + \bar{\bar{z}}_i^{(1)})$ с правой частью $\varphi_i^{(2)} = \delta_{i,n}\varphi_n^h + \delta_{i,n+1}\varphi_{n+1}^h$ и учитывая результаты § 3, п. 3, видим, что условия (a_2) и ($б_2$) являются необходимыми для того, чтобы $\|z^{(2)}\|_1 = O(h^2)$. Из неравенств

$$\|z^{(2)}\|_1 \leqslant \overline{M}_5 \|\varphi^{(2)}\|_2$$

и

$$\|\varphi^{(2)}\|_2 \leqslant h^2 |\varphi_n| + h |\varphi_n + \varphi_{n+1}| \tag{23}$$

видно, что условия (a_2) и ($б_2$) являются и достаточными условиями для второго порядка малости функции $z^{(2)}$ и (в силу (22)) функции z. Тем самым теорема 4 доказана.

Если имеется не один, а конечное число разрывов в точках $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j \cdot h$ $(j = 1, 2, \ldots, j_0)$, то

$$\varphi_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{j_0} \varphi_{i,j}^{(2)},$$

где $\varphi_{i,j}^{(2)} = \delta_{i,n_j}\varphi_{n_j}^h + \delta_{i,n_j+1}\varphi_{n_j+1}^h$, и вместо (16) и (23) мы получим следующую оценку так:

$$\|\varphi_i^{(2)}\|_2 \leqslant \sum_{j=1}^{j_0} [\,|\varphi_{n_j}^h| h^2 + |\varphi_{n_j}^h + \varphi_{n_j+1}^h| h],$$

так как

$$\|\varphi_i^{(2)}\|_2 \leqslant \sum_{j=1}^{j_0} \|\varphi_{i,j}^{(2)}\|_2 .$$

Поступила в редакцию
14 X 1960

Цитированная литература

1. Л. А. Люстерник. Проблема Дирихле. Успехи матем. наук, 1940, вып. 8, стр. 115—124; О разностных аппроксимациях оператора Лапласа. Успехи матем. наук, 1954, 9, вып. 2, стр. 3—66.
2. R. Courant, K. O. Friedrichs, H. Lewy. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physiks. Math. Ann., 1928, **100**, 32 (русский перевод см. Успехи матем. наук, 1941, № 8, стр. 125—160).
3. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. М., Изд-во АН СССР, 1936.
4. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
5. Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Изд-во ин. лит., 1953.
6. В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
7. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. II. М., Физматгиз, 1959.
8. Р. Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во ин. лит., 1960.
9. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
10. Г. И. Марчук. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
11. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 3, стр. 393—396.
12. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. О представлении линейных функционалов в классе разрывных функций. Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 3, стр. 188—192.

13. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 4, стр. 562—565.
14. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов. Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 3, стр. 529—532.
15. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об одной наилучшей однородной разностной схеме. Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 4, стр. 779—782.
16. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. О наилучших разностных схемах. Успехи матем. наук, 1959, **14**, вып. 3 (87), стр. 185—188.
17. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности. Докл. АН СССР, 1960, **131**, № 3, стр. 514—517.
18. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. О канонических однородных разностных схемах. Докл. АН СССР, 1960, **131**, № 4, стр. 761—764.
19. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. О коэффициенто-устойчивости разностных схем. Докл. АН СССР, 1960, **131**, № 6, стр. 1264—1267.
20. А. А. Самарский. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения. Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям. (Ереван, ноябрь 1958 г.), Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960, стр. 148—160.