ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том I Сентябрь 1961 Октябрь № 5

РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

Решению задачи Штурма—Лиувилля для уравнения

$$L^{(k,\,q)}u + \lambda r(x)u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad L^{(k,\,q)}u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u(x) \tag{1}$$

методом конечных разностей посвящен ряд работ. В статьях [1]—[3] рассматривались вопросы сходимости и точности в классе гладких коэффициентов для разностных схем частного вида.

В данной работе мы используем однородные разностные схемы, изученные в [4], для решения задачи Штурма — Лиувилля в классе разрывных коэффициентов $Q^{(m)}$. В § 1 дается постановка задачи и характеристика исходного семейства разностных схем. В § 2 доказывается сходимость разностного метода. В § 3 с помощью априорных оценок устанавливается порядок точности в $Q^{(m,\,1)}$ решения разностной задачи при $h \to 0$. Показано, что разностная схема

$$L_h^{(k,\,q,\,\lambda r)}y = (ay_{\bar{x}})_x - dy + \lambda\rho y,$$

где

$$a = \left[\int_{-1}^{0}\frac{ds}{k(x+sh)}\right]^{-1}, \quad d = \int_{-0,5}^{0,5} q(x+sh)\,ds, \quad \rho = \int_{-0,5}^{0,5} r(x+sh)\,ds,$$

обеспечивает второй порядок точности в классе разрывных коэффициентов.

§ 1. Разностная краевая задача

1. Задача Штурма — Лиувилля

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение (1) с однородными краевыми условиями

$$k(0)u'(0) - \sigma_1 u(0) = 0, \qquad k(1)\,u'(1) + \sigma_2 u(1) = 0, \tag{2}$$

где σ_1 и σ_2 — некоторые постоянные.

Задача Штурма—Лиувилля, или задача на собственные значения, состоит в отыскании таких значений параметра λ (собственных значений).

при которых существуют нетривиальные решения (собственные функции) задачи (1)—(2), а также в отыскании собственных функций.

В дальнейшем мы будем всюду предполагать, что коэффициенты, входящие в уравнение (1) и условия (2), удовлетворяют условиям

$$0 < c_1 \leqslant k(x) \leqslant c_2, \quad 0 < c_3 \leqslant r(x) \leqslant c_4, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant c_5, \qquad (3)$$
$$\sigma_1 \geqslant 0, \quad \sigma_2 \geqslant 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > 0,$$

где c_j $(j = 1,\ldots,5)$ — некоторые постоянные.

Если $k(x)$ имеет разрыв первого рода в точке $x = \xi$ $(0 < \xi < 1)$, то в этой точке должны выполняться условия сопряжения (непрерывность $u(x)$ и $k(x)\,u'(x)$):

$$[u] = 0, \quad [ku'] = 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \qquad (4)$$

где

$$[f] = f_{\text{п}} - f_{\text{л}}, \quad f_{\text{л}} = f(\xi - 0), \quad f_{\text{п}} = f(\xi + 0).$$

Задачу, определяемую условиями (1)—(4), мы в дальнейшем будем называть задачей (I).

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $Q^m[l_1, l_2]$ — класс функций, кусочно-непрерывных на отрезке $[l_1, l_2]$ вместе со своими производными до m-го порядка включительно; $Q^{(m,\gamma)}[l_1, l_2]$ $(0 < \gamma \leqslant 1)$ — класс функций из $Q^{(m)}[l_1, l_2]$, m-е производные которых удовлетворяют на интервалах их непрерывности условию Гёльдера порядка γ; $C^{(m)}[l_1, l_2]$ — как обычно, класс функций, имеющих m-ю непрерывную производную.

Задача (I), как известно, эквивалентна вариационной задаче:

1) в классе кусочно-гладких функций сравнения $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$H[\varphi] = \int_0^1 \varphi^2(x)\, r(x)\, dx = 1,$$
$$k(0)\,\varphi'(0) - \sigma_1\,\varphi(0) = 0, \quad k(1)\,\varphi'(1) + \sigma_2\,\varphi(1) = 0,$$

найти минимум функционала

$$D[\varphi] = \int_0^1 k(x)\,(\varphi')^2 dx + \int_0^1 q(x)\,\varphi^2(x)\,dx + \sigma_1\varphi^2(0) + \sigma_2\varphi^2(1). \qquad (5)$$

Этот минимум определяет первое собственное значение

$$\lambda_1 = \min D[\varphi] = D[u_1];$$

2) остальные собственные значения λ_n $(n > 1)$ находятся как минимум функционала (5) в классе кусочно-гладких функций сравнения $\varphi(x)$, удовлетворяющих дополнительным условиям:

$$H[\varphi] = 1, \quad H[\varphi, u_m] = \int_0^1 \varphi(x)\, u_m(x) r(x) dx = 0 \ \text{при} \ m < n,$$
$$k(0)\,\varphi'(0) - \sigma_1\varphi(0) = 0, \quad k(1)\,\varphi'(1) + \sigma_2\varphi(1) = 0,$$

где $u_m(x)$ — собственная функция номера m. Этот минимум определяет n-е собственное значение

$$\lambda_n = \min D[\varphi] = D[u_n]$$

и достигается на n-й собственной функции $u_n(x)$.

Задача Штурма—Лиувилля (1) для кусочно-непрерывных коэффициентов $k, q, r \in Q^{(0)}$ имеет счетное множество собственных значений $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$, которым соответствуют собственные функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ (см. [5]).

Укажем некоторые известные [5] свойства собственных функций и собственных значений.

1. Каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.

В самом деле, предположим, что λ_n соответствуют две собственные функции $\bar{u}_n(x)$ и $\bar{\bar{u}}_n(x)$. Тогда их линейная комбинация $\tilde{u}_n(x) = \bar{\bar{u}}_n(0)\,\bar{u}_n(x) - \bar{u}_n(0)\,\bar{\bar{u}}_n(x)$ удовлетворяет условию $\tilde{u}_n(0) = 0$ и также является собственной функцией, соответствующей λ_n. Из условия $k(0)\,\tilde{u}'(0) - \sigma_1 \tilde{u}(0) = 0$ для $\sigma_1 \neq \infty$ получаем $\tilde{u}'(0) = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{u}_n(x) \equiv 0$. В случае условия первого рода ($\sigma_1 = \infty$) можно выбрать $\tilde{u}_n(x) = \bar{\bar{u}}_n(0)\,\bar{u}_n(x) - \bar{u}'_n(0)\,\bar{\bar{u}}_n(x)$. Поэтому можно писать $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$

2. Собственные функции $\{u_n(x)\}$ образуют ортогональную и нормированную с весом $r(x)$ систему:

$$H[u_n, u_m] = 0 \text{ при } m \neq n, \qquad H[u_n] = 1.$$

3. Все собственные значения положительны: $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

4. Собственные значения $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, точнее,

$$c_6 n^2 \leqslant \lambda_n \leqslant c_7 n^2, \tag{6}$$

где c_6 и c_7 — положительные постоянные, не зависящие от номера n и зависящие только от c_j $(j = 1, \ldots, 5)$.

5. Собственные функции и их первые производные ограничены, точнее,

$$|u_n(x)| < c_8, \qquad |u'_n(x)| \leqslant c'_9 \sqrt{\lambda_n} \leqslant c_9 n, \tag{7}$$

где c_8 и c_9 — положительные постоянные, зависящие только от c_j $(j = 1, \ldots, 5)$.

Для случая $k, q, r \in C^{(2)}$ доказательство (7) дано в [5]. Это доказательство с некоторыми изменениями переносится и на случай $k, q, r \in Q^{(0)}$.

