ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 1 Май 1961 Июнь № 3

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

При использовании метода конечных разностей для решения дифференциального уравнения одной из главных теоретических задач является выяснение вопроса о сходимости выбранной разностной схемы при неограниченном дроблении разностной сетки.

Разность z решения y разностной краевой задачи и решения u соответствующей задачи для исходного дифференциального уравнения обычно удовлетворяет неоднородному разностному уравнению с однородными краевыми и начальными условиями. Правая часть ψ этого уравнения означает погрешность аппроксимации для разностной схемы на решении u исходной задачи.

Вопрос о сходимости разностной схемы сводится к оценке функции z следующего вида:

$$\|z\|_1 \leqslant M \|\psi\|_2, \tag{a}$$

где $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ — некоторые нормы, M — положительная постоянная, не зависящая от разностной сетки.

В последнее время появились работы [1], [2], посвященные априорным оценкам для простейших разностных аппроксимаций дифференциального уравнения параболического типа.

Особый интерес к априорным оценкам вызван появлением разностных схем, для которых принцип максимума, вообще говоря, не имеет места.

При изучении сходимости разностных схем в классе гладких коэффициентов асимптотические порядки аппроксимации и точности обычно совпадают, т. е.

$$\|z\|_1 \leqslant M \|\psi\|_1,$$

где $\|z\|_1 = \max\limits_{\omega_h} |z|$, ω_h — разностная сетка.

В случае разрывных коэффициентов это утверждение, вообще говоря, неверно (см. [3], [4], [5]). В окрестности разрыва коэффициентов разностный оператор, вообще говоря, не аппроксимирует дифференциальный оператор. Поэтому применение принципа максимума при изучении сходимости исключено. Нужны другие априорные оценки со специально выбранной нормой $\|\psi\|_2$.

В статье [3] на примере схем для простейшего уравнения

$$L^{(k,\,q,\,f)}u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)\,u + f(x) = 0$$

было показано, что сходимость в классе разрывных коэффициентов следует из априорной оценки вида (а), где

$$\|\psi\|_2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^{i} h\psi_k \right|.$$

Априорная оценка в [1] получена в предположении «дифференцируемости» по x разностного аналога коэффициента теплопроводности.

В § 1 дается вывод аналогичной априорной оценки, свободный от указанного ограничения, что позволяет пользоваться оценкой и в случае стационарных (неподвижных) разрывов коэффициента теплопроводности. При этом мы рассматриваем разностную краевую задачу с краевыми условиями весьма общего вида.

В § 2 получена интегральная формула, которая позволяет получать априорные оценки в предположении лишь ограниченности сеточных функций—коэффициентов уравнения. Эти оценки справедливы для случая осевой симметрии и случая сферической симметрии. Новые априорные оценки являются эффективным средством для доказательства сходимости и оценки точности разностных схем в классе разрывных коэффициентов.

Однако вопросы сходимости и точности различных разностных схем будут рассмотрены отдельно.

§ 1. Первая априорная оценка

В этом параграфе мы получим априорную оценку для шеститочечного разностного уравнения в предположении «дифференцируемости» коэффициентов уравнения и краевых условий.

1. Обозначения

Введем необходимые определения и обозначения.

Пусть $\bar{Д} = (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ — основная область. Покроем ее разностной сеткой $\bar{\Omega}_{h\tau}$ с узловыми точками (x_i, t_j), где $x_i = i \cdot h$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, $h = 1/N$, $t_j = j \cdot \tau$, $j = 0, 1, 2, \ldots, L$, $\tau = T/L$. Обозначим ω_h^x сетку по x, т. е. совокупность точек $x_{i'} = i'h$, $i' = 0, 1, \ldots, i = x/h$, а ω_τ^t — совокупность точек $t_{j'} = j' \cdot \tau$, $j' = 0, 1, \ldots, j = t/\tau$.

Тогда $\bar{\Omega}_{h\tau} = \omega_h^x \times \omega_\tau^t$. Обозначим $\Omega_{h\tau}$ совокупность внутренних точек (x_i, t_j) области $\bar{\Omega}_{h\tau}$, для которых $0 < i < N$, $0 < j < L$.

Пусть z_i^j или $z(x_i, t_j)$ — некоторая сеточная функция, заданная на сетке $\bar{\Omega}_{h\tau}$.

Для упрощения записи будем всюду опускать индексы i и j и вместо z_i^j писать просто z или $z(x, t)$, помня о том, что здесь (x, t) — узловая точка сетки, т. е. точка множества $\bar{\Omega}_{h\tau}$. Не будем также отмечать зависимость сеточных функций от сетки и будем писать z вместо z^h или $z^{(h,\tau)}$.

Для разностных отношений примем следующие обозначения:

$$z_{\bar{x}} = \frac{z(x, t) - z(x - h, t)}{h}, \quad z_x = \frac{z(x + h, t) - z(x, t)}{h},$$

$$z_{\bar{t}} = \frac{z(x, t) - z(x, t - \tau)}{\tau}, \quad z_t = \frac{z(x, t + \tau) - z(x, t)}{\tau}.$$

Кроме того, будем писать

$$\check{z} = z(x, t-\tau), \qquad \hat{z} = z(x, t+\tau),$$
$$z^{(-1)} = z(x-h, t), \quad z^{(+1)} = z(x+h, t).$$

Выражение

$$\frac{\Delta(a_i^j \nabla z_i^j)}{h^2} = \frac{a_{i+1}^j (z_{i+1}^j - z_i^j) - a_i^j (z_i^j - z_{i-1}^j)}{h^2} \qquad (\Delta z_i = \nabla z_{i+1} = z_{i+1} - z_i)$$

с помощью этих обозначений запишется в виде $(a z_{\bar{x}})_x$.

В дальнейшем мы встретимся с различными суммами, взятыми по сетке ω_h^1 или по ее части. Для них также используем безындексные обозначения

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i \psi_i h, \quad (\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \psi_i h;$$
$$[\varphi, \psi) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i \psi_i h, \quad [\varphi, \psi] = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i \psi_i h;$$
$$\sum_{\omega_h^N} \psi \cdot h = \sum_{0 \leqslant x' < x} h\psi(x') = \sum_{k=0}^{i} \psi_k \cdot h,$$

где φ_i и ψ_i — произвольные функции, заданные на сетке ω_h^1.

Для априорных оценок используются нормы

$$\|\psi\|_0 = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |\psi_i|, \quad \|\psi\|_1 = (|\psi|, 1),$$
$$\|\psi\|_2 = (\psi, \psi)^{1/2}, \qquad \|\psi\|_3 = \|\varphi\|_2,$$
$$\varphi = \sum_{i'=1}^{i} h\psi_{i'}, \ \|\psi\|_4 = \|\psi\|_3 + |(\psi, 1)|, \ \|\psi\|_5 = \|x^{-(m-1/2)}\varphi\|_2,$$
$$1 < m < 3/2, \ \|\psi\|_6 = \|\ln(1/x)\varphi\|_2, \ \|\tilde{\psi}\|_\sigma = \max_{1 \leqslant j' \leqslant L} \|\psi^{j'}\|_\sigma,$$

$\sigma = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

Очевидно, что $\|\psi\|_3 \leqslant \|\psi\|_4 \leqslant \|\psi\|_2 \leqslant \|\psi\|_0$.

2. Разностные формулы Грина

Пусть φ и ψ — произвольные сеточные функции, определенные на сетке $\omega_h^{(1)}$.

