О СХОДИМОСТИ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. А. САМАРСКИЙ, И. В. ФРЯЗИНОВ

(Москва)

Разностным методам решения уравнений параболического типа посвящена обширная литература. Значительная часть работ относится к уравнениям с постоянными коэффициентами. В ряде статей (см., (например, [1] — [6]) изучаются устойчивость и сходимость схем с непрерывными и достаточно гладкими коэффициентами. Так, например, в [4] доказаны сходимость и устойчивость в среднем (см. § 1, п. 2), в [1] — [3], [6] — равномерная устойчивость и сходимость.

Переход к случаю разрывных коэффициентов приводит к существенным трудностям, так как вблизи разрыва разностная схема, вообще говоря, не аппроксимирует дифференциальный оператор [7]. Преодоление этих трудностей для уравнения теплопроводности оказывается возможным лишь с помощью специальных априорных оценок, полученных в [8].

В работах [7], [9], [10] введено понятие однородных разностных схем, имеющих один и тот же вычислительный алгоритм во всех точках разностной сетки для любых коэффициентов дифференциального уравнения из некоторого класса функций. В данной статье мы рассматриваем однородные схемы сквозного счета для решения линейных уравнений параболического типа с разрывными коэффициентами без явного выделения линий разрыва, точнее, без каких-либо модификаций схемы в окрестности линий разрыва коэффициентов. Поэтому основное внимание уделяется вопросу о сходимости схем сквозного счета в классе разрывных коэффициентов.

Этот вопрос изучался для квазилинейного уравнения в работе [11], где дано доказательство сходимости схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{(1)}$ (см. § 1, п. 3.) для случая подвижных («косых») разрывов коэффициента теплопроводности в предположении, что $h^2/\tau \to 0$ при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ (см. также [12]). В данной работе это предположение снимается для линейного уравнения теплопроводности.

Дадим краткую характеристику содержания работы.

В § 1 вводится исходное семейство однородных разностных схем $\rho_{h\tau}^{(\alpha)}$ и ставится разностная смешанная задача.

В § 2 с помощью априорных оценок [8] и принципа максимума изучается устойчивость схем по начальным условиям и по правой части в различных нормах.

Особый интерес представляет случай симметричной шеститочечной схемы

$$\begin{pmatrix} * & * & * & | & 0.5 \\ * & * & * & | & 0.5 \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 0.5),$$

для которой доказана устойчивость в среднем по начальным данным

$$\parallel z \parallel_2 \leqslant M \parallel z^0 \parallel_2$$

 $(c_{M}, (10), \S 2, \pi, 2)$, а также устойчивость по правой части Ψ :

$$\parallel z \parallel_2 \leqslant M \parallel \widetilde{\Psi} \parallel_2$$
.

Эти оценки справедливы для случая, когда линиями разрыва коэффициентов являются прямые $x=\mathrm{const}$ («неподвижные разрывы»), причем коэффициент теплопроводности k (x,t) и теплоемкость c (x,t) удовлетворяют по t условию Липшица.

Для случая косого разрыва используется априорная оценка [8] по норме $(z^{2^n}, 1)^{1/2^n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

В § 3 доказана сходимость схем рассматриваемого семейства в классе разрывных коэффициентов и даны оценки скорости сходимости (порядка точности) по h и τ . Показано, что схема $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ с шаблонными функционалами

$$A[\psi(s)] = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{\psi(s)}\right], \quad D[\psi(s)] = F[\psi(s)] = R[\psi(s)] = \int_{-0.5}^{0.5} \psi(s) \, ds \quad (\Lambda)$$

обладает лучшей точностью, чем другие схемы из рассматриваемого семейства [10].

§ 1. Однородные разностные схемы

1. Исходная задача

В прямоугольнике $\bar{\mathcal{I}}=(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T)$ будем искать функцию $u\left(x,\,t\right)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\mathcal{P}u = L^{(k,q,f)}u - c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$
 в области $\overline{\mathcal{I}}$ (1)

с дополнительными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), u(0, t) = u_1(t), u(1, t) = u_2(t),$$
 (2)

где

$$L^{(k,q,f)} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k (x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q (x, t) u + f (x, t).$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) кусочно-непрерывны и удовлетворяют условиям

$$0 < k_* \leqslant k \ (x, t) \leqslant k^*, \ 0 < c_* \leqslant c \ (x, t) \leqslant c^*, \ 0 \leqslant q \ (x, t) \leqslant q^*$$
 в $\overline{\mathcal{A}}$. (3) где k_*, k^*, c_*, c^*, q^* — постоянные.