Введем новую переменную $t = \int_0^x r(x)\,dx$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{k}(t)\frac{d\bar{u}}{dt}\right] - \bar{q}(t)\,\bar{u} + \lambda \bar{u} = 0, \quad 0 < t < l, \tag{1'}$$

где

$$\bar{k}(t) = k(x)\,r(x), \quad \bar{q}(t) = q(x)/r(x), \quad \bar{u}(t) = u(x), \quad l = \int_0^1 r(x)\,dx.$$

Умножим уравнение (1′) на $\bar{u}'(t)$ и проинтегрируем от 0 до t:

$$\bar{k}(0)\,[\bar{u}'(0)]^2 + \lambda \bar{u}^2(0) = \bar{k}(t)\,[\bar{u}'(t)]^2 + \lambda \bar{u}^2(t) - 2\int_0^t \bar{q}\bar{u}\bar{u}'\,dt_1. \tag{8}$$

Интегрируем еще раз по t от 0 до l и учитываем, что

$$\int_0^l \bar{u}^2(t)\,dt = 1, \quad \int_0^l \bar{k}(t)\,[\bar{u}'(t)]^2\,dt \leqslant \lambda,$$

$$2\left|\int_0^l dt\left(\int_0^t \bar{q}\bar{u}\bar{u}'dt_1\right)\right| \leqslant 2l\cdot c_5\left(\int_0^l\left[\bar{u}^2dt\int_0^l[\bar{u}'(t)]^2dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{2lc_5}{c_1c_3}\sqrt{\lambda} \leqslant c_{10}\sqrt{\lambda}. \qquad (9)$$

В результате будем иметь

$$\bar{k}(0)\,[\bar{u}'(0)]^2 + \lambda\bar{u}^2(0) \leqslant \frac{2\lambda}{l} + c_{10}\sqrt{\lambda}. \qquad (10)$$

Возвращаясь теперь к (8) и учитывая неравенства (9) и (10), получаем

$$\bar{k}(t)\,[\bar{u}'(t)]^2 + \lambda\bar{u}^2(t) \leqslant \frac{2\lambda}{l} + c_{10}\sqrt{\lambda}.$$

Отсюда и из (6) следуют оценки (7).

Задача (I) эквивалентна интегральному уравнению с симметризуемым ядром:

$$u(x) = \lambda\int_0^1 G(x,\xi)r(\xi)u(\xi)d\xi, \qquad (11)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина оператора $L^{(k,q)}$ с краевыми условиями (2), а также интегральному уравнению

$$u(x) = \int_0^1 G_0(x, \xi)(\lambda r(\xi) - q(\xi))u(\xi)\,d\xi, \qquad (12)$$

где $G_0(x, \xi)$ — функция Грина оператора $L^{(k)}u = (ku')'$ с краевыми условиями (2).

2. Обозначения

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ разностную сетку

$$\omega_h = \{x_0 = 0, \ldots, x_i = i\cdot h, \ldots, x_N = N\cdot h = 1\}.$$

Сеточную функцию y_i, заданную на ω_h, в дальнейшем будем обозначать y или $y(x)$ в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений. Условимся также писать

$$\overset{(+1)}{y} = y_{i+1},\quad \overset{(-1)}{y} = y_{i-1},\quad y_{\bar{x}} = \left(y - \overset{(-1)}{y}\right)/h,\quad y_x = \left(\overset{(+1)}{y} - y\right)/h.$$

Пусть v — некоторая сеточная функция, заданная на ω_h. Введем обозначения

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_iv_ih,\quad [y, v) = \sum_{i=0}^{N-1} y_iv_ih,\quad (y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_iv_ih,\quad [y, v] = \sum_{i=0}^{N} y_iv_ih.$$

Мы будем пользоваться следующими нормами:

$$\|v\|_0 = \max_{\omega_h}|v_i|,\quad \|v\|_\sigma = [|v|^\sigma, 1]^{1/\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2),$$

$$\|v\|_3 = \sum_{i=1}^{N-1} h\left|\sum_{k=1}^{i} hv_k\right|, \qquad (13)$$

$$\|v\|_4 = \|v\|_3 + |(v, 1)| + |v_0|\cdot h + |v_N|h. \qquad (14)$$

Может оказаться, что функция v определена не на всей сетке, а на ее части. Например, функция $y_{\bar{x}}$ определена в точках x_i для $i = 1, 2, \ldots, N$,

а функция y_x — для $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. В этом случае

$$\|y_{\bar{x}}\|_0 = \max_{0<i\leqslant N} |y_{\bar{x},i}|, \qquad \|y_{\bar{x}}\|_\sigma = (|y_{\bar{x}}|^\sigma, 1)^{1/\sigma},$$
$$\|y_x\|_0 = \max_{0\leqslant i<N} |y_{x,i}|, \qquad \|y_x\|_\sigma = (|y_x|^\sigma, 1)^{1/\sigma}. \qquad \sigma = 1, 2.$$

Мы будем также писать

$$[y, \psi] = (y, \psi) + y_0\bar{\nu}_1 + y_N\bar{\nu}_2, \tag{15}$$

где ψ — функция, заданная в точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, если формально полагать $h\psi_0 = \bar{\nu}_1$, $h\psi_N = \bar{\nu}_2$.

Разностный оператор $(a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1}))/h^2$ при помощи введенных обозначений запишется в виде $(ay_{\bar{x}})_x$.

Нам понадобятся в дальнейшем:

1) формула суммирования по частям:

$$[y, v_x) = -(v, y_{\bar{x}}] + (yv)_N - (yv)_0; \tag{16}$$

2) разностные формулы Грина:

$$((ay_{\bar{x}})_x, v) = -(a, y_{\bar{x}} v_{\bar{x}}] + (ay_{\bar{x}} v)_N - (a^{(+1)} y_x v)_0, \tag{17}$$
$$((ay_{\bar{x}})_x, v) = ((av_{\bar{x}})_x, y) + a_N(y_{\bar{x}} v - yv_{\bar{x}})_N - a_1(y_x v - yv_x)_0. \tag{18}$$

На выводе этих формул ввиду его элементарности мы не останавливаемся. Условимся обозначать $\rho(h)$ любое выражение, равномерно сходящееся к нулю при $h \to 0$.

Все постоянные, не зависящие от h, будем обозначать буквой M, не указывая, как правило, их структуру и зависимость от других постоянных.

3. Разностные схемы

При построении разностной схемы для решения задачи (I) мы используем результаты работы [4]. Введем обозначения

$$L^{(k,q,\lambda r)} u = (ku')' - qu + \lambda ru, \qquad L_h^{(k,q,\lambda r)} y = (ay_{\bar{x}})_x - dy + \lambda\rho y.$$

Будем предполагать, что $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ есть однородная консервативная схема стандартного типа [4]. Ее коэффициенты a, d и ρ выражаются с помощью шаблонных функционалов

$$A^h[f(s)], \quad f \in Q^{(0)}[-1; 0]; \quad D^h[f(s)], \quad f \in Q^{(0)}[-0{,}5; 0{,}5];$$
$$R^h[f(s)], \quad f \in Q^{(0)}[-0{,}5; 0{,}5],$$

определенных в классе $Q^{(0)}(f \in Q^{(0)})$, через коэффициенты k, q и r дифференциального уравнения (1). Каждый коэффициент схемы зависит только от одного коэффициента дифференциального уравнения (схема стандартного типа):

$$a = A^h[k(x + sh)], \quad -1 \leqslant s \leqslant 0; \qquad d = D^h[q(x + sh)], \quad -0{,}5 \leqslant s \leqslant 0{,}5;$$
$$\rho = R^h[r(x + \rho h)], \quad -0{,}5 \leqslant s \leqslant 0{,}5.$$

(Зависимость коэффициентов a, d и ρ от h в обозначениях явно не указываем.)

В качестве исходного семейства схем мы рассматриваем консервативные схемы, поскольку, как показано в [4], неконсервативные схемы

$$\bar{L}_h^{(k,q)} y = (by_x - ay_{\bar{x}})/h - dy$$

не дают сходимости в $Q^{(m)}$. В классе гладких коэффициентов схему $\overline{L}_h^{(k,q)}$ можно преобразовать в консервативную схему

$$L_h^{(k,q)} y_i = \mu_i \overline{L}_h^{(k,q)} y_i = (\overline{a} y_{\bar{x}})_{x,i} - \overline{d}_i y_i,$$

где

$$\mu_i = \prod_{k=1}^{i-1} (b_k / a_{k+1}), \quad \overline{a}_i = a_i \mu_i, \quad \overline{d}_i = d_i \mu_i$$

(см. [4]).