Пользуясь тождествами

$$(\varphi\psi)_x = \varphi\psi_x + \psi^{(+1)}\varphi_x = \varphi^{(+1)}\psi_x + \psi\varphi_x,$$
$$\varphi(a\psi_{\bar{x}})_x = (a\varphi\psi_{\bar{x}})_x - a^{(+1)}\varphi_x\psi_x,$$

нетрудно убедиться в том, что справедливы разностные аналоги формул Грина для оператора $L_h\psi = (a\psi_{\bar{x}})_x$:

1) первая формула Грина

$$(\varphi, L_h\psi) = -(a\psi_{\bar{x}}, \psi_{\bar{x}}] + a_N\varphi_N\psi_{\bar{x}, N} - a_1\varphi_0\psi_{x, 0}; \tag{1}$$

2) вторая формула Грина

$$(\varphi, L_h\psi) - (\psi, L_h\varphi) = a_N(\varphi\psi_{\bar{x}} - \psi\varphi_{\bar{x}})_N - a_1(\varphi\psi_x - \psi\varphi_x)_0. \tag{2}$$

В данной статье часто используется первая формула Грина, а также формулы суммирования по частям:

$$(\varphi, \psi_{\bar{x}}) = -(\psi, \varphi_{\bar{x}}] + (\varphi\psi)_N - \psi_1\varphi_0, \tag{3}$$

$$(\varphi, \psi_{\bar{x}}) = -[\psi, \varphi_x) + \varphi_N\psi_{N-1} - (\varphi\psi)_0. \tag{4}$$

3. Простейшие неравенства

Лемма 1. *Для любой функции* ψ, *заданной на сетке* $\omega_h^{(1)}$, *имеем:*

$$\psi^2(x) \leqslant 2\psi_0^2 + 2\psi_N^2 + {}^1/_2\,(\psi_{\bar{x}}, \psi_{\bar{x}}], \tag{а}$$

$$\psi^2(x) \leqslant 2\psi_0^2 + 2\,(\psi_{\bar{x}}, \psi_{\bar{x}}], \tag{б}$$

$$\psi^2(x) \leqslant 2\psi_N^2 + 2\,(\psi_{\bar{x}}, \psi_{\bar{x}}]. \tag{в}$$

Для доказательства, например, неравенства (а) леммы надо воспользоваться тождеством

$$\psi(x) = (1-x)\sum_{0\leqslant x'<x} h\psi_x(x') - x\sum_{x\leqslant x'<1} h\psi_x(x') + (1-x)\psi_0 + x\psi_N$$

и неравенствами

$$\Big(h\sum_{0\leqslant x'<x}\psi_x(x')\Big)^2 \leqslant x\sum_{0\leqslant x'<x} h\psi_x^2(x'),\quad \Big(h\sum_{x\leqslant x'<1}\psi_x(x')\Big)^2 \leqslant (1-x)\sum_{x\leqslant x'<1} h\psi_x^2(x').$$

В частности, если $\psi_0 = \psi_N = 0$, то

$$\psi^2(x) \leqslant {}^1/_4\,(\psi_{\bar{x}}, \psi_{\bar{x}}].$$

Лемма 2. *Если сеточная функция* $\psi(x)$, *заданная на* ω_h^1, *удовлетворяет условию* $\psi_N = 0$, *то имеют место неравенства*

$$\psi^2(x) \leqslant \frac{2m-1}{m-1}\left(x+\frac{h}{2}\right)^{-(m-1)}\left(\left(x-\frac{h}{2}\right)^m, \psi_{\bar{x}}^2\right], \quad 1<m<2, \quad 0\leqslant x<1;$$

$$\psi^2(x) \leqslant \left(2+\ln\frac{1}{x+\frac{h}{2}}\right)\left(\left(x-\frac{h}{2}\right), \psi_{\bar{x}}^2\right], \qquad m=1, \qquad 0\leqslant x<1;$$

$$\|\psi\|_2^2 \leqslant \frac{2m-1}{(2-m)(m-1)}\left(\left(x-\frac{h}{2}\right)^m, \psi_{\bar{x}}^2\right], \qquad 1<m<2.$$

В самом деле,

$$\psi^2(x) \leqslant \Big(\sum_{x\leqslant x'<1} h\psi_x(x')\cdot\left(x'+\frac{h}{2}\right)^{m/2}\cdot\left(x'+\frac{h}{2}\right)^{-m/2}\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{x\leqslant x'<1} h\left(x'+\frac{h}{2}\right)^m\psi_{\bar{x}}^2(x')\cdot\sum_{x\leqslant x'<1} h\left(x'+\frac{h}{2}\right)^{-m} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2m-1}{m-1}\left(x+\frac{h}{2}\right)^{-(m-1)}\left(\left(x-\frac{h}{2}\right)^m, \psi_{\bar{x}}^2\right],$$

если учесть, что

$$\sum_{x\leqslant x'<1} h\left(x'+\frac{h}{2}\right)^{-m} \leqslant \frac{2m-1}{m-1}\left(x+\frac{h}{2}\right)^{-(m-1)},$$

Если $\psi_N \neq 0$, то выражения, стоящие справа в неравенствах леммы, надо умножить на 2 и прибавить $2\psi_N^2$.

Для преобразования произведения в сумму при построении мажорант мы пользуемся неравенством (см. [6])

$$\prod_{k=1}^{r} x_k^{\nu_k} \leqslant \sum_{k=1}^{r} \nu_k x_k, \text{ где } x_k \geqslant 0, \ \nu_k > 0, \ \sum_{k=1}^{r} \nu_k = 1. \tag{5}$$

4. Разностная краевая задача

В основной области $\overline{\Omega}_{h\tau} = \omega_h^{(1)} \times \omega_h^{(T)}$ рассмотрим краевую задачу для уравнения, являющегося разностным аналогом дифференциального уравнения параболического типа

$$\rho z_{\bar{t}} - \alpha (a z_{\bar{x}})_x - (1 - \alpha) (\check{a} z_{\check{x}})_x = \Psi^{(\alpha)} \quad \text{на} \quad \Omega_{h\tau}, \tag{6}$$

где α — числовой параметр, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\Psi^{(\alpha)} = \alpha \Psi + (1 - \alpha) \check{\Psi} + \psi, \qquad \Psi = (bz)_x + c z_{\bar{x}} + q z. \tag{7}$$

Искомая функция z, коэффициенты ρ, a, b, c, q, а также ψ являются сеточными функциями, заданными в основной области $\overline{\Omega}_{h\tau}$ и зависящими, вообще говоря, от шагов сетки h и τ. Однако для упрощения записи мы эту зависимость не указываем.

При $x = 0$ $(i = 0)$ и $x = 1$ $(i = N)$ заданы краевые условия

$$\begin{aligned} \alpha a^{(+1)} z_x + (1 - \alpha) \check{a}^{(+1)} \check{z}_x &= \mathscr{E}_1 z_{\bar{t}} + \alpha \sigma_1 z + (1 - \alpha) \check{\sigma}_1 \check{z}, \qquad x = 0 \ (i = 0), \\ \alpha a z_{\bar{x}} + (1 - \alpha) \check{a} \check{z}_{\check{x}} &= -\mathscr{E}_2 z_{\bar{t}} - \alpha \sigma_2 z - (1 - \alpha) \check{\sigma}_2 \check{z}, \quad x = 1 \ (i = N), \end{aligned} \tag{8}$$

коэффициенты которых $\mathscr{E}_k$ и σ_k $(k = 1, 2)$ являются функциями, заданными на сетке ω_τ^T и зависящими, вообще говоря, от h и τ.

Отметим, что краевые условия такого вида являются разностным аналогом краевого условия для дифференциального уравнения

$$\mathscr{E} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma u,$$

где $\mathscr{E} = \mathscr{E}(t)$, $a = a(t)$, $\sigma = \sigma(t)$ — некоторые функции $t \in [0, T]$.

Такой же вид (8) имеют разностные краевые условия повышенного порядка точности, соответствующие краевым условиям 3-го рода для дифференциального уравнения теплопроводности.

В начальный момент функция z удовлетворяет условию

$$z = 0, \quad t = 0 \ (j = 0). \tag{9}$$

Краевое условие первого рода $z = 0$, например при $x = 0$, может быть получено формально из (8), если положить $\alpha = 1$ и совершить предельный переход при $\sigma_1 \to \infty$ (считая все остальные коэффициенты ограниченными).

Линейное уравнение (6) получается для погрешности $z = y - u$ (y — решение разностной задачи, u — решение задачи для дифференциального уравнения) не только в случае линейного, но и для нелинейного уравнения параболического типа.

В данной статье, однако, нас не интересует происхождение уравнения (6) и связь его коэффициентов a, b, ρ и др. с коэффициентами исходного дифференциального уравнения.

5. Условия для коэффициентов

Мы предполагаем всюду, что коэффициенты разностной краевой задачи (6)—(9) удовлетворяют условиям:

K_1) сеточные функции ρ и a ограничены снизу положительной постоянной, не зависящей от h и τ:

$$\rho \geqslant M_0 > 0, \quad a \geqslant M_0 > 0;$$

K_2) сеточные функции b, c и q ограничены по абсолютной величине постоянными, не зависящими от сетки (т. е. от h и τ):

$$|b| \leqslant b^*, \quad |q| \leqslant M_1, \quad |c| \leqslant c^*;$$

K_3) все коэффициенты $\mathscr{E}_k$, σ_k $(k = 1, 2)$ неотрицательны;

K_4) по крайней мере один из коэффициентов σ_k $(k = 1, 2)$ ограничен снизу положительной постоянной σ_*, не зависящей от h и τ.

Отсюда следует, что невозможны случаи, когда одновременно $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0$, а также $\sigma_1 \to 0$ и $\sigma_2 \to 0$ при $h \to 0$ и $\tau \to 0$.

Условимся в дальнейшем любую положительную постоянную, не зависящую от h и τ, обозначать M. Структуру постоянных M, их зависимость от других постоянных, как правило, не будем указывать.