Если коэффициент k(x, t) терпит разрыв на конечном числе кривых Γ_{ν} , $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_{0}$, то на каждой из этих кривых решение уравнения (1) удовлетворяет условиям сопряжения

$$[u]_{\Gamma_{\mathbf{v}}} = 0, \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\Gamma_{\mathbf{v}}} = 0, \quad \mathbf{v} = 1, 2, \xi \dots, v_0, \tag{4}$$

где $[u]|_{\Gamma_{\mathbf{v}}} = u_{\mathbf{n}} - u_{\mathbf{n}}$ и т. д. — разность правого и левого предельных

значений на кривой Γ_{ν} . Задачу, определяемую условиями (1)—(4), мы будем в дальнейшем называть задачей (I).

Кривые $\Gamma_{\mathbf{v}}$, заданные на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ уравнениями $x=\eta_{\mathbf{v}}$ (t), перенумеруем так, что $\eta_{\mathbf{v}_1}$ (t) $<\eta_{\mathbf{v}_2}$ (t), $v_1< v_2$; при этом предполагаем, что кривые $\Gamma_{\mathbf{v}}$ ($\mathbf{v}=0,1,2,\ldots,v_0,v_0+1;\;\eta_0$ (t) $=0,\;\eta_{\mathbf{v}_0+1}=1$) дифференцируемы при $0\leqslant t\leqslant T$ и попарно не пересекаются в $\overline{\mathcal{A}}$. Обозначим

$$\Delta_{\nu} = (\eta_{\nu}(t) < x < \eta_{\nu+1}(t), \ 0 < t \leqslant T), \quad \mathcal{A} = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \Delta_{\nu}.$$

В работе [13] доказана теорема существования и единственности решения задачи (1)—(4), обладающего в \mathcal{I} производными $\partial u/\partial t$, $\partial^2 u/\partial x^2$, которые в каждой из областей Δ_v удовлетворяют условиям Гёльдера по x и t.

В дальнейшем мы будем предполагать существование решения u(x, t) задачи (I), не останавливаясь на вопросе об условиях, обеспечивающих нужную по ходу изложения степень дифференцируемости в \mathcal{I} функции u(x, t).

Для решения задачи (I) методом конечных разностей введем в $\overline{\mathcal{A}}$ разностную сетку $\overline{\Omega}$, т. е. совокупность точек $(x_i,\,t_j)$ с координатами $x_i=ih,\,i=0,\,1,\,2,\,\ldots,N,\,\,h=1/N$ и $t_j=j\tau,\,j=0,\,1,\,2,\,\ldots,L,\,\tau=T/L.$ Обозначим Ω множество внутренних точек $(x_i,\,t_j)$ сетки $\overline{\Omega}$, для которых $0 < i < N,\,0 < j \leqslant L.$ Функцию y_i^j , определенную на $\overline{\Omega}$, назовем сеточной функцией.

Для удобства изложения будем, как правило, пользоваться безындексной системой обозначений и вместо y_i^j писать просто y или y(x,t), полагая

$$\begin{split} y &= y_i^j, \ \stackrel{(+1)}{y} = y_{i+1}^j, \ \stackrel{(-1)}{y} = y_{i-1}^j, \ \stackrel{\backprime}{y} = y_i^{j-1}, \ \stackrel{\backprime}{y} = y_i^{j-2}, \\ y_{\overline{x}} &= \frac{y - \stackrel{(-1)}{y}}{h}, \ y_x = \frac{\stackrel{(+1)}{y} - y}{h}, \ y_{\widetilde{x}} = 0, \\ 5 \left(y_{\overline{x}} + y_x \right), \ y_{\overline{t}} &= \frac{y - \stackrel{\backprime}{y}}{\tau}, \end{split}$$

так что

$$(ay_{\bar{x}})_{x} = \frac{a^{(+1)}y_{x} - ay_{\bar{x}}}{h} = \frac{a^{(+1)}(y_{-y}^{(+1)}) - a(y_{-y}^{(-1)})}{h^{2}} = \frac{1}{h^{2}} [a_{i+1}^{j}(y_{i+1}^{j} - y_{i}^{j}) - a_{i}^{j}(y_{i}^{j} - y_{i-1}^{j})].$$