Если схема $\overline{L}_h^{(k,q)}$ имеет m-й ($m=1$, 2) порядок аппроксимации и $k(x) \in C^{(m+1)}$, то $\mu_i = 1 + O(h^m)$. Отсюда следует, что все результаты, получаемые в дальнейшем для $k(x) \in C^{(m+1)}$, q, $r \in C^{(m)}$, переносятся и на неконсервативные схемы.

Заметим, что в работах [1]—[3] изучались только дискретные схемы частного вида (например, $a = k(x-h)$, $a = k(x - 0{,}5h)$, $d = q$, $\rho = r(x)$), а в [3], кроме того,— дискретные схемы четвертого порядка в $C^{(m)}$.

Разностная схема $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ характеризуется погрешностью аппроксимации в классе дифференцируемых коэффициентов

$$\psi = L_h^{(k,q,\lambda r)} u - L^{(k,q,\lambda r)} u,$$

где u — любая достаточное число раз дифференцируемая функция.

При изучении сходимости и точности мы будем иметь дело с погрешностью аппроксимации на решении $u(x)$ уравнения (1).

В [4] было введено понятие ранга шаблонных функционалов.

Если все шаблонные функционалы имеют ранг m ($m = 0$, 1, 2), то мы говорим, что $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ является схемой m-го ранга. Требование определенного порядка аппроксимации приводит к некоторым условиям (мы их не выписываем), которым удовлетворяют шаблонные функционалы и их дифференциалы по h и по функциональному аргументу. Из свойств шаблонных функционалов, которые выполнены для схем всех рангов, начиная со схемы нулевого ранга, укажем два свойства:

а) $A^h[1] = D^h[1] = R^h[1] = 1$ (условие нормировки),

б) функционалы $A^h[f]$, $D^h[1]$ и $R^h[f]$ являются неубывающими: $A^h[f_2] \geqslant A^h[f_1]$, если $f_2 \geqslant f_1$, и т. д.

Кроме того, мы предполагаем, что $D^h[f]$ и $R^h[f]$ — линейные функционалы.

Отсюда и из (3), в частности, следует, что коэффициенты a, d и ρ удовлетворяют условиям

$$0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_2, \quad 0 < c_3 \leqslant \rho \leqslant c_4, \quad 0 \leqslant d \leqslant c_5, \tag{19}$$

где c_j ($j = 1,\ldots,5$) — постоянные, входящие в условие (3).

В качестве исходного класса разностных схем $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ мы будем рассматривать в § 2 схемы нулевого ранга.

В § 3 рассматривается также принадлежащее исходному классу семейство разностных схем 2-го ранга, удовлетворяющих условиям второго порядка аппроксимации (см. [4]). Мы будем называть его исходным семейством схем второго порядка.

Если шаблонные функционалы являются каноническими, т. е. не зависят от параметра h, то разностная схема называется канонической.

Две схемы называются эквивалентными по порядку аппроксимации (точности), если они имеют одинаковый порядок аппроксимации (точности). Нетрудно убедиться в том, что любая схема m-го ранга эквивалентна своей канонической части [4], т. е. схеме с каноническими шаблонными функционалами $A^{(0)}$, $D^{(0)}$ и $R^{(0)}$, которые являются главными членами в разложении A^h, D^h и R^h по h.

Отсюда следует, что все изложение можно вести для канонических схем.

Дадим более детальную характеристику свойств канонических шаблонных функционалов $A[f]$, $D[f]$ и $R[f]$.

Линейные канонические функционалы $D[f]$ и $R[f]$, удовлетворяющие условиям а) и б), имеют любой сколь угодно большой ранг.

Канонический функционал $A[f]$, являющийся, вообще говоря, нелинейным, имеет m-й ранг, если, помимо условий а) и б), он удовлетворяет еще двум требованиям:

в) $A[f]$ есть однородный функционал первой степени, т. е.

$$A[cf] = cA[f],$$

где c — любое положительное число;

г) $A[f]$ имеет m-й дифференциал, так что, в частности, можно написать

$$\begin{aligned} &A\,[1+\delta\cdot f] = 1+\rho\,(\delta) && (\text{если } |f|\leqslant M) \text{ при } m=0,\\ &A\,[1+\delta\cdot f] = 1+\delta A_1\,[f]+\delta\rho\,(\delta) && \text{при } m=1,\\ &A\,[1+\delta\cdot f] = 1+\delta A_1\,[f]+\delta^2 A_2[f]+\delta^2\rho\,(\delta) && \text{при } m=2, \end{aligned}$$

где $\rho(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, $A_1[f]$ — линейный функционал, $A_2[f]$ — квадратичный функционал.

Необходимые условия m-го порядка аппроксимации схемы $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ имеют вид (k, q, $r\in C^{(m)}[0,1]$)

$$a=k(\bar{x})+O(h^m),\ d=q(x)+O(h^m),\ \rho=r(x)+O(h^m),\ \bar{x}=x-0{,}5h,\quad m=1,2. \tag{20}$$

Любая каноническая схема 1-го ранга удовлетворяет этим условиям при $m=1$.

Каноническая схема 2-го ранга удовлетворяет условиям (20) при $m=2$, если

$$A_1[s]=-0{,}5,\quad D[s]=0,\quad R[s]=0{,}5. \tag{21}$$

Нетрудно показать, что для любой симметричной схемы 2-го ранга условия (21) выполнены.

4. Разностная краевая задача

Прежде чем формулировать разностный аналог задачи (I), мы должны сформулировать разностные краевые условия, соответствующие условиям (2).

Рассмотрим граничный оператор

$$l^{(1)}u = k(0)\,u'(0)-\sigma_1 u(0)$$

и его разностный аналог

$$\bar{l}_h^{(1)}\,y = a_1 y_{x,0}-\sigma_1 y_0.$$

Нетрудно показать, что оператор $\bar{l}_h^{(1)}$ имеет только первый порядок аппроксимации. В самом деле, пусть $L_h^{(k)}$ — схема 2-го ранга, удовлетворяющая условиям (21) второго порядка аппроксимации, так что $a = k(x - 0{,}5h) + O(h^2)$ для $k \in C^{(2)}$.

Тогда будем иметь

$$a_1 = k(0) + 0{,}5hk'(0) + O(h^2), \quad u_{x,0} = u'(0) + 0{,}5hu''(0) + O(h^2),$$
$$\bar{l}_h^{(1)}u - l^{(1)}u = 0{,}5h(ku')'|_{x=0} + O(h^2) = 0{,}5h\,(q(0) - \lambda r\,(0))u(0) + O(h^2),$$

где $u(x)$ — решение уравнения (1).

Отсюда следует, что разностный оператор

$$l_h^{(1)}y = a_1 y_{x,0} - \bar{\sigma}_1 y + 0{,}5h\lambda r\,(0)\,y_0, \quad \text{где } \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + 0{,}5\,hq\,(0),$$

имеет второй порядок аппроксимации в классе решений уравнения (1). Этим же свойством обладает оператор

$$l_h^{(2)}y = a_N y_{\bar{x},N} + \bar{\sigma}_2 y_N - 0{,}5h\lambda r\,(1)\,y_N, \qquad \text{где } \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 + 0{,}5\,hq\,(1),$$

соответствующий оператору

$$l^{(2)}u = k\,(1)\,u'\,(1) + \sigma_2 u\,(1).$$

Разностную задачу Штурма — Лиувилля формулируем следующим образом.