Нетрудно заметить, что справедлива

Лемма 1*. *Если выполнены условия* K_1, K_3, K_4, *то для любой сеточной функции* v, *заданной на сетке* ω_h^1, *имеет место неравенство*

$$v^2 \leqslant MI,$$

где

$$I = \sigma_1 v_0^2 + \sigma_2 v_N^2 + (a, (v_{\bar{x}})^2].$$

6. Исходная формула

При оценке решения задачи (6) — (9) существенную роль, как мы увидим, будут играть свойства «дифференцируемости» сеточных функций $a(x, t)$, $b(x, t)$ и $\rho(x, t)$.

В п. 7 будет получена априорная оценка для z по норме $\| \|_0$ в предположении, что сеточная функция $a(x, t)$ удовлетворяет в области $\overline{\Omega}_h$ условию Липшица по t, а сеточная функция $b(x, t)$ — условию Липшица по x; иными словами, разностные отношения $a_{\bar{t}}$ и $b_{\bar{x}}$ ограничены:

K_5) $$|a_{\bar{t}}| \leqslant M, \quad |b_{\bar{x}}| \leqslant M.$$

Перейдем теперь к выводу основного тождества, с помощью которого будет получена априорная оценка

$$\|\tilde{z}\|_0 \leqslant M \|\tilde{\psi}\|_2.$$

Умножим обе части уравнения (6) скалярно на $\tau z_{\bar{t}}$:

$$\tau(\rho, z_{\bar{t}}^2) - \alpha\tau((az_{\bar{x}})_x, z_{\bar{t}}) - (1-\alpha)\tau((\check{a}\check{z}_{\bar{x}})_x, z_{\bar{t}}) = \tau(\Psi^{(\alpha)}, z_{\bar{t}}). \tag{10}$$

Для преобразования второго и третьего слагаемых левой части воспользуемся первой разностной формулой Грина:

$$-\alpha\tau((az_{\bar{x}})_x, z_{\bar{t}}) - (1-\alpha)((\check{a}\check{z}_{\bar{x}})_x, z_{\bar{t}}) = \alpha(a, z_{\bar{x}}^2] - (1-\alpha)(\check{a}, z_{\bar{x}}^2] -$$
$$-(\alpha a - (1-\alpha)\check{a}, \check{z}_{\bar{x}}\check{z}_{\bar{x}}] + \tau z_{\bar{t},0}(\alpha a^{(+1)} z_x + (1-\alpha)\check{a}^{(+1)}\check{z}_x)_0 -$$
$$-\tau z_{\bar{t},N}(\alpha a z_{\bar{x}} + (1-\alpha)\check{a}\check{z}_{\bar{x}})_N. \tag{11}$$

Учитывая затем краевые условия (8), находим

$$\tau z_{\bar t,0}\,(\alpha a^{(+1)} z_x + (1-\alpha)\,\check a^{(+1)}\check z_x)_0 =$$
$$= \tau\mathscr{E}_1\,(z_{\bar t,0})^2 + \alpha\sigma_1 z_0^2 - (1-\alpha)\,\check\sigma_1\check z_0^2 - (\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\,\check\sigma_1)\,\check z_0 z_0,$$

$$-\tau z_{\bar t,N}\,(\alpha a z_{\bar x} + (1-\alpha)\,\check a\,\check z_{\bar x})_N =$$
$$= \tau\mathscr{E}_2\,(z_{\bar t,N})^2 + \alpha\sigma_2 z_N^2 - (1-\alpha)\,\check\sigma_2\check z_N^2 - (\alpha\sigma_2 - (1-\alpha)\,\check\sigma_2)\check z_N z_N.$$

Подставив эти выражения в (11) и затем в (10), получим исходное тождество

$$\tau\,[\rho,\ z_{\bar t}^2] + \alpha I = \tau\,(\Psi^{(\alpha)},\ z_{\bar t}) + (1-\alpha)\,\check I + Q, \tag{12}$$

где

$$I = (a,\ z_{\bar x}^2] + \sigma_1 z_0^2 + \sigma_2 z_N^2, \tag{13}$$

$$[\rho,\ z_{\bar t}^2] = (\rho,\ z_{\bar t}^2) + \mathscr{E}_1\,(z_{\bar t,0})^2 + \mathscr{E}_2\,(z_{\bar t,N})^2, \tag{14}$$

$$Q = (\alpha a - (1-\alpha)\,\check a,\ \check z_{\bar x} z_{\bar x}] + (\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\,\check\sigma_1)\,\check z_0 z_0 + (\alpha\sigma_2 - (1-\alpha)\,\check\sigma_2)\check z_N z_N.$$

В случае первой краевой задачи, когда вместо (8) заданы условия $z = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$, соотношение (12) принимает вид

$$(\rho,\ z_{\bar t}^2) + \alpha I = \tau\,(\Psi^{(\alpha)},\ z_{\bar t}) + (1-\alpha)\,\check I + (\alpha a - (1-\alpha)\,\check a,\ \check z_{\bar x} z_{\bar x}], \tag{12'}$$

где

$$I = (a,\ z_{\bar x}^2]. \tag{13'}$$

Оно может быть получено из (12), если положить $z_0 = z_N = 0$.

Для оценки выражения Q в формуле (12) нам потребуется следующая

Лемма 3. *Если функция $g(t) \geqslant 0$, заданная на сетке ω_τ^T, удовлетворяет условию*

$$|g_{\bar t}| \leqslant M_1\sqrt{g\check g}, \tag{15}$$

то имеет место неравенство

$$|(\alpha g - (1-\alpha)\,\check g)\,v\check v| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\,(|2\alpha - 1| + (1 - \alpha + |2\alpha - 1|)\,M_1\tau)\,(gv^2 + \check g\check v^2), \tag{16}$$

где v — произвольная сеточная функция на ω_τ^T.

В самом деле, замечая, что $\sqrt{g} \leqslant \sqrt{\check g}\,(1 + M_1\tau)$, можно написать

$$|(\alpha g - (1-\alpha)\,\check g)\,v\check v| = |((1-\alpha)\,(g - \check g) + (2\alpha - 1)\,g)\,v\check v| \leqslant$$
$$\leqslant (1-\alpha)\,M_1\tau\sqrt{g\check g}\,|v\check v| + |2\alpha - 1|\,(1 + M_1\tau)\sqrt{g\check g}\,|v\check v|.$$

Отсюда и следует оценка (16), если учесть, что

$$|\sqrt{g\check g}\,v\check v| \leqslant \frac{1}{2}\,(gv^2 + \check g\check v^2).$$

Нетрудно заметить, что для функции a условие леммы 3 выполняется в силу условий K_1 и K_5.

Потребуем, чтобы σ_1 и σ_2 удовлетворяли условию (15):

K_6) $|(\sigma_s)_{\bar t}| \leqslant M_1\sqrt{\sigma_s\check\sigma_s}, \quad s = 1, 2.$

Тогда, в силу леммы 3, мы сможем оценить выражение Q в формуле (12):

$$|Q| \leqslant \frac{1}{2}(|2\alpha - 1| + (1 - \alpha + |2\alpha - 1|) M_1\tau)(I + \hat{I}). \tag{17}$$

Отсюда и из тождества (12) следует неравенство

$$2\tau[\rho, z_{\bar{t}}^2] + (1 - \alpha M_1\tau) I \leqslant (1 + \alpha M_1\tau) \check{I} + 2\tau(\Psi^{(\alpha)}, z_{\bar{t}}), \tag{18}$$

если $0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Преобразуем теперь выражение

$$(\Psi^{(\alpha)}, z_{\bar{t}}) = \alpha(\Psi, z_{\bar{t}}) + (1 - \alpha)(\check{\Psi}, z_{\bar{t}}) + (\psi, z_{\bar{t}}),$$

где $\Psi = (bz)_{\bar{x}} + cz_{\bar{x}} + qz$.