Мы будем пользоваться следующими суммами и нормами:

$$(y,z) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i z_i h; \quad [y,z] = \sum_{i=0}^{N-1} y_i z_i h; \quad [y,z] = \sum_{i=1}^{N} y_i z_i h; \quad [y,z] = \sum_{i=0}^{N} y_i z_i h,$$

$$||y||_0 = \max_{0 \le i \le N} (y_i), ||y||_\sigma = (|y|^\sigma, 1)^{1/\sigma}$$

$$(\sigma = 1, 2),$$

$$\|y\|_{3} = \|\widetilde{y}\|_{2}, \|y\|_{4} = \|\widetilde{y}\|_{1}, \quad \widetilde{y}_{i} = \sum_{k=1}^{i} hy_{k}, \|\widetilde{y}\|_{\sigma} = \max_{0 \leqslant i \leqslant T} \|y\|_{\sigma}, \quad \sigma = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Будем пользоваться также обозначениями:

$$\|y_{\bar{x}}\|_{0} = \max_{0 < i \le N} |y_{\bar{x}}|, \quad \|y_{\bar{x}}\|_{\sigma} = (|y_{\bar{x}}|^{\sigma}, 1]^{1/\sigma}$$
 (5 = 1, 2).

Нетрудно заметить, что

$$||y||_1 \leq ||y||_2 \leq ||y||_1 \leq ||y||_2 \leq ||y||_2$$

При помощи этих обозначений первую разностную формулу Грина можно записать в виде

$$((ay_{\overline{x}})_x, z) = -(a, y_{\overline{x}}z_{\overline{x}}] + (a \cdot y_{\overline{x}} \cdot z)_N - (a \cdot y_x \cdot z)_0.$$

()бозначим ω_{\pm}^t совокупность точек (x, t') разностной сетки, для которых $t' = \tau, 2\tau, \ldots, t; \; \omega_h^x$ — совокупность точек (x', t) сетки, для которых $x' = h, 2h, \ldots, x;$ так, например,

$$\sum_{\omega_{-}^{t}} \|\psi\| \tau = \sum_{j'=1}^{j} \|\psi^{j'}\| \tau \qquad (t = t_{j})$$

и т. д.

3. Разностные схемы

В статье [7] изучены однородные разностные схемы $L_h^{(k, q, f)}$ для стационарного уравнения теплопроводности $L^{(k, q, f)} = 0$. Мы используем эти схемы.

В качестве исходного семейства разностных схем для задачи (I) мы выберем семейство шеститочечных схем:

$$\mathscr{P}_{h\tau}^{(lpha)}y=lpha L_{h}^{(k,\,q,\,f)}y+(1-lpha)L_{h}^{(k,\,\stackrel{\backprime}{q},\,\stackrel{\backprime}{f})}\stackrel{\backprime}{y}-
ho^{(lpha)}y_{\bar{l}}\,\left(egin{smallmatrix} *** & lpha \ +** & 1-lpha \end{matrix}
ight),$$

где $0 \leqslant lpha \leqslant 1$ — числовой параметр, $ho^{(lpha)} = lpha
ho + (1-lpha)$ $\check{
ho}$

$$L_h^{(k, q, f)} y = (ay_{\bar{x}})_x - dy + \Phi$$

есть консервативная трехточечная однородная схема, коэффициенты которой определяются шаблонными функционалами

$$A^{h} [\psi (s)], -1 \le s \le 0,$$

 $D^{h} [\psi (s)], -0.5 \le s \le 0.5,$
 $F^{h} [\psi (s)], -0.5 \le s \le 0.5,$

по формулам

$$a = A^h [k (x + sh, t)], d = D^h [q (x + sh, t)], \Phi = F^h [f (x + sh, t)].$$

Коэффициент ρ вычисляется с помощью шаблонного функционала R^h [ψ (s)], $-0.5 \leqslant s \leqslant 0.5$, по формуле

$$\rho = R^h [c (x + sh, t)].$$

Зависимость a, ρ , d и Φ от шагов сетки h и τ мы не указываем.

Семейство разностных схем $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ определено, если задан класс шаблонных функционалов A^h, D^h, F^h, R^h .