Требуется найти такие значения параметра λ^h (собственные значения), которым соответствуют нетривиальные решения (собственные функции) однородного уравнения

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy + \lambda^h \rho y = 0 \text{ в точках } x = x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{22}$$

с однородными краевыми условиями

$$a_1 y_{x,0} - \bar{\sigma}_1 y_0 + h\lambda^h \rho_0 y_0 = 0, \qquad a_N y_{\bar{x},N} + \bar{\sigma}_2 y_N - h\lambda^h \rho_N y_N = 0, \tag{23}$$

где

$$\rho_0 = 0{,}5r\,(0), \quad \rho_N = 0{,}5r\,(1), \quad \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + 0{,}5hq\,(0), \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 + 0{,}5hq\,(1),$$

а также найти эти нетривиальные решения (собственные функции).

Коэффициенты задачи удовлетворяют условиям

$$0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_2, \quad 0 < c_3 \leqslant \rho \leqslant c_4, \quad 0 \leqslant d \leqslant c_5, \quad \sigma_1 \geqslant 0, \quad \sigma_2 \geqslant 0,$$
$$\sigma_1 + \sigma_2 > 0. \tag{24}$$

Условия сопряжения, аналогичные условиям (4), в окрестности разрыва коэффициента k отсутствуют, так как мы рассматриваем однородные схемы, не предусматривающие явного выделения точек разрыва коэффициентов уравнения (1) (схемы сквозного счета).

Разностную краевую задачу (22)—(24) мы в дальнейшем называем задачей (II).

5. Разностная вариационная задача

Пусть y и λ^h — собственная функция и соответствующее собственное значение задачи (II). Полагая в формуле (17) $v = y$ и пользуясь условиями (23), находим

$$\lambda^h = D_N\,[y]/H_N\,[y], \tag{25}$$

где

$$D_N[y] = [a, y_{\bar{x}}^2] + \bar{\sigma}_1 y_0^2 + \bar{\sigma}_2 y_N^2 \qquad (y_{\bar{x}}^2 = (y_{\bar{x}})^2), \tag{26}$$

$$H_N[y] = [\rho, y^2], \quad \rho_0 = 0{,}5r(0), \quad \rho_N = 0{,}5r(1). \tag{27}$$

Пользуясь формулой Грина, нетрудно убедиться в том, что разностная краевая задача (II) эквивалентна вариационной задаче:

1) найти минимум функционала $D_N[\varphi]$ в классе сеточных функций φ, удовлетворяющих условиям

$$a_1\varphi_{x,0} - \bar{\sigma}_1\varphi_0 + hD_N[\varphi]\rho_0\varphi_0 = 0, \quad a_N\varphi_{\bar{x},N} + \bar{\sigma}_2\varphi_N - hD_N[\varphi]\rho_N\varphi_N = 0,$$
$$H_N[\varphi] = 1;$$

при этом

$$\lambda_1^h = D_N[y_1] = \min D_N[\varphi]$$

есть наименьшее собственное значение, а y_1 — соответствующая собственная функция задачи (II);

2) найти минимум $D_N[\varphi]$ в классе функций сравнения, удовлетворяющих условиям

$$H_N[\varphi] = 1, \quad H_N[\varphi, y_m] = [\rho\varphi, y_m] = 0 \qquad \text{для } m = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$a_1\varphi_{x,0} - \bar{\sigma}_1\varphi_0 + hD_N[\varphi]\rho_0\varphi_0 = 0, \quad a_N\varphi_{\bar{x},N} + \bar{\sigma}_2\varphi_N - hD_N[\varphi]\rho_N\varphi_N = 0,$$

где y — собственная функция номера m; при этом

$$\min D_N[\varphi] = D_N[y_n] = \lambda_n^h$$

есть n-е собственное значение, а $y_n(x)$ — его собственная функция.

6. Интегральное соотношение

Рассмотрим разностную функцию Грина $G^h(x, \xi)$, определяемую из условий:

$$(aG_{\bar{x}}^h)_x - dG^h = -\frac{\delta(x, \xi)}{h}, \quad \text{где } \delta(x, \xi) = \begin{cases} 1, & x = \xi, \\ 0, & x \neq \xi, \end{cases}$$
$$a_1 G_{x,0}^h - \bar{\sigma}_1 G_0^h = 0, \quad a_N G_{\bar{x},N}^h + \bar{\sigma}_2 G_N^h = 0.$$

Вводя функции α^h и β^h — решения однородного уравнения

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$a_1\alpha_{x,0}^h = 1, \quad a_1\alpha_{x,0}^h - \bar{\sigma}_1\alpha_0^h = 0; \quad a_N\beta_{\bar{x},N}^h = -1, \quad a_N\beta_{\bar{x},N}^h + \bar{\sigma}_2\beta_N^h = 0,$$

представим по аналогии с [4] функцию Грина в виде

$$G^h(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}\alpha^h(x)\beta^h(\xi), & x < \xi, \\ \dfrac{1}{\Delta}\alpha^h(\xi)\beta^h(x), & x > \xi, \end{cases} \tag{28}$$

где

$$\Delta = \alpha_N^h + \frac{1}{\bar{\sigma}_2}[1 + (d, \alpha^h)] = \beta_0^h + \frac{1}{\bar{\sigma}_1}[1 + (d, \beta^h)] = \text{const}.$$

Отсюда сразу следует симметрия функции Грина

$$G^h(x, \xi) = G^h(\xi, x).$$

По аналогии с [4] нетрудно показать, что G^h и ее разностные производные $G^h_{\bar{x}}$ и $G^h_{\bar{\xi}}$ ограничены:

$$0 \leqslant G^h < M_1, \quad \|G^h_{\bar{x}}\|_0 \leqslant M_2, \quad \|G^h_{\bar{\xi}}\|_0 \leqslant M_2,$$

где M_1 и M_2 — положительные постоянные, не зависящие от h.

Если $d \equiv 0$, то α^h и β^h имеют вид

$$\alpha^h(x) = \frac{1}{\bar{\sigma}_1} + \sum_{x'=h}^{x'=x} \frac{h}{a(x')}, \quad \beta^h(x) = \frac{1}{\bar{\sigma}_2} + \sum_{x'=x+h}^{x'=1} \frac{h}{a(x')},$$

$$\Delta = \frac{1}{\bar{\sigma}_1} + \frac{1}{\bar{\sigma}_2} + (1, 1/a].$$

Если при этом $\bar{\sigma}_1 = 0$, то $\alpha^h(x) \equiv 1$, $\Delta \equiv 1$.

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1. *Пусть $G^h_0(x, \xi)$ — функция Грина разностного оператора $(ay_{\bar{x}})_x$ с краевыми условиями* (23), *а $G_0(x, \xi)$ — функция Грина дифференциального оператора $(ku')'$ с условиями* (2). *Если $k(x) \in Q^0$ и $\|a - k\|_1 = \rho(h)$, то $\|G^h_0 - G_0\|_0 = \rho(h)$, где $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.*

В самом деле, замечая, что

$$\|\alpha^h - \alpha^0\|_0 = \rho(h), \quad \|\beta^h - \beta^0\|_0 = \rho(h),$$

где

$$\alpha^0(x) = \frac{1}{\sigma_1} + \int_0^x \frac{dt}{k(t)}, \quad \beta^0(x) = \frac{1}{\sigma_2} + \int_x^1 \frac{dt}{k(t)},$$

находим

$$\|G^h_0 - G_0\|_0 \leqslant M \|a - k\|_1 = \rho(h),$$

так как G_0 определяется той же формулой (23), в которой α^h и β^h заменены функциями α^0 и β^0.

Пользуясь второй формулой Грина (18), нетрудно убедиться в эквивалентности разностной задачи Штурма—Лиувилля разностному аналогу интегрального уравнения

$$y = \lambda^h [G^h, \rho y], \tag{29}$$

которое с помощью замены

$$\varphi(x) = \sqrt{\rho(x)}\, y(x), \qquad K^h(x, \xi) = \sqrt{\rho(x)\, \rho(\xi)}\, G^h(x, \xi)$$

сводится к уравнению

$$\varphi = \lambda^h [K^h, \varphi] \tag{30}$$

с симметричным ядром $K^h(x, \xi)$.