Поскольку коэффициент b удовлетворяет условию K_5, то можно написать

$$|(\Psi, z_{\bar{t}})| \leqslant (|b^{(-1)} + c) z_{\bar{x}}| + |(q + b_{\bar{x}}) z|, |z_{\bar{t}}|) \leqslant$$
$$\leqslant M\{(z_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}) + (z. z)\} + \frac{1}{4}(\rho, z_{\bar{t}}^2)$$

или

$$|(\Psi, z_{\bar{t}})| \leqslant M \cdot I + \frac{1}{4}(\rho, (z_{\bar{t}})^2),$$

если при этом воспользоваться условиями K_1, K_2 и неравенством

$$|uv| \leqslant \frac{1}{4} Au^2 + \frac{1}{A} v^2,$$

где $A > 0$ — произвольное число, а также неравенством Коши — Буняковского и условием K_4, которое дает

$$(z, z) \leqslant MI \quad \text{(лемма 1*)}.$$

Учитывая неравенство

$$|(\psi, z_{\bar{t}})| \leqslant \frac{1}{M_0}\|\psi\|_2^2 + \frac{1}{4}(\rho, z_{\bar{t}}^2),$$

преобразуем тождество (18) к виду

$$\tau[\rho, (z_{\bar{t}})^2] + I \leqslant \check{I} + M^* \cdot \tau(I + \check{I}) + \frac{2\tau}{M_0}\|\psi\|_2^2. \tag{19}$$

Если τ достаточно мало, так что $\tau < \tau_0$, то отсюда следует, что

$$I \leqslant \varkappa\check{I} + \frac{2}{M_0}\varkappa \cdot \tau\|\psi\|_2^2, \quad \text{где } \varkappa = \frac{1 + M^*\tau}{1 - M^*\tau}. \tag{20}$$

7. Априорная оценка

Решим неравенство (20) с начальным условием

$$I^0 = 0 \text{ при } t = 0.$$

Последовательно применяя неравенство (20), находим

$$I^j \leqslant \frac{2}{M_0}\sum_{j'=1}^{j} \tau\varkappa^{j-j'+1}\|\psi^{j'}\|_2^2 \leqslant M\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\psi^{j'}\|_2^2, \tag{21}$$

или

$$I^j \leqslant M\|\widetilde{\psi}\|_2^2, \text{ если } \tau < \tau_0. \tag{21'}$$

В силу леммы 1* заключаем:

$$\|z^j\|_0 \leqslant M\left[\sum_{j'=1}^{j} \tau\|\psi^{j'}\|_2^2\right]^{1/2}, \text{ или } \|\widetilde{z}\|_0 \leqslant M\|\widetilde{\psi}\|_2.$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Для решения разностной краевой задачи* (6)—(9) *при достаточно малых* $\tau \leqslant \tau_0$ *имеет место априорная оценка*

$$\|z\|_0 \leqslant M\left[\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\psi^{j'}\|_2^2\right]^{1/2}, \quad 0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{22}$$

или

$$\|\widetilde{z}\|_0 \leqslant M\|\widetilde{\psi}\|_2, \tag{22'}$$

если выполнены условия K_1—K_6.

Из приведенных выше рассуждений ясно, что теорема верна и для первой краевой задачи. Доказательство при этом упрощается. Всюду следует формально положить $z_0 = z_N = 0$.

8. Замечания

1. Если первоначальная функция $z|_{t=0} = \varphi(x) \not\equiv 0$, то, как нетрудно показать, справедлива априорная оценка

$$\|z\|_0 \leqslant M\left\{\left(\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\psi^{j'}\|_2^2\right)^{1/2} + (I^0)^{1/2}\right\}, \text{ где } I^0 = \sigma_1\varphi_0^2 + \sigma_2\varphi_N^2 + (a(x, 0), (\varphi_{\bar{x}})^2]$$

2. Условие $|a_{\bar{t}}| \leqslant M$ (K_5) не исключает возможности наличия неподвижных разрывов сеточной функции $a(x, t)$ при $h \to 0$, т. е. разрывов при фиксированных $x = \text{const}$ для всех $t \in \omega_\tau^T$. В [1], [2] априорная оценка (22) получена для случая $a = 1$ в предположении $|a_x| \leqslant M$, что исключает случай неподвижных разрывов коэффициента теплопроводности. Если a имеет разрыв на некоторой линии $x = \eta(t)$ ($\eta_{\bar{t}} \not\equiv 0$), то условие K_5 может не выполняться. Такой разрыв мы будем называть косым или подвижным. Для случая косого разрыва нужны более тонкие оценки при единственном условии: $0 < M_1 \leqslant a \leqslant M_2$ для коэффициента a. Этому вопросу и посвящен § 2.

3. Если при $x = 0$ и $x = 1$ заданы неоднородные краевые условия

$$\alpha a^{(+1)} z_x + (1-\alpha)\check{a}^{(+1)}\check{z}_x = \mathscr{E}_1 z_{\bar{t}} + \alpha\sigma_1 z + (1-\alpha)\check{\sigma}_1\check{z} - \mu_1, \; x = 0 \; (i = 0),$$

$$\alpha a z_{\bar{x}} + (1-\alpha)\check{a}\check{z}_{\bar{x}} = -\mathscr{E}_2 z_{\bar{t}} - \alpha\sigma_2 z - (1-\alpha)\check{\sigma}_2\check{z} - \mu_2, \; x = 1 \; (i = N),$$

то теорема 1 сохраняет силу, если вместо $\|\psi\|_2^2$ написать выражение

$$\overline{\|\psi\|_2^2} = \|\psi\|_2^2 + \frac{\mu_1^2}{\mathscr{E}_1} + \frac{\mu_2^2}{\mathscr{E}_2},$$

так что

$$\|z\|_2^2 \leqslant M\sum_{j'=1}^{j}\tau\,\overline{\|\psi^{j'}\|_2^2}.$$

4. Рассмотрим дифференциальное уравнение более общего вида

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}k(r,t)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}(b(r,t)r^{n-1}u)+qu(r,t)+f.$$

При $n=1$ получаем одномерное уравнение, значение $n=2$ соответствует случаю осевой симметрии, а $n=3$ — случаю сферической симметрии.

Вводя массовую переменную $x\sim r^n$, перепишем уравнение в виде

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(x^m bu)+qu+f,$$

$$\text{где}\quad m=\frac{2(n-1)}{n},\quad 0\leqslant m\leqslant\frac{4}{3}.$$

Разностным аналогом такого уравнения является уравнение

$$\rho z_{\bar t}-\alpha(Az_{\bar x})_x-(1-\alpha)(\check{A}\check{z}_{\bar x})_x=\Psi^{(\alpha)},$$

где

$$\Psi^{(\alpha)}=\alpha\Psi+(1-\alpha)\check{\Psi}+\psi,\quad \Psi=(Bz)_{\bar x}+qz,$$

$$A=\left(x-\frac{h}{2}\right)^m\cdot a,\quad B=\left(x+\frac{h}{2}\right)^m\cdot b.$$

В краевых условиях (8) коэффициент a следует заменить через A.

Если a удовлетворяет условию K_6, то и A удовлетворяет этому условию. Поэтому все рассуждения, приводящие к неравенству

$$I(t)\leqslant M\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\psi^{j'}\|_2^2,$$

сохраняют силу. При этом $I(t)$ выражается формулой

$$I=\sigma_1 z_0^2+\sigma_2 z_N^2+(A,z_{\bar x}^2].$$

Пользуясь леммой 2, можно написать

$$\|z\|_2^2\leqslant MI,\qquad 0\leqslant m<2,$$

и мы получаем оценку

$$\|z\|_2^2\leqslant M\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\psi^{j'}\|_2^2,\quad 1\leqslant m<2.$$

Кроме того, мы имеем

$$z^2\leqslant M\left(x+\frac{h}{2}\right)^{-(m-1)}I,\quad m\neq 1.$$

Если $m=1$, то мы получаем

$$z^2\leqslant M\ln\frac{1}{x+\frac{h}{2}}\cdot I$$

и, следовательно, имеем априорные оценки:

1) если $m>1$, то

$$\|z\|_0^2\leqslant Mh^{-(m-1)}\|\widetilde{\psi}\|_2^2,$$

$$(|z|^p,1)^{\frac{2}{p}}\leqslant M\|\widetilde{\psi}\|_2,\quad\text{где}\quad 2\leqslant p<\frac{2}{m-1}:$$

2) если $m = 1$, то

$$(|z|^p, 1)^{1/p} \leqslant M_p \|\widetilde{\psi}\|_2,$$

где $p \geqslant 2$ — любое число.

Возможно, что эти оценки могут быть улучшены. Априорная оценка, аналогичная (22), имеет место и для решения дифференциального уравнения параболического типа, а также для схемы Роте и метода прямых.

§ 2. Вторая априорная оценка

В этом параграфе будут получены априорные оценки в случае четырехточечного разностного уравнения ($\alpha = 1$) без предположения о «дифференцируемости» коэффициентов a и b.