В общем случае, как показывает пример точной схемы, построенный для стационарного уравнения теплопроводности в статье [9], коэффициенты схемы могут зависеть от всех коэффициентов дифференциального уравнения. Для облегчения изложения мы рассматриваем здесь схемы стандартного типа, каждый из коэффициентов которых зависит только от одного коэффициента дифференциального уравнения. Однако, как будет видно из последующего изложения, в большинстве случаев структура шаблонных функционалов явно не фигурирует.

Воспользуемся введенным в [7] понятием ранга функционала для характеристики класса шаблонных функционалов. Некоторый функционал A^h [ψ], зависящий от параметра h, имеет ранг r при следующих условиях.

 1° . $A^{h}[\psi]$ имее инфференциал порядка r по h:

$$A^{h}(\psi) = A^{(0)}[\psi] + hA^{(1)}[\psi] + \cdots + h^{r}A^{(r)}[\psi] + h^{r}\rho(h),$$

а калдый из функционалов $A^{(\sigma)}$ [ψ], $\sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ r$, имеет дифференциал порядка $r-\sigma$ по аргументу ψ :

$$A^{(\sigma)} \left[\psi + \delta \cdot \varphi \right] = A^{(\sigma)} \left[\psi \right] + \delta \cdot A_1^{(\sigma)} \left[\psi, \varphi \right] + \cdots + \delta^{r-\sigma} A_{r-\sigma}^{(\sigma)} \left[\psi, \varphi \right] + \delta^{r-\delta} \rho (\delta).$$

(Здесь и в дальнейшем ρ (ϵ) обозначает выражение, равномерно стремящееся к нулю при $\epsilon \to 0$.)

 2° . Функционал $A^h[\psi]$ и, следовательно, $A^{(\sigma)}[\psi]$ для всех $\sigma=1,2,\ldots,r$ являются однородными функционалами первой степени

$$A^h[c\psi] = cA^h[\psi], \quad A^{(\sigma)}[c\psi] = cA^{(\sigma)}[\psi],$$

где *с* — положительная постоянная.

 $3^{\circ}.$ Функционалы $\boldsymbol{A}^{h}[\psi]$ и $\boldsymbol{A}^{(\sigma)}[\psi]$ являются неубывающими:

$$A^h[\psi_2] \geqslant A^h[\psi_1], \text{ если } \psi_2 \geqslant \psi_1,$$

причем $A^h[\psi]$ — нормированный функционал:

$$A^{h}[1] = 1$$
 $(A^{(0)}[1] = 1, A^{(\sigma)}[1] = 0$ if $\sigma \geqslant 1$.

Если $A^h[\psi]$ — линейный функционал, то все $A^{(\sigma)}[\psi]$ также линейны. Поэтому условие 2° и требование дифференцируемости по ψ выполняются автоматически.

Мы будем предполагать:

1) шаблонные функционалы $R^h[\psi]$, $D^h[\psi]$, $F^h[\psi]$ линейны, имеют ранг 2 и второй порядок аппроксимации, т. е.

$$R^{h}[c(x + sh, t)] - c(x, t) = O(h^{2})$$

и т. д.;

2) шаблонный функционал $A^h[\psi]$ имеет 3-й ранг и второй порядок аппроксимации:

$$A^{h}[k(x+sh, t)] - k(\bar{x}, t) = O(h^{2}),$$
 $x = x - 0.5h.$

Из условий 3° и (3) следует, что

$$0 < k_* \leqslant a \leqslant k^*, \quad 0 < c_* \leqslant \rho \leqslant c^*, \quad 0 \leqslant d \leqslant q^*.$$

Из условия 2) следует прежде всего возможность разложения

$$a = A^{h} [k (x + sh, t)] = k (\bar{x}, t) + hk' (\bar{x}, t) (0.5 + A_{1}^{(0)}[s]) + + h^{2} \{k'' (\bar{x}, t) (1/s + 0.5 A_{1}^{(0)}[s] + 0.5 A_{1}^{(0)}[s^{2}]) + k' (\bar{x}, t) A_{1}^{(1)}[s] + + \frac{(k' (\bar{x}, t))^{2}}{k (\bar{x}, t)} A_{2}^{(0)}[s] \} + O(h^{3}),$$

где штрих означает дифференцирование по x, $\bar{x}=x-0.5h$,

$$A_m^{(\sigma)} [1, \varphi(s)] = A_m^{(\sigma)} [\varphi(s)].$$

Из 1) следует, что
$$\rho=R^h[c\ (x+sh,\ t)]=c\ (x,\ t)\ +hc'\ (x,\ t)\ R^{(0)}[s]+O(h^2);$$
 и т. д.