Если воспользоваться функцией Грина G^h_0 оператора $L^{(k)}_h$, то вместо (30) получим уравнение

$$y = [G^h_0, (\lambda^h \rho - d)\, y], \tag{31}$$

где $d_0 = 0{,}5q(0)$, $d_N = 0{,}5q(1)$, $\rho_0 = 0{,}5r(0)$, $\rho_N = 0{,}5r(1)$.

7. Свойства собственных функций и собственных значений

Разностная задача Штурма — Лиувилля (11) является чисто алгебраической задачей. Поэтому не представляет труда доказательство следующих утверждений:

1) существует N вещественных собственных значений $\lambda_1^h, \lambda_2^h, \ldots, \lambda_N^h$, которым соответствуют собственные функции $y_1, y_2, \ldots, y_N$;

2) каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция (доказывается так же, как и для задачи (I) в п. 1), так что можно написать $\lambda_1^h < \lambda_2^h < \cdots < \lambda_n^h < \cdots < \lambda_N^h$;

3) все собственные значения положительны (это следует из (25));

4) собственные функции образуют ортогональную и нормированную с весом ρ систему:

$$H_N\,[y_m, y_n] = [\rho y_m, y_n] = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n; \end{cases}$$

5) $$M_1 n^2 \leqslant \lambda_n^h \leqslant M_2 n^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots, N), \tag{32}$$

где M_1 и M_2 — положительные постоянные, не зависящие ни от h, ни от n.

Лемма 2. *Пусть y_n, λ_n^h есть n-я нормированная собственная функция и n-е собственное значение задачи* (II). *Тогда функции y_n и $(y_n)_{\bar{x}}$ равномерно ограничены:*

$$\|y_n\|_0 \leqslant M_1 n^{1/2}, \quad \|(y_n)_{\bar{x}}\|_0 \leqslant M_2 n^{3/2} \tag{33}$$

где M_1 и M_2 — постоянные, не зависящие от h и от n.

Пусть x и x' — любые две точки сетки ω_h. Рассмотрим два очевидных тождества:

$$y^2(x) - y^2(x') = \sum_{s=x'+h}^{s=x} (y^2(s))_{\bar{x}} \cdot h = \sum_{s=x'+h}^{s=x} [y(s) + y(s-h)]\, y_{\bar{x}}(s) \cdot h, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}(a(x)\, y_{\bar{x}}(x))^2 - (a(x')\, y_{\bar{x}}(x'))^2 &= \sum_{s=x'}^{s=x-h} h\,[(a(s)\, y_{\bar{x}}(s))^2]_x = \\ &= \sum_{s=x'}^{s=x-h} (a(s)\, y_{\bar{x}}(s))_x \cdot [a(s)\, y_{\bar{x}}(s) + a(s+h)\, y_x(s)] \cdot h = \\ &= \sum_{s=x'}^{s=x-h} (d(s) - \lambda^h \rho(s))\, [a(s)\, y_{\bar{x}}(s) + a(s+h)\, y_x(s)]\, y(s) \cdot h \\ &\qquad (x > 0,\ x' > 0)\end{aligned} \tag{35}$$

(индекс n пока опускаем).

Из условия нормировки $[\rho, y^2] = 1$ следует, что существует по крайней мере одна точка x', в которой $\rho(x')\, y^2(x') \leqslant 1$ и, следовательно, $y^2(x') \leqslant 1/c_3$. Применяя для преобразования правой части (34) неравенство Коши—Буняковского и учитывая (32), получим

$$y^2(x) \leqslant \frac{1}{c_3} + \frac{2}{\sqrt{c_1 c_3}} [a, y^2]^{1/2} \cdot (a, y_{\bar{x}}^2]^{1/2} \leqslant \frac{1}{c_3} + \frac{2\sqrt{\lambda_n^h}}{\sqrt{c_1 c_3}} \leqslant M_1^2 n. \tag{36}$$

Далее, из условия $(a, y_{\bar{x}}^2] \leqslant \lambda^h$ следует, что существует такая точка x', в которой

$$a(x')\, y_{\bar{x}}^2(x') \leqslant \lambda^h,$$

т. е.

$$(a(x')\, y_{\bar{x}}(x'))^2 \leqslant c_2 \lambda^h.$$

Пользуясь затем неравенством Коши — Буняковского для преобразова-

ния правой части тождества (35) и учитывая (25) и (32), будем иметь

$$y_x^2(x) \leqslant \frac{c_2}{c_1^2}\lambda^h + 2\sqrt{\frac{c_5}{c_3}}\,\frac{c_5}{c_1^2}(\lambda^h)^{1/2} + \frac{2\sqrt{c_3c_4}}{c_1^2}(\lambda^h)^{3/2} \leqslant M_2^2 n^3. \qquad (37)$$

Из неравенств (36) и (37) в силу произвольности x следуют оценки (33).

Оценки (33) являются более грубыми по сравнению с оценками (7) для задачи (I). Однако, чтобы не усложнять изложение, мы не будем заниматься их уточнением, тем более что для наших целей в этом и нет необходимости.

Условие нормировки $H_N[y] = 1$ определяет собственную функцию y с точностью до знака. Для однозначного определения собственной функции надо ввести дополнительное условие выбора знака. В случае краевого условия при $x = 0$ второго или третьего рода можно для этого потребовать, чтобы $y(0) > 0$, а в случае краевого условия первого рода ($y(0) = 0$) потребовать, чтобы $y_{x,0} > 0$. Аналогичный выбор знака может быть проведен и для собственных функций $u(x)$ исходной задачи (I). В дальнейшем изложении нормировка собственных функций наряду с условиями $H_N[y] = 1$ и $H[u] = 1$ будет включать и выбор знака указанным выше способом.

§ 2. Сходимость решений разностной задачи

Сходимость собственных значений и собственных функций разностной задачи (II) к собственным значениям и функциям исходной задачи Штурма — Лиувилля (I) при $N \to \infty$ ($h \to 0$) была доказана Курантом [1] для простейшей схемы $a = k(x - h)$, $d = q(x)$, $\rho = r(x)$ в классе гладких коэффициентов. В этом параграфе мы, пользуясь методом Куранта, докажем сходимость для задачи (II) в классе кусочно-непрерывных коэффициентов ($k, q, r \in Q^{(0)}$).

Нами будет доказана следующая

Теорема 1. *Если схема $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ имеет нулевой ранг, то решение $(\lambda_n^h, y_n(x))$ задачи* (II) *сходится на любой последовательности сеток при $h \to 0$ к соответствующему решению $(\lambda_n, u_n(x))$ задачи* (I)

$$\lambda_n^h - \lambda_n = \rho(h), \qquad \| y_n - u_n \|_0 = \rho(h)$$

для любых кусочно-непрерывных коэффициентов $k, q, r \in Q^{(0)}$, удовлетворяющих условию (3).

Рассмотрим сначала случай первого собственного значения ($n = 1$).

Пусть $\varphi(x)$ — любая кусочно-гладкая функция. Нетрудно заметить, что

$$\lim_{N\to\infty} D_N[\varphi] = D[\varphi], \qquad \lim_{N\to\infty} H_N[\varphi] = H[\varphi].$$

Отсюда следует, что $D_N[\varphi] \leqslant M$, где M — постоянная, не зависящая от N (от $h = 1/N$).

Пусть $y = y(x, h)$ — сеточная функция, реализующая минимум функционала $D_N[\varphi]$:

$$\lambda^h = D_N[y]$$

при условии нормировки $H_N[y] = 1$.

Рассмотрим последовательность сеточных функций $\{y(x, h)\}$ на некоторой последовательности сеток.