1. Краевая задача

Рассмотрим разностную краевую задачу (4)—(9) § 1 для четырехточечного уравнения ($\alpha = 1$):

$$\rho z_{\bar{t}} - (a z_{\bar{x}})_x + q \cdot z = (b z)_{\bar{x}} + c \cdot z_{\bar{x}} + \psi; \tag{1}$$

$$a^{(+1)} z_x = \mathscr{E}_1 z_{\bar{t}} + \sigma_1 z, \quad x = 0, \quad t \in \omega_\tau^T;$$

$$-a z_{\bar{x}} = \mathscr{E}_2 z_{\bar{t}} + \sigma_2 z, \quad x = 1, \quad t \in \omega_\tau^T; \tag{2}$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad x \in \omega_h^1. \tag{3}$$

Будем предполагать, что функции ρ, a, q, b и c, определенные на сетке $\overline{\Omega}_{h\tau}$, и функции $\mathscr{E}_k$ и σ_k ($k = 1, 2$), определенные на сетке ω_τ^T, удовлетворяют условиям K_1 — K_4, и, кроме того, потребуем выполнения условий

K_7) $|\mathscr{E}_{k,\bar{t}}| \leqslant M_1 \cdot \mathscr{E}_k$, $k = 1, 2$,

K_8) $|\rho_{\bar{t}}| \leqslant M_1$.

Введем новую функцию $\bar{z}$, полагая

$$z = \bar{z}\,(1 + \overline{M} \cdot \tau)^{\frac{t}{\tau}} \; (t \in \omega_\tau^T), \tag{4}$$

где $\overline{M}$ — произвольная положительная постоянная.

Для функции $\bar{z}$ получим следующую краевую задачу:

$$\rho \bar{z}_{\bar{t}} - (\overline{a} \bar{z}_{\bar{x}})_x + \widetilde{q} \bar{z} = (\bar{b} \bar{z})_{\bar{x}} + \bar{c} \cdot \bar{z}_{\bar{x}} + \bar{\psi}, \tag{5}$$

$$a^{(+1)} \bar{z}_x = \mathscr{E}_1 \bar{z}_{\bar{t}} + \bar{\sigma}_1 \bar{z}, \quad x = 0; \tag{6}$$

$$-\overline{a} \bar{z}_{\bar{x}} = \mathscr{E}_2 \bar{z}_{\bar{t}} + \bar{\sigma}_2 \bar{z}, \quad x = 1; \tag{7}$$

$$z|_{t=0} = 0,$$

где

$$\overline{a} = a\,(1 + M \cdot \tau), \quad \overline{b} = b\,(1 + \overline{M} \cdot \tau), \quad \overline{c} = c\,(1 + \overline{M} \cdot \tau),$$

$$\overline{\sigma}_m = \sigma_m\,(1 + \overline{M} \cdot \tau) + \overline{M} \cdot \mathscr{E}_m \; (m = 1, 2), \quad \widetilde{q} = \rho \overline{M} + q\,(1 + \overline{M} \cdot \tau),$$

$$\overline{\psi} = \psi / (1 + \overline{M} \cdot \tau)^{\frac{t}{\tau} - 1}. \tag{8}$$

Выбор постоянной $\overline{M}$ будет уточнен позже (в п. 5). Пока же будем предполагать, что выбор $\overline{M}$ обеспечивает выполнение условия

$$\tilde{q} \geqslant Q = \overline{M}M_0 + q\,(1 + \overline{M}\cdot\tau) > 0.$$

Отсюда ясно, что без ограничения общности можно считать $q \geqslant 0$.

Для упрощения записи в дальнейшем будем пользоваться обозначениями задачи (1)—(3), имея в виду, что фактически рассматривается задача (5)—(7). Лишь для коэффициента при z сохраним пока обозначение $\tilde{q}$.

При формулировке окончательных результатов мы вернемся к исходной задаче (1)—(3) и учтем преобразование (4).

2. Уравнение для функции z^{2^n}

Рассмотрим последовательность функций

$$\overset{0}{z} = z,\ \overset{1}{z} = z^2, \ldots, \overset{n}{z} = \left(\overset{n-1}{z}\right)^2, \ldots \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\overset{n}{z} = z^{2^n}$, и составим разностное уравнение и разностные краевые условия, которым должна удовлетворять функция $\overset{n}{z}$, если z — решение задачи (1)—(3).

Воспользуемся очевидными тождествами

$$2z\cdot z_{\bar{x}} = (z^2)_{\bar{x}} + h\,(z_{\bar{x}})^2,\ 2z\cdot z_x = (z^2)_x - h\,(z_x)^2,\ 2z\cdot z_{\bar{t}} = (z^2)_{\bar{t}} + \tau\,(z_{\bar{t}})^2$$

и напишем рекуррентные соотношения

$$\left(a\overset{n}{z}_{\bar{x}}\right)_x = 2\,\overset{n-1}{z}\left(a\,\overset{n-1}{z}_{\bar{x}}\right)_x + a^{(+1)}\left(\overset{n-1}{z}_x\right)^2 + a\left(\overset{n-1}{z}_{\bar{x}}\right)^2, \quad \overset{n}{z}_{\bar{t}} = 2\,\overset{n-1}{z}\,\overset{n-1}{z}_{\bar{t}} - \tau\left(\overset{n-1}{z}_{\bar{t}}\right)^2.$$

Отсюда находим

$$\left(a\,\overset{n}{z}_{\bar{x}}\right)_x = 2^n\cdot z^{2^n-1}\,(az_{\bar{x}})_x + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left[a\left(\overset{k}{z}_{\bar{x}}\right)^2 + a^{(+1)}\left(\overset{k}{z}_x\right)^2\right]\cdot z^{2^n-2^k+1} \tag{9}$$

$$\overset{n}{z}_{\bar{t}} = 2^n\cdot z^{2^n-1}z_{\bar{t}} - \tau\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left(\overset{k}{z}_{\bar{t}}\right)^2 z^{2^n-2^k+1}. \tag{10}$$

Для $\overset{n}{z}_{\bar{x}}$ и $\overset{n}{z}_x$ получаются выражения, аналогичные (10) (в случае $\overset{n}{z}_x$ перед суммой стоит знак $+$).

При этом мы учитывали, что

$$\prod_{s=s_0}^{n-1} \overset{s}{z} = z^{2^{s_0}+2^{s_0+1}+\cdots+2^{n-1}} = z^{2^n-2^{s_0}},\ s_0 = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

В результате получаем следующую краевую задачу для функции $\overset{n}{z}$:

$$\rho\overset{n}{z}_{\bar{t}} - \left(a\overset{n}{z}_{\bar{x}}\right)_x + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left(a\left(\overset{k}{z}_{\bar{x}}\right)^2 + a^{(+1)}\left(\overset{k}{z}_x\right)^2 + \tau\rho\left(\overset{k}{z}_{\bar{t}}\right)^2\right)\cdot z^{2^n-2^k+1} + 2^n\cdot\tilde{q}\overset{n}{z} =$$

$$= 2^n z^{2^n-1}\Psi,\ \Psi = (bz)_{\bar{x}} + cz_{\bar{x}} + \psi; \tag{11}$$

$$a^{(-1)}\overset{n}{z}_x = \mathscr{E}_1\overset{n}{z}_{\bar t} + 2^n\sigma_1\overset{n}{z} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left(ha^{(+1)}\left(\overset{k}{z}_x\right)^2 + \tau\mathscr{E}_1\left(\overset{k}{z}_{\bar t}\right)^2\right)\cdot z^{2^n-2^k+1},\quad x=0,$$

$$-a\overset{n}{z}_{\bar x} = \mathscr{E}_2\overset{n}{z}_{\bar t} + 2^n\sigma_2\overset{n}{z} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left(ha\left(\overset{k}{z}_{\bar x}\right)^2 + \tau\mathscr{E}_2\left(\overset{k}{z}_{\bar t}\right)^2\right)\cdot z^{2^n-2^k+1},\quad x=1; \tag{12}$$

$$\overset{n}{z}\Big|_{t=0} = 0. \tag{13}$$

Отсюда видно, что в силу условий K_1 и K_3

$$\max_{\omega_\tau^t}\overset{n}{z}_0 \leqslant \max_{\omega_\tau^t}\overset{n}{z}_1,$$

$$\max_{\omega_\tau^t}\overset{n}{z}_N \leqslant \max_{\omega_\tau^t}\overset{n}{z}_{N-1}.$$

Поэтому достаточно получить оценку для функции z_i во внутренних точках сетки ω_h^1.