Требования второго порядка аппроксимации

$$a = k (x = 0.5h,t) + O(h^2), \quad \rho = c (x,t) + O(h^2), \quad d = q (x,t) + O(h^2),$$

 $\Phi = f (x,t) + O(h^2)$

будут выполнены, если

$$A_1^{(0)}[s] = -0.5, \quad R^{(0)}[s] = D^{(0)}[s] = F^{(0)}[s] = 0.$$

Условиям 1) и 2) удовлетворяют, например, схемы, у которых

$$a=k_{i-1/2}, \ a=0.5\ (k_i+k_{i-1}), \ a=rac{2k_ik_{i-1}}{k_{i-1}}, \ d=q_i, \ d=0.5\ (q_{i+1/2}+q_{i-1/2}), \ \Phi=f_i, \ \Phi=0.5\ (f_{i-1/2}+f_{i+1/2}). \
ho=c_i, \
ho=0.5\ (c_{i+1/2}+c_{i-1/2}), \
ho=k_{i+1/2}=\xi\ (x_i+0.5h;\ t).$$

Нз условий 1) и 2), в частности, следует, что схема $L_n^{(h,q,f)}$ и схема $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ имеют второй порядок аппроксимации по h. Вопрос о порядке аппроксимации схемы по т рассмотрим ниже. Условия 1) и 2) и параметр α определяют исходный класс схем.

Если две схемы имсют одинаковый порядок аппроксимации (порядок точности), то говорят [7], что эти схемы эквивалентны по порядку аппроксимации (точности).

Если шаблонные функционалы схемы не зависят от h, то такая схема называется канонической.

Нетрудно показать, что любая схема $\mathcal{F}_{h\tau}^{(\alpha)}$, удовлетворяющая 1) и 2), эквивалентна своей канонической части, т. е. схеме с шаблонными функционалами $A^{(0)}$, $D^{(0)}$, $F^{(0)}$, $R^{(0)}$. Поэтому можно ограничиться изучением только канонических схем, к числу которых, в частности, принадлежит приведенная во введении схема (Λ).

4. Разностная краевая задача

Задаче (I) в $\overline{\mathcal{A}}$ поставим в соответствие следующую разностную задачу (II):

Условия сопряжения (4) при этом не ставятся.

Основной характеристикой качества разностной схемы является величина разности z=y-u, где y — решение задачи (II), а u — решение соответствующей задачи (I).

Сеточная функция z, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\overline{\mathcal{P}}_{h au}^{(lpha)}z=-\Psi$$
 на Ω н однородным условиям $z=0$ при $t=0,\ x=0,\ x=1,$

где

$$\overline{\mathcal{P}}_{h\tau}^{(\alpha)}z = \alpha L_h^{(k, q)} z + (1 - \alpha) L_h^{(k, \check{q})} \overset{\circ}{z} - \rho^{(\alpha)} z_{\bar{t}},$$

 $\Psi=\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}u-\alpha\mathcal{F}u-(1-\alpha)\,\check{\mathcal{P}}\check{u}$ — погрешность аппроксимации схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ — в классе решений уравнения (1).

Представим Ч в виде суммы:

$$\Psi = \alpha \varphi + (1 - \alpha) \dot{\varphi} + \alpha \chi + (1 - \alpha) \dot{\chi} + r,$$

где

$$\begin{split} \phi &= L_h^{(k,\,q,\,f)} u - L^{(k,\,q,\,f)} u, \quad \chi = (c - \rho) \frac{\partial u}{\partial t} \,, \\ r &= \alpha \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} - u_{\bar{t}} \right) + (1 - \alpha) \, \check{\rho} \left(\frac{\partial \check{u}}{\partial t} - u_{\bar{t}} \right) \,. \end{split}$$

Отсюда видно, что порядок аппроксимации по h схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ определяется порядком аппроксимации схемы $L_h^{(k,\ q,\ f)}$ и функционала $R^h[\psi\ (s)]$.