Лемма 3. *Последовательность функций* $\{y(x, h)\}$ *равностепенно непрерывна и равномерно ограничена.*

Если x', x'' — точки сетки, то

$$y(x'', h) - y(x', h) = \sum_{s=x'}^{s=x''-h} h \cdot y_x(s, h).$$

Пользуясь затем неравенством Коши—Буняковского и ограниченностью $D_N[y]$, получим

$$|y(x'', h) - y(x', h)| \leqslant \sqrt{(1, y_x^2]} \cdot \sqrt{|x'' - x'|} \leqslant M\sqrt{|x'' - x'|}. \quad (38)$$

Из условия нормировки $H_N[y] = 1$ следует, что по крайней мере в одной точке $x = x'$ имеет место неравенство

$$\rho(x')\, y^2(x', h) \leqslant 1, \quad \text{т. е.} \quad |y(x', h)| \leqslant 1/\sqrt{c_3}.$$

Отсюда и из (38) следует равномерная ограниченность последовательности $\{y(x, h)\}$:

$$|y(x'', h)| \leqslant |y(x'', h) - y(x', h)| + |y(x', h)| \leqslant M.$$

По теореме Арцела, примененной для последовательности сеточных функций, существует некоторая подпоследовательность $\{y(x, h_k)\}$, равномерно сходящаяся к некоторой функции $\tilde{u}(x)$, непрерывной на отрезке $[0, 1]$:

$$\|y(x, h_k) - \tilde{u}(x)\|_0 = \rho(h_k).$$

Будем предполагать, что последовательность $\{h_k\}$ такова, что числовая последовательность $\{\lambda^{h_k} = \lambda(h_k)\}$ сходится к некоторому пределу $\tilde{\lambda}$:

$$\lim_{h_k \to 0} \lambda(h_k) = \tilde{\lambda}.$$

В противном случае мы выбрали бы из нее сходящуюся подпоследовательность и ограничились бы рассмотрением только тех номеров k, которые соответствуют этой подпоследовательности.

Лемма 4. *Если для некоторой последовательности*

$$\lim_{h_k \to 0} \lambda(h_k) = \tilde{\lambda},$$

то $\tilde{\lambda} \leqslant \lambda$.

Пусть $u^*(x)$ — некоторая кусочно-гладкая функция, для которой

$$\lambda^* = D[u^*] / H[u^*] \leqslant \lambda + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0,$$

и пусть

$$\lambda^*(h_k) = D_{N_k}[u^*] / H_{N_k}[u^*] \qquad (N_k = 1/h_k).$$

В силу принципа минимума $\lambda(h_k) \leqslant \lambda^*(h_k)$, причем $\lambda^*(h_k) \to \lambda^*$ при $h_k \to 0$. Переходя к пределу при $h_k \to 0$, получим

$$\tilde{\lambda} \leqslant \lambda^* \leqslant \lambda + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε следует, что $\tilde{\lambda} \leqslant \lambda$.

Наша ближайшая цель — показать, что предельная функция удовлетворяет условиям (1) и (2) при $\lambda = \tilde{\lambda}$.

Разностная задача (II), как было показано в § 1, п. 6, эквивалентна

уравнению

$$y = [G_0^h, (\lambda^h \rho - d)\, y], \tag{31}$$

где G_0^h — функция Грина оператора $(ay_{\bar{x}})_x$ при условиях (23). Совершим теперь предельный переход в (31) при $h_k \to 0$ и воспользуемся леммой 1. Тогда получим

$$\tilde{u}(x) = \int_0^1 G_0(x, \xi)\,(\tilde{\lambda} r(\xi) - q(\xi))\,\tilde{u}(\xi)\, d\xi, \tag{39}$$

где $G_0(x, \xi)$ — функция Грина оператора $(ku')'$ при условиях (2).

Отсюда, по определению функции Грина, следует, что решение $\tilde{u}(x)$ интегрального уравнения (39) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L^{(k,q)}\tilde{u} + \tilde{\lambda} r \tilde{u} = 0$$

и краевым условиям

$$k(0)\,\tilde{u}'(0) - \sigma_1 \tilde{u}(0) = 0, \qquad k(1)\,\tilde{u}'(1) + \sigma_2 \tilde{u}(1) = 0.$$

Так как всякому собственному значению задачи (I) соответствует только одна собственная функция $u_1(x)$, а $\lambda = \lambda_1$ есть наименьшее собственное значение, то

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 \text{ и } \tilde{u}(x) \equiv u_1(x).$$

Из сказанного также следует, что вся последовательность $\{y(x, h)\}$ равномерно сходится к $u(x)$, а $\lambda_1^h = \lambda_1(h)$ сходится к λ_1 при $h \to 0$:

$$\|y_1 - u_1\|_0 = \rho(h), \quad \lambda_1^h - \lambda_1 = \rho(h).$$

Приведенные выше рассуждения относились к наименьшему собственному значению λ_1^h.

В случае других собственных значений λ_n^h для $n > 1$ все рассуждения сохранят силу, если учесть, что λ_n^h и λ_n определяются как минимумы функционалов $D_N[\varphi]$ и, соответственно, $D[\varphi]$ при дополнительных условиях ортогональности $H_N[\varphi, y_m] = 0$ и $H[\varphi, u_m] = 0$ $(1 \leqslant m < n)$. Тем самым теорема 1 доказана.

§ 3. О точности разностного метода

1. Уравнение для погрешности собственной функции

Пусть (λ^h, y) — решение разностной задачи (II), а (λ, u) — соответствующее решение исходной задачи Штурма—Лиувилля (I). Выясним вопрос об асимптотическом порядке при $h \to 0$ погрешности $z = y - u$ в норме $\| \ \|_0$, а также разности $\Delta\lambda = \lambda^h - \lambda$. Сформулируем прежде всего краевую задачу для z. Подставим $y = z + u$ в уравнение (22) и учтем уравнение (1) для u; тогда получим для z неоднородное разностное уравнение

$$(az_{\bar{x}})_x - d \cdot z + \lambda^h \rho \cdot z = -\Psi, \tag{40}$$

где

$$\Psi = \psi + (\lambda^h - \lambda)\,\rho u, \tag{41}$$

$$\psi = L_h^{(k,q,\lambda r)} u - L^{(k,q,\lambda r)} u = [(au_{\bar{x}})_x - (ku')'] - (d - q)u + \lambda(\rho - r)u. \tag{42}$$

Пусть $\lambda^h = \lambda_n^h$ — собственное значение номера n, а $\varphi_n(x)$ — его нормированная собственная функция ($[\varphi_n, \varphi_n] = 1$).

Условие $[y, \rho z] = 0$ запишется в виде

$$[\varphi_n, v] = 0. \tag{55}$$

Кроме того, имеем

$$[\varphi_n, f] = 0. \tag{56}$$

Найдем резольвенту $R(x, \xi; \lambda_n^h)$, с помощью которой решение уравнения (53) дается формулой

$$v = f + \lambda_n^h [R, f]. \tag{57}$$

Отсюда и из условий (55) и (56) следует ортогональность R к φ_n:

$$[R, \varphi_n] = 0. \tag{58}$$

Этим же свойством обладает ядро

$$K_1(x, \xi) = K(x, \xi) - \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^h} = \sum_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{N} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\xi)}{\lambda_k^h}.$$

Резольвента R определяется из уравнения

$$R(x, \xi; \lambda_n^h) = K_1(x, \xi) + \lambda_n^h [K_1(x, t), R(t, \xi; \lambda_n^h)]$$

и может быть записана в виде

$$R = K_1 + R_1,$$

где

$$R_1 = R_1(x, \xi; \lambda_n^h) = \sum_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{N} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(\xi)}{\lambda_k^h(\lambda_k^h/\lambda_n^h - 1)}.$$

Ядро K_1 ограничено в силу ограниченности функции Грина и собственной функции $\varphi_n(x)$ (лемма 2). Поэтому будем иметь:

$$\sum_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{N} \frac{\varphi_k^2(x)}{(\lambda_k^h)^2} \leqslant [K_1^2(x, \xi), 1] \leqslant M,$$

$$\|R_1\|_2^2 = [R_1^2(x, \xi; \lambda_n^h), 1] = \sum_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{N} \frac{\varphi_k^2(x)}{(\lambda_k^h)^2(1 - \lambda_k^h/\lambda_n^h)^2} \leqslant M,$$

$$\|R\|_2 \leqslant \|K_1\|_2 + \|R_1\|_2 \leqslant M.$$

Обращаясь к формуле (57), получаем

$$\|v\|_0 \leqslant (1 + \lambda_n^h \|R\|_2)\|f\|_0. \tag{59}$$

4. Априорные оценки

Теорема 2. *Пусть* (λ_n^h, y_n) — *собственное значение и нормированная собственная функция номера* n *задачи* (II), *а* (λ_n, u_n) — *собственное значение и нормированная собственная функция номера* n *задачи* (I).