3. Интегральные формулы n-го ранга

Для вывода основного интегрального соотношения для функции $\overset{n}{z}$ умножим скалярно уравнение (11) на 1 и вычислим сумму $\left(\left(a\overset{n}{z}_{\bar x}\right)_x, 1\right)$. С этой целью воспользуемся первой формулой Грина и краевыми условиями (12):

$$-\left(\left(a\overset{n}{z}_{\bar x}\right)_x, 1\right) = -\left(a\overset{n}{z}_{\bar x}\right)_N + a_1\overset{n}{z}_{x,0} = \mathscr{E}_1\overset{n}{z}_{\bar t,0} + \mathscr{E}_2\overset{n}{z}_{\bar t,N} + 2^n\left(\sigma_1\overset{n}{z}_0 + \sigma_2\overset{n}{z}_N\right) +$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left\{\left(ha_1\left(\overset{k}{z}_{x,0}\right)^2 + \tau\mathscr{E}_1\left(\overset{k}{z}_{\bar t,0}\right)^2\right)z_0^{2^n-2^k+1} +\right.$$
$$\left.+\left(ha_N\left(\overset{k}{z}_{\bar x,N}\right)^2 + \tau\mathscr{E}_2\left(\overset{k}{z}_{\bar t,N}\right)^2\right)z_N^{2^n-2^k+1}\right\}.$$

Учитывая затем, что

$$\rho\overset{n}{z}_{\bar t} = \left(\rho\overset{n}{z}\right)_{\bar t} - \rho_{\bar t}\cdot\overset{\check n}{z}\quad\left(\overset{\check n}{z} = \left(\check z\right)^{2^n}\right),$$

и вводя обозначения

$$\left[\rho, \overset{n}{z}\right] = \left(\rho, \overset{n}{z}\right) + \mathscr{E}_1\overset{n}{z}_0 + \mathscr{E}_2\overset{n}{z}_N\quad\left(\rho_0 = \frac{\mathscr{E}_1}{h},\ \rho_N = \frac{\mathscr{E}_2}{h}\right),$$

$$\left[\tilde q, \overset{n}{z}\right] = \left(\tilde q, \overset{n}{z}\right) + \sigma_1\overset{n}{z}_0 + \sigma_2\overset{n}{z}_N,$$

получим следующее тождество:

$$\left[\rho, \overset{n}{z}\right]_{\bar t} + 2\left(a, \left(\overset{n-1}{z}_{\bar x}\right)^2\right] + \sum_{k=0}^{n-2} 2^{n-k-1}\left\{\left(a\left(\overset{k}{z}_{\bar x}\right)^2, z^{2^n-2^k+1}\right] + \left[a^{(+1)}\left(\overset{k}{z}_x\right)^2, z^{2^n-2^k+1}\right)\right\} +$$
$$+2^n\left[\tilde q, \overset{n}{z}\right] + \tau\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left[\rho\left(\overset{k}{z}_{\bar t}\right)^2, z^{2^n-2^k+1}\right] = 2^n\left(z^{2^n-1}, \Psi\right) + \left[\rho_{\bar t}, \overset{\check n}{z}\right], \tag{14}$$

которое мы будем называть интегральным тождеством n-го ранга ($n \geqslant 1$).

При $n = 1$ получаем тождество первого ранга:

$$[\rho, z^2]_{\bar t} + 2\left(a, (z_{\bar x})^2\right] + 2\left[\tilde q, z^2\right] + \tau\left[\rho, (z_{\bar t})^2\right] = 2\left(z, \Psi\right) + \left[\rho_{\bar t}, \check z^2\right], \tag{15}$$

которому удовлетворяет решение краевой задачи (1)—(3).

Отбрасывая в левой части тождества подчеркнутое выражение, приходим к интегральному неравенству n-го ранга

$$\left[\rho, \overset{n}{z}\right]_{\bar{t}} + 2\overset{n-1}{I} + 2^n\left[Q, \overset{n}{z}\right] \leqslant 2^n\left(z^{2^n-1}, \Psi\right) + \left[\rho_{\bar{t}}, \overset{\check{n}}{z}\right], \tag{16}$$

где

$$\overset{n-1}{I} = \left(a, \left(\overset{n-1}{z_{\bar{x}}}\right)^2\right] + \sum_{k=0}^{n-2} 2^{n-k-2}\left\{\left(a\left(\overset{k}{z_{\bar{x}}}\right)^2, z^{2^n-2^k-1}\right] + \left[a^{(+1)}\left(\overset{k}{z_x}\right)^2, z^{2^n-2^k+1}\right)\right\}. \tag{17}$$

Это неравенство мы используем для построения априорных оценок решения задачи (1)—(3).

4. Оценки для правой части

Рассмотрим прежде всего выражение

$$2^n\left(z^{\nu_n}, \Psi\right), \text{ где } \Psi = (bz)_{\bar{x}} + cz_{\bar{x}} + \psi, \quad \nu_n = 2^n - 1.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $b = 0$ при $x = 0$ и $x = x_{N-1}$.

В самом деле, положим $b = \tilde{b} + f$, где f — линейная функция, совпадающая с b при $x = 0$ и $x = x_{N-1}$, так что $\tilde{b}_0 = \tilde{b}_{N-1} = 0$. Тогда будем иметь

$$(bz)_{\bar{x}} + cz_{\bar{x}} = (\tilde{b}z)_{\bar{x}} + \left(c + f^{(-1)}\right) z_{\bar{x}} + f_{\bar{x}} \cdot z, \quad f_{\bar{x}} = \frac{b_{N-1} - b_0}{1 - h}.$$

Слагаемое $2^n\left(f_{\bar{x}} z, z^{\nu_n}\right) = 2^n\left(f_{\bar{x}}, \overset{n}{z}\right)$ объединим с членом $2^n\left(Q, \overset{n}{z}\right)$, стоящим слева. В результате для Q получим выражение

$$Q = \overline{M} \cdot M_0 + q\left(1 + \overline{M} \cdot \tau\right) - f_{\bar{x}} > 0,$$

где $\overline{M}$ — произвольная постоянная, которую мы выберем позже.

Для упрощения записи будем по-прежнему писать b вместо $\tilde{b}$ и c вместо $\tilde{c} = c + f^{(-1)}$.

Так как $b_0 = b_{N-1} = 0$, то в силу формулы (4), § 1, будем иметь

$$\left(z^{\nu_n}, (bz)_{\bar{x}}\right) = -\left((z^{\nu_n})_x, bz\right). \tag{18}$$

Выведем формулу для разностного отношения

$$(z^{\nu_n})_x = \left(z^{(+1)}\right)^{\nu_{n-1}} \cdot \overset{n-1}{z_x} + \overset{n-1}{z} \cdot (z^{\nu_{n-1}})_x.$$

Последовательно используя это рекуррентное соотношение, находим

$$(z^{\nu_n})_x = \sum_{k=0}^{n-1} \left(z^{(+1)}\right)^{\nu_k} \cdot z^{\nu_{n-\nu_k+1}} \cdot \overset{k}{z_x}. \tag{19}$$

Подставим (19) в (18) и воспользуемся неравенством

$$\overset{n}{z} \leqslant M \overset{n-1}{I} \text{ (лемма 1*)},$$

а также неравенством Гёльдера:

$$\left| 2^n \sum_{k=0}^{n-1} \left((z^{+1})^{\nu_k} \cdot z^{\nu_n-\nu_k+1} \overset{k}{z}_x,\ bz\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \cdot M \sum_{k=0}^{n-1} \left| \left(1,\ \overset{n}{z}\right)^{1/2^{n-k}-1/2^n} \cdot \left(1,\ \overset{n}{z}\right)^{1/2-1/2^{n-k}+1/2^n} \cdot \left(z^{\nu_n-\nu_k+1},\ \left(\overset{k}{z}_x\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \right.$$

$$\leqslant M \cdot 2^n \left(1,\ \overset{n}{z}\right)^{1/2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(z^{\nu_n-\nu_k+1},\ a^{(+1)}\left(\overset{k}{z}_x\right)^2\right)^{1/2} \ \left(b_{N-1}=0\right).$$

Отсюда в силу неравенства

$$\sum_{k=0}^{n-1} |v_k|^{1/2} \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |v_k|\right)^{1/2}$$

и формулы (17) для $\overset{n-1}{I}$ получаем

$$2^n |(z^{\nu_n},\ (bz)_{\bar{x}})| \leqslant (M \cdot 2^n \cdot \sqrt{n})^2 \left(1,\ \overset{n}{z}\right) + \frac{1}{4} \overset{n-1}{I}. \tag{20}$$

Обратимся теперь к выражению $(z^{\nu_n},\ \psi)$. Введем функцию Φ, определив ее условиями

$$\Phi_{\bar{x}} = \psi,\ \Phi_0 = 0,$$

так что

$$\Phi = \sum_{0<x'\leqslant x} h \cdot \psi(x'),\quad \Phi_N = \Phi_{N-1}. \tag{21}$$

Пользуясь тождеством

$$(z^{\nu_n},\ \psi) = -((z^{\nu_n})_x,\ \Phi) + z_N^{\nu_n} \cdot \Phi_N, \tag{22}$$

по аналогии с предыдущим находим

$$2^n |(z^{\nu_n},\ \psi)| \leqslant M \left(\overset{n-1}{I}\right)^{1-1/2^n} \cdot 2^n \left(\sqrt{n}\, \|\psi\|_3 + |\Phi_N|\right)$$

и, следовательно,

$$2^n |(z^{\nu_n},\ \psi)| \leqslant \frac{1}{4} \overset{n-1}{I} + (M \cdot 2^n \cdot \sqrt{n})^{2^n} (\|\psi\|_4)^{2^n}. \tag{23}$$

Последнее слагаемое $2^n (z^{\nu_n},\ cz_{\bar{x}})$ оценивается совсем просто:

$$2^n |(z^{\nu_n},\ cz_{\bar{x}})| \leqslant 2^n \cdot M \left(\overset{n-1}{z},\ |z^{2^{n-1}-1} z_{\bar{x}}|\right) \leqslant M \cdot 2^{\frac{n}{2}} \left(\overset{n-1}{I}\right)^{1/2} \cdot \left(1,\ \overset{n}{z}\right)^{1/2}$$

или

$$2^n |(z^{\nu_n},\ cz_{\bar{x}})| \leqslant M \cdot 2^n \left(1,\ \overset{n}{z}\right) + \frac{1}{2} \overset{n-1}{I}, \tag{24}$$

так как

$$(a^{(+1)},\ z^{2^n-2} (z_x)^2) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \overset{n-1}{I}.$$

Собирая оценки (20), (23) и (24), получаем

$$2^n |(z^{\nu_n},\ \Psi)| \leqslant \overset{n-1}{I} + 2^n \cdot M_n^{(2)} \left(1,\ \overset{n}{z}\right) + M_n^{(1)} (\|\psi\|_4)^{2^n}, \tag{25}$$

где

$$M_n^{(1)} = (M2^n \cdot \sqrt{n})^{2^n}, \quad M_n^{(2)} = M \cdot n \cdot 2^n, \tag{26}$$

В силу условий K_1, K_7 и K_8 имеем

$$\left| \left[\rho_{\bar{t}}, \overset{\check{n}}{z} \right] \right| \leqslant M \cdot \left[\check{\rho}, \overset{\check{n}}{z} \right]. \tag{27}$$

5. Априорные оценки

Вернемся теперь к неравенству (16) и воспользуемся оценками (25) и (27):

$$\left[\rho, \overset{n}{z} \right]_{\bar{t}} + \overset{n-1}{I} + 2^n \left[Q, \overset{n}{z} \right] \leqslant M \left[\check{\rho}, \overset{\check{n}}{z} \right] + 2^n M_n^{(2)} \left(1, \overset{n}{z} \right) + M_n^{(1)} (\|\psi\|_4)^{2^n}. \tag{28}$$

Распорядимся теперь произвольной постоянной $\overline{M}$ и выберем ее таким образом, чтобы

$$Q = \overline{M} M_0 + (q - f)(1 + \overline{M} \cdot \tau) \geqslant M_n^{(2)} \quad (1 + \overline{M}_\tau).$$

Это условие будет выполнено, если $\tau \leqslant \tau_0(n)$,

где

$$\tau_0(n) \leqslant \frac{Mb^*}{n \cdot 2^n} + M. \tag{29}$$

Отсюда видно, что τ_0 не зависит от n при $b \equiv 0$.

При таком выборе M_n неравенство (28) можно переписать в виде

$$\left[\rho, \overset{n}{z} \right]_{\bar{t}} + \overset{n-1}{I} \leqslant M \left[\check{\rho}, \overset{n}{z} \right] + M_n^{(1)} (\|\psi\|_4)^{2^n}$$

или

$$\left[\rho, \overset{n}{z} \right] + \tau \overset{n-1}{I} \leqslant (1 + M \cdot \tau) \left[\check{\rho}, \overset{\check{n}}{z} \right] + \tau M_n^{(1)} (\|\psi\|_4)^{2^n}, \tag{30}$$

Отсюда находим

$$\left[\rho, \overset{n}{z} \right] + \sum_{\omega_\tau^t} \tau \overset{n-1}{I} \leqslant (1 + M \cdot \tau)^{\frac{t}{\tau}} \left(\left[\rho, \overset{n}{z} \right] \right)_{t=0} + M_n^{(1)} \sum_{t' \in \omega_\tau^t} (1 + M \cdot \tau)^{\frac{t-t'}{\tau}} (\|\psi\|_4)^{2^n}.$$

В силу начального условия

$$\overset{n}{z} = 0 \text{ при } t = 0$$

мы получаем

$$\sum_{\omega_\tau^t} \tau \overset{n-1}{I} \leqslant \left[\rho, \overset{n}{z} \right] \leqslant M_n^{(1)} \frac{e^{M \cdot t}}{M} \sum_{\omega_\tau^t} \tau (\|\psi\|_4)^{2^n} \quad (\psi^0 = 0) \tag{31}$$

или

$$\|\overset{n}{z}\|_1 \leqslant M \cdot M_n^{(1)} \sum_{\omega_\tau^t} \tau (\|\psi\|_4)^{2^n}. \tag{32}$$

Тем самым доказана

Теорема 2. *Если выполнены условия* K_1—K_4, K_7 и K_8, *то для решения разностной краевой задачи* (1) — (3) *при достаточно малом* $\tau \leqslant \tau_0$

справедливы оценки

$$[\rho,\ z^{2^n}]^{\frac{1}{2^n}} \leqslant M_n \left[\sum_{j'=1}^{j} \tau\,(\|\psi^{j'}\|_4)^{2^n}\right]^{\frac{1}{2^n}} \leqslant M\cdot M_n \widetilde{\|\psi\|}_4, \tag{33}$$

$$\|\,z^{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}} \leqslant M_n \widetilde{\|\psi\|}_4, \tag{34}$$

где $M_n = C_1\cdot 2^n\sqrt{n}\,e^{C_2\cdot 2^n\cdot n}$, $n \geqslant 1$ — *любое целое число,* C_1, C_2 — *положительные постоянные, не зависящие ни от* n, *ни от* h *и* τ, *а*

$$\tau_0 = \tau_0(n) \leqslant M\left(1 + \frac{b^*}{n\cdot 2^n}\right).$$

Величина τ_0 *не зависит от* n *при* $b = 0$ *или если* $(bz)_{\bar{x}}$ *берется на предыдущем слое* $t - \tau$.

Выведем еще одну априорную оценку. Неравенство (31) дает

$$\sum_{\omega_\tau^t} \tau \overset{n-1}{I} \leqslant M\cdot M_n^{(1)} \sum_{\omega_\tau^t} \tau\,(\|\psi\|_4)^{2^n}. \tag{35}$$

Учитывая затем, что $\overset{n}{z} \leqslant M \overset{n-1}{I}$ (лемма 1*), будем иметь

$$\sum_{\omega_\tau^t} \tau\cdot \overset{n}{z} \leqslant M \sum_{\omega_\tau^t} \tau \overset{n-1}{I}. \tag{36}$$

Отсюда и из (35) вытекает

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то имеет место априорная оценка*

$$\left(\sum_{\omega_\tau^t} z^{2^n}\cdot\tau\right)^{1/2^n} \leqslant M M_n \widetilde{\|\psi\|}_4, \tag{37}$$

где $n \geqslant 1$ — *любое целое число,* M_n — *постоянная, фигурирующая в теореме* 2, *а* M — *положительная постоянная, не зависящая от* n, h *и* τ.

Для иллюстрации эффективности априорной оценки (34) рассмотрим следующий пример.

Пусть $\psi_i = \frac{1}{h}(\delta_{i,\,i_0+1} - \delta_{i,\,i_0})$, где $\delta_{i,\,k}$ — символ Кронекера, $0 < i < N$, $0 < i_0 < N - 1$. Тогда $\|\psi\|_2 = \sqrt{2}/\sqrt{h}$; однако

$$\|\psi\|_3 = \left\|\sum_{i'=1}^{i} h\psi_{i'}\right\|_2 = \|\delta_{i,\,i_0}\|_2 = \sqrt{h},\quad \|\psi\|_1 = \|\psi\|_3 = \sqrt{h}$$

и, следовательно,

$$\left(\sum_{\omega_h^1} z^p\cdot h\right)^{1/p} \leqslant M_p\cdot\sqrt{h},\ \text{где } p = 2^n.$$

Отсюда находим

$$\|\widetilde{z}\|_0 \leqslant M_p\cdot h^{1/2-1/p}.$$

Фиксируя $p = p_0 > 2$ $(n > 1)$, мы получаем справа величину, стремящуюся к нулю при $h \to 0$.