Если выполнены условия теоремы 1, *то при достаточно малом* $h \leqslant h_0$

имеют место неравенства

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| \leqslant M_1(n) \|\psi\|_4, \tag{51}$$

$$\|y_n - u_n\|_0 \leqslant M_2(n) \|\psi\|_4 + M |H_N[u_n] - H[u]|, \tag{60}$$

где $M_1(n)$ *и* $M_2(n)$ — *постоянные, зависящие от* n *и не зависящие от* h.

Для доказательства теоремы достаточно установить лишь неравенство (60), так как оценка для $\lambda_n^h - \lambda_n$ уже получена в п. 2 (лемма 5).

Обратимся к неравенству (59) и рассмотрим $\|f\|_0$, где

$$f = [K, \bar{\psi}] + (\lambda^h - \lambda)[K, \sqrt{\rho} u], \qquad \bar{\psi} = \psi / \sqrt{\rho}.$$

Второе слагаемое, взятое по норме $\| \quad \|_0$, мажорируется величиной $M|\lambda^h - \lambda|$ или, согласно лемме 5, величиной $M_1(n)\|\psi\|_4$. Преобразуем теперь выражение

$$[K, \bar{\psi}] = \sqrt{\rho(x)}\, [G(x, \xi), \psi(\xi)].$$

Вводя функцию η с помощью условий

$$\eta_{\bar{x}} = \psi, \qquad \eta_0 = h\bar{\psi}_0 = \bar{\nu}_1,$$

получим

$$[K, \bar{\psi}] = \sqrt{\rho(x)}\, \{ -[G_\xi(x, \xi), \eta(\xi)) + G(x, 1)\psi_N h - G(x, 1)\eta_{N-1} h\}.$$

Отсюда в силу ограниченности функции Грина и ее первых разностных производных (см. § 1, п. 6) следует

$$\|[K, \bar{\psi}]\|_0 \leqslant M \|\psi\|_4.$$

Таким образом,

$$\|f\|_0 \leqslant M(n) \|\psi\|_4$$

и, следовательно,

$$\|\bar{z}\|_0 \leqslant \frac{M(n)}{\sqrt{c_3}} (1 + \lambda_n^h \|R\|_2) \|\psi\|_4 \leqslant M(n) \|\psi\|_4. \tag{61}$$

Нас интересует разность

$$z = y - u,$$

которая выражается через $\bar{z}$:

$$z = \frac{\bar{z}}{C} + \frac{1 - C}{C} u,$$

$$\|z\|_0 \leqslant \frac{1}{C} \|\bar{z}\|_0 + \frac{1 - C^2}{C(1 + C)} \|u\|_0 \leqslant M(\|\bar{z}\|_0 + |1 - C^2|) \qquad \text{при } h \leqslant h_0,$$

так как $C \to 1$ при $h \to 0$, а $\|u\|_0$ ограничена согласно (7).

Обращаясь теперь к формуле (49), находим

$$|1 - C^2| \leqslant M \|\bar{z}\|_0 + |H_N[u_n] - H[u]|$$

и, следовательно,

$$\|z\|_0 \leqslant M(n) \|\bar{z}\|_0 + M |H_N[u_n] - H[u]|.$$

Учитывая затем оценку (61) для $\|\bar{z}\|_0$, получаем неравенство (60). Теорема 2 доказана.

5. Порядок точности в классе гладких коэффициентов

В силу теоремы 2 порядок точности решения разностной задачи (II) зависит от погрешности аппроксимации разностной схемы, включая граничные условия, а также от погрешности аппроксимации нормировочного функционала H_N, т. е. от величины

$$\chi = H_N\,[u_n] - H\,[u_n].$$

Оценка ψ по норме $\|\psi\|_4$ оказывается полезной даже в классе $C^{(m)}$, так как позволяет снизить на один порядок требование дифференцируемости функции $k\,(x)$, а также ранга шаблонного функционала $A\,[\bar{k}\,(s)]$. В самом деле, как показывают априорные оценки (51) и (60), для того чтобы разностная схема имела m-й ($m=1, 2$) порядок точности, достаточно, чтобы выполнялось условие $\|\psi\|_4 = O\,(h^m)$. При этом схема может и не иметь m-го порядка аппроксимации, т. е. условие $\psi = O\,(h^m)$ не будет выполнено.

Ниже будет показано, что $\|\psi\|_4 = O\,(h^m)$ в классе $k,\ q,\ r \in C^{(m-1,1)}$, если схема имеет m-й ранг и удовлетворяет условиям (20) m-го порядка аппроксимации.

В § 1, п. 3, мы условились рассматривать только схемы стандартного типа. Напомним также, что $D\,[f]$ и $R\,[f]$ — линейные функционалы.

Теорема 3. *Если разностная схема $L_h^{(k,\,q,\,\lambda r)}$ имеет 2-й ранг и удовлетворяет необходимым условиям* (21) *второго порядка аппроксимации, то решение задачи* (II) *для $k,\ q,\ r \in C^{(1,1)}$ имеет второй порядок точности*:

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| \leqslant M\,(n)\,h^2, \qquad \|y_n - u_n\|_0 \leqslant M\,(n)\,h^2.$$

Для доказательства теоремы достаточно оценить $\|\psi\|_4$ и χ и воспользоваться теоремой 2, условия которой выполнены.

Рассмотрим погрешность аппроксимации

$$\psi = \varphi - (d - q)\,u + \lambda\,(\rho - r)\,u$$

(индекс n опускаем), где

$$\varphi = (au_{\bar{x}})_x - (ku')' = L_h^{(k)}u - L^{(k)}u.$$

Если выполнены условия теоремы, то существуют производные u'' и $(ku')''$, удовлетворяющие условию Липшица. Поэтому будем иметь

$$(ku')' = (\overline{ku'})_x + O\,(h^2),$$

где черта сверху означает, что выражение берется в точке $\bar{x} = x - 0{,}5h$.

Рассмотрим сначала

$$\sum_{x'=h}^{x'=x-h} h\varphi\,(x') = \sum_{x'=h}^{x'=x-h} (a(x')\,u_{\bar{x}}(x') - \overline{k\,(x')\,u'\,(x')})_x h + O\,(h^2) =$$

$$= a\,(x)\,u_{\bar{x}}\,(x) - k\,(\bar{x})\,u'\,(\bar{x}) - (a\,(x')\,u_{\bar{x}}\,(x') - k\,(\bar{x}')\,\bar{u}'(\bar{x}'))\big|_{x'=h} + O\,(h^2).$$

В силу условий (21) $a = \bar{k} + O\,(h^2)$. Учитывая затем, что $u_{\bar{x}} = \bar{u}' + O\,(h^2)$ (так как u'' удовлетворяет условию Липшица), получаем

$au_{\bar{x}} - \bar{k}\bar{u}' = O(h^2)$ и, следовательно,

$$\sum_{x'=h}^{x'=x-h} h\varphi(x') = O(h^2), \quad \|\varphi\|_3 = O(h^2).$$

Разностные краевые условия (23), как мы видели в § 1, п. 4, имеют второй порядок аппроксимации в классе решений уравнения (1), т. е. $\bar{\nu}_1 = O(h^2)$ и $\bar{\nu}_2 = O(h^2)$. Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|_4 = O(h^2), \qquad \text{точнее, } \|\varphi\|_4 \leqslant M \cdot h^2.$$

Учитывая затем, что в силу условий (20) $d - q = O(h^2)$, $\rho - r = O(h^2)$, будем иметь

$$\|\psi\|_4 \leqslant M(n)\, h^2.$$

Замечая, что $H_N[u]$ представляет собой квадратурную формулу для $H[u]$ второго порядка точности в случае $r \in C^{(1,1)}$ и $u \in C^{(1,1)}$, находим

$$\chi = O(h^2).$$

Тем самым теорема 3 доказана.