Выбирая n в зависимости от h, нетрудно получить для достаточно малых значений h оценку

$$\|z\|_0 \leqslant Mh^{1/2-\rho(h)} \quad (b=0), \tag{38}$$

где M — постоянная, не зависящая ни от h, ни от τ, а $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

6. Замечания

1. Для решения краевой задачи для дифференциального уравнения, аналогом которой является рассматриваемая нами разностная краевая задача, также справедлива априорная оценка (34). При этом, разумеется, надо иметь в виду, что

$$\|\overset{n}{z}\|_1^{1/2^n} = \left(\int_0^1 z^{2^n} dx\right)^{1/2^n}, \tag{39}$$

$$\|\psi\|_4 = \left[\int_0^1 dx \left(\int_0^x \psi\, d\xi\right)^2\right]^{1/2} + \left|\int_0^1 \psi dx\right|. \tag{40}$$

2. Для решения этой же краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения Роте [5]

$$\rho z_{\bar t} - \frac{d}{dx}\left[a(x,t)\frac{dz}{dx}\right] + q(x,t)\,z = \frac{d}{dx}(b(x,t)\,z) + c\frac{dz}{dx} + \psi$$

в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \in \omega_\tau^T$, справедливы теоремы 2 и 3, причем $\|\overset{n}{z}\|_1$ и $\|\psi\|_4$ даются формулами (39) и (40).

3. Теорема 2 обобщается на случай краевой задачи

$$\rho z_{\bar t} - (Az_{\bar t})_x + q\cdot z = (Bz)_{\bar x} + \psi;$$

$$A = a\cdot\left(x - \frac{h}{2}\right)^m, \quad B = b\cdot\left(x + \frac{h}{2}\right)^m, \quad 0 \leqslant m < \frac{3}{2};$$

$$A^{(+1)} z_x = \mathscr{E}_1 z_{\bar t} + \sigma_1 z, \quad x = 0; \quad -Az_{\bar x} = \mathscr{E}_2 z_{\bar t} + \sigma_2 z, \quad x = 1;$$

$$z|_{t=0} = 0,$$

коэффициенты которой a, b, q, ρ, $\mathscr{E}_k$ и σ_k $(k = 1, 2)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Это уравнение является разностным аналогом дифференциального уравнения

$$\rho\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(x^m a\frac{\partial z}{\partial x}\right) + qz = \frac{\partial}{\partial x}(x^m\cdot bz) + \psi,$$

охватывающего, как мы указывали в § 1, п. 8, случаи осевой ($m = 1$) и сферической ($m = 4/3$) симметрии.

Для оценок правой части ψ используется при этом норма $\|\psi\|_5$ или $\|\psi\|_6$ (при $m = 1$). Априорная оценка (34) имеет вид

$$\|z^{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}} \leqslant M_n \|\widetilde{\psi}\|_\sigma, \quad \sigma = 5 \text{ или } 6.$$

4. Если начальная функция $z = \varphi(x) \not\equiv 0$, то для z априорная оценка имеет вид

$$\|z^{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}} \leqslant M_n\,[\|\widetilde{\psi}\|_4 + \|\varphi\|_2] + \|\varphi^{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}}.$$

Особый интерес представляет случай неравномерной сетки, на котором мы остановимся отдельно.

7. Неравномерные сетки

До сих пор мы проводили исследование только для равномерных сеток с шагами $h = 1/N$ и $\tau = T/L$. Нетрудно показать, что априорные оценки § 1 и § 2 сохраняют силу и для неравномерных сеток

$$\omega_h^1 = \{x_0 = 0,\ x_1,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_N = 1,\ h_i = x_i - x_{i-1}\},$$
$$\omega_\tau^T = \{t_0 = 0,\ t_1,\ \ldots,\ t_j,\ \ldots,\ t_L = T,\ \tau_j = t_j - t_{j-1}\}$$

с переменными шагами h_i и τ_j.

Пусть z_i^j или $z(x_i, t_j)$ — любая сеточная функция.

Введем следующие обозначения:

$$z_{\bar{x},i}^j = \frac{z_i^j - z_{i-1}^j}{h_i}, \quad z_{x,j}^j = \frac{z_{i+1}^j - z_i^j}{h_{i+1}},$$

$$z_{\tilde{x},i}^j = \frac{z_{i+1}^j - z_i^j}{\hbar_i}, \text{ где } \hbar_i = 0{,}5\,(h_i + h_{i+1}),$$

$$z_{\bar{t},i}^j = \frac{z_i^j - z_i^{j-1}}{\tau_j}.$$

Для удобства записи будем по-прежнему опускать индексы i и j при сеточной функции и писать просто z вместо z_i^j, полагая

$z^{(+1)} = z_{i+1}^j$, $\check{z} = z_i^{j-1}$, $\hat{z} = z_i^{j+1}$, $z^{(-1)} = z_{i-1}^j$, $h = h_i$, $h^{(+1)} = h_{i+1}$ и т. д., так что

$$z_{\bar{x}} = \frac{z - z^{(-1)}}{h}, \quad z_x = \frac{z^{(+1)} - z}{h^{(+1)}} = (z_{\bar{x}})^{(+1)} \text{ и т. д.}$$

В этом случае встречаются два типа сумм:

$$1)\ (\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i \psi_i h_i, \quad [\varphi, \psi) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i \psi_i h_{i+1}, \quad (\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \psi_i h_i,$$

$$2)\ (\varphi, \psi)^* = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i \psi_i \cdot \hbar_i,$$

где φ_i и ψ_i — произвольные сеточные функции.

Вводятся следующие нормы:

$$\|\psi\|_0 = \max_{\omega_h^1} |\psi_i|, \quad \|\psi\|_1 = (1, |\psi|)^*,$$

$$\|\psi\|_2^2 = (\psi, \psi)^*, \quad \|\psi\|_3 = \|\Phi\|_2, \quad \Phi = \Phi_i = \sum_{k=1}^{i} \psi_k \hbar_k,$$

$$\|\psi\|_4 = \|\psi\|_3 + \|\psi\|_1.$$

Разностный оператор $L_h\psi$, равный на равномерной сетке $(a\psi_{\bar{x}})_x$, на неравномерной сетке определяется в виде $L_h\psi = (a\psi_{\bar{x}})_{\tilde{x}}$, т. е.

$$L_h\psi_i = \frac{1}{\hbar_i}\,\Delta\left(a_i \frac{\nabla\psi_i}{h_i}\right); \quad \Delta\psi_i = \nabla\psi_{i+1} = \psi_{i+1} - \psi_i.$$

Первая формула Грина на неравномерной сетке имеет вид

$$(\varphi, (a\psi_{\bar{x}})_{\tilde{x}})^* = -(a, \varphi_{\bar{x}}\psi_{\bar{x}}] + (a\varphi\psi_{\bar{x}})_N - (a^{(+1)}\varphi\psi_x)_0.$$

Разностное уравнение, очевидно, принимает вид

$$\rho z_{\bar{t}} - \alpha\,(a z_{\bar{x}})_{\tilde{x}} - (1 - \alpha)\,(\check{a}\check{z}_{\bar{x}})_{\tilde{x}} = \Psi.$$

При формулировке теорем следует ввести дополнительное требование: отношение h_{i+1}/h_i двух соседних шагов разностной сетки является двухсторонне ограниченной величиной:

$$0 < C_1 \leqslant \frac{h_{i+1}}{h_i} \leqslant C_2,$$

где C_1 и C_2 — постоянные, не зависящие от числа N.

Это отношение h_{i+1}/h_i является локальной характеристикой неравномерности сетки.

Основное неравенство (22) теоремы 1 принимает вид

$$\| z^j \|_0 \leqslant M \left[\sum_{j'=1}^{j} \tau_{j'} \| \psi^{j'} \|_2^2 \right]^{1/2}.$$

Вторая априорная оценка сохраняется без изменений; следует при этом, конечно, учесть смысл входящих в (34) символов на неравномерной сетке.

Применение априорных оценок § 1 и § 2 к вопросу о сходимости и точности разностных схем для уравнений параболического типа будет рассмотрено отдельно.

В заключение автор рад возможности выразить благодарность А. Н. Тихонову за интерес к работе, а также И. В. Фрязинову, дискуссия с которым способствовала уточнению некоторых оценок.

Поступила в редакцию
4.03.1961

Цитированная литература

1. M. Lees. Energy inequalities for the solution of differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **94**, 58—73.
2. M. Lees. Approximate solutions of parabolic equations. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, **7**, 167—183.
3. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 5—63.
4. А. А. Самарский. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения. Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям. (Ереван, 10—17 ноября 1958 г.). Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960, 148—160.
5. А. А. Самарский. О сходимости метода Роте для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности. Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. науки, 1959, № 1, 48—53.
6. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. М., Изд-во ин. лит., 1948, стр. 29.