6. Порядок точности в классе разрывных коэффициентов

Предположим теперь, что k, q, $r \in Q^{(1,1)}[0,1]$; тогда $u' \in Q^{(1,1)}$, $(ku')' \in Q^{(1,1)}$. Обозначим $\xi_j = x_{n_j} + \theta_j h$ ($x_{n_j} = hn_j$, $0 \leqslant \theta_j \leqslant 1$, $0 < \xi_j < 1$) все точки разрыва функций $k(x)$, $q(x)$ и $r(x)$. Число таких разрывов j_0 конечно: $j = 1, 2, \ldots, j_0$.

При вычислении ψ в этом случае будем ссылаться на § 3 статьи [4]. Пусть $L_h^{(k,q,\lambda r)}$ — схема 2-го ранга, удовлетворяющая условиям (21). Представим ψ в виде суммы

$$\psi = \bar{\psi} + \bar{\bar{\psi}},$$

где

$$\bar{\bar{\psi}} = \bar{\bar{\psi}}_i = \psi_{n_j}\delta_{i,n_j} + \psi_{n_j+1}\delta_{i,n_j+1},$$
$$j = 1, 2, \ldots, j_0, \quad \delta_{i,k} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases},$$

Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3, получаем

$$\|\bar{\psi}\|_4 = O(h^2), \quad \text{точнее, } \|\bar{\psi}\|_4 \leqslant M(n)\, h^2. \tag{62}$$

Следует при этом иметь в виду, что $h\bar{\psi}_0 = \bar{\nu}_1$, $h\bar{\psi}_N = \bar{\nu}_2$.

Перейдем теперь к вычислению $\|\bar{\bar{\psi}}\|_4$. Отметим прежде всего, что для всякой схемы из указанного выше семейства выполняются условия

$$h\psi_{n_j} = O(1), \quad h\psi_{n_j+1} = O(1), \quad h(\psi_{n_j} + \psi_{n_j+1}) = O(h),$$
$$j = 1, 2, \ldots, j.$$

Для разностной схемы

$$L_h^{(k,q,\lambda r)} y = (ay_{\bar{x}})_x - d \cdot y + \lambda \cdot \rho y \tag{63}$$

с коэффициентами

$$a = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{k(x+sh)}\right]^{-1}, \quad d = \int_{-0,5}^{0,5} q(x+sh)\,ds, \quad \rho = \int_{-0,5}^{0,5} r(x+sh)\,ds \qquad (64)$$

выполняются условия [4]:

$$h\psi_{n_j} = O(h), \quad h\psi_{n_j+1} = O(h), \quad h(\psi_{n_j} + \psi_{n_j+1}) = O(h^2), \quad j = 1, 2, \ldots, j_0.$$

Нетрудно заметить, что

$$\|\overline{\overline{\psi}}\|_3 \leqslant \sum_{j=1}^{j_0} (h^2 |\psi_{n_j}| + h |\psi_{n_j} + \psi_{n_j+1}|),$$

$$\|\overline{\overline{\psi}}\|_4 \leqslant \sum_{j=1}^{j_0} (h^2 |\psi_{n_j}| + 2h |\psi_{n_j} + \psi_{n_j+1}|).$$

Лемма 6. *Если*

$$\rho = \rho_л = R_л [r(x+sh)] = \int_{-0,5}^{0,5} r(x+sh)\,ds,$$

то для $r(x) \in Q^{(0,1)}$, $u \in C^{(1)}$, $u' \in Q^{(1,1)}$ *имеет место оценка*

$$\chi = H_N[u] - H[u] = O(h^2).$$

Для упрощения записи, не нарушая общности, можно считать, что имеется только одна точка $\xi = x_n + \theta \cdot h$ разрыва функции $r(x)$. Представим χ в виде суммы:

$$\chi = \sum_{i=0}^{N} \Delta_i \cdot h,$$

где

$$\Delta_i = \int_{-0,5}^{0,5} r(x_i + sh)\,[u^2(x_i) - u^2(x_i + sh)]\,ds, \qquad 0 < i < N,$$

$$\Delta_0 = 0{,}5hr(0)\,u^2(0) - \int_0^{0,5h} r(x)\,u^2(x)\,dx,$$

$$\Delta_N = 0{,}5hr(1)\,u^2(1) - \int_{1-0,5h}^{1} r(x)\,u^2(x)\,dx.$$

Сразу видно, что $\Delta_0 = O(h^2)$, $\Delta_N = O(h^2)$. Если $i \neq n$, $i \neq n+1$, то

$$\Delta_i = -\int_{-0,5}^{0,5} (r(x_i) + shr(x_i) + h\rho(h))\,((u^2)'_i\,sh + O(h^2))\,ds = O(h^2).$$

Предположим теперь, что $0 \leqslant \theta \leqslant 0{,}5$. Тогда

$$\Delta_n = \int_{-0,5}^{0} (r_л + O(h)) \cdot O(h)\,ds + \int_{0}^{0,5} (r_п + O(h)) \cdot O(h)\,ds = O(h),$$

$$r_л = r(\xi - 0), \quad r_п = r(\xi + 0), \quad \Delta_{n+1} = O(h^2).$$

Если же $0{,}5 \leqslant \theta \leqslant 1$, то

$$\Delta_n = O(h^2), \quad \Delta_{n+1} = O(h).$$

В обоих случаях $\Delta_n + \Delta_{n+1} = O(h)$. Отсюда следует, что

$$\chi = h(\Delta_n + \Delta_{n+1}) + O(h^2) = O(h^2).$$

Следствие. Если $R[\bar{r}(s)]$ — произвольный функционал, то

$$\chi = [\rho - \rho_л, u^2] + O(h^2) \text{ для } r \in Q^{(0,1)}.$$

Замечание. Пользуясь представлением линейных функционалов в классе разрывных коэффициентов (см. § 1, п. 11 работы [4]), можно показать, что существует только один линейный канонический нормированный функционал, для которого $\chi = O(h^2)$ в классе $Q^{(m)}$ при любом $m \geqslant 1$.

Таким образом, нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. *Для любой разностной схемы второго ранга, удовлетворяющей условиям* (21), *в классе* $Q^{(1,1)}$ $(k, q, r \in Q^{(1,1)})$ *имеют место оценки*

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| \leqslant M(n)\, h, \quad \|y_n - u_n\|_0 \leqslant M(n) \cdot h,$$

где λ_n, $u_n(x)$ — *n-е собственное значение и n-я нормированная собственная функция задачи* (I), *а* λ_n^h, y_n — *n-е собственное значение и n-я собственная функция разностной задачи Штурма — Лиувилля* (II).

Теорема 5. *Разностная схема* (63)—(64) *обеспечивает в классе коэффициентов* k, q, $r \in Q^{(1,1)}$ *второй порядок точности:*

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| \leqslant M(n)\, h^2, \quad \|y_n - u_n\|_0 \leqslant M(n)\, h^2.$$

В дальнейшем нами будут рассмотрены однородные разностные схемы, дающие любой порядок точности в классе кусочно-непрерывных коэффициентов уравнения (1).

Отдельно также будет рассмотрен вопрос о точности на неравномерных сетках.

Поступила в редакцию
14. 05. 1961

Цитированная литература

1. R. Courant. Über Anwendung der Variationrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen. Acta Math., 1926, 49, 1—68.
2. L. Collatz. Konvergenzbeweis und Fehlerabschätzung für das Differenzverfahren bei Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. und 4. Ordnung. Dtsch. Math., 1937, **2**, № 2, 189—215.
3. H. Bückner. Über Konvergenzsätze, die sich bei der Anwendung eines Differenzverfahrens auf ein Sturm — Liouvillesches Eigenwertproblemen ergeben. Math. Z., 1948, **51**, № 4, 423—465.
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 5—63.
5. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. Т. I. М.—Л., Гостехиздат, 1951.