Требования 1) и 2) обеспечивают второй порядок аппроксимации по h для схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$. Нетрудно далее заметить, что $r=O\left(\tau^{m_{\alpha}}\right)$, где $m_{\alpha}=1$ при $\alpha \neq 1/2$, $m_{1/2}=2$ и, следовательно,

$$\Psi = O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha}).$$

Таким образом, схема $\mathscr{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ имеет второй порядок аппроксимации по h и порядок m_{α} по τ .

При этом предполагается дифференцируемость нужное число раз как коэффициентов k, q, c и f, так и функции u.

В случае разрывных коэффициентов оказывается, что схема $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ не аппроксимирует оператор $\mathcal{P}u$ в окрестности линии разрыва (подробнее об этом см. в § 3).

Вопрос о сходимости при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ решения разностной задачи (II) (схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$) к решению задачи (I) мы свели к изучению асимптотического поведения при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ решения задачи (III) в зависимости от величины погрешности аппроксимации Ψ . Для доказательства сходимости нам понадобятся априорные оценки решения задачи (III).

Попутно будет исследован вопрос об устойчивости нашей схемы по начальным данным и правой части.

Условимся в дальнейшем постоянные, не зависящие от h и τ , обозначать через M, не указывая, как правило, их структуру.

§ 2. Об устойчивости разностных схем

Рассмотрим вопросы устойчивости разностных схем.

В случае постоянных (или зависящих от x) коэффициентов для схем $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ в [14], [15] показано, что требование устойчивости в среднем схемы при $^{1/2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ не накладывает ограничений на отношение шагов $\gamma = \tau/h^2$ или $\delta = \tau/h$. В случае $0 \leqslant \alpha < ^{1/2}$ требование устойчивости схемы приводит к условию

$$\frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{c_*}{2\left(1-2\alpha\right)k^*} \ .$$

Естественно ожидать аналогичных результатов и в случае коэффициентов, зависящих от времени.

Устойчивость в среднем для гладких коэффициентов, зависящих от времени, рассматривалась ранее для несколько иных схем при $\alpha==1/2$ в работе [4].

Рассмотрение вопросов устойчивости будем проводить методом интегральных оценок в предположении, что

$$|a_{\overline{t}}|, |\rho_{\overline{t}}|$$
 (S)

ограничены. Это требование не исключает возможности неподвижных разрывов. Укажем также на равномерную устойчивость.

1. Принцип максимума

Известно [16], что для четырехточечных схем

$$\begin{pmatrix} * & * & * & 1 \\ * & & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H} \qquad \begin{pmatrix} & * & & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}$$

имеет место принцип максимума:

$$\|z\|_{0} \leqslant M \left\{ \|z^{0}\|_{0} + \sum_{\omega_{1}^{t}} \|\Psi\|_{0} \tau \right\},$$
 (5)

где

$$\Psi = -\overline{\mathcal{P}}_{hz}^{(\alpha)}z, \quad z_0 = z_N = 0, \quad z|_{t=0} = z^0. \tag{6}$$

Для схемы

$$\begin{pmatrix} * & | 0 \\ * * * | 1 \end{pmatrix}$$

предыдущее неравенство имеет место при $\gamma = \tau/h^2 \leqslant c_*/2k^*$. Пусть $d \geqslant 0$. Покажем, что оценка (5) имеет место и для схемы

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \alpha \\ * & * & * & 1 - - \alpha \end{pmatrix}$$

при условии $\gamma \leqslant c_*/2$ (1 — α) k^* (см. также [5]). Рассмотрим шеститочечную схему $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ и запишем ее в виде

$$\alpha\tau \left[(az_{\overline{x}})_x - dz \right] - \rho^{(\alpha)}z = -\left\{ \check{z} \left[\rho^{(\alpha)} - \gamma \left(1 - \alpha \right) \begin{pmatrix} (\check{+}1) \\ a \end{pmatrix} + \check{a} \right\} - \tau \left(1 - \alpha \right) \check{d} \right] + \gamma \left(1 - \alpha \right) \begin{pmatrix} (\check{+}1) (\check{+}1) \\ a \cdot z + \check{a} & z \end{pmatrix} \right\} - \Psi$$

при $z_0 = z_N = 0$, $z|_{t=0} = z^0$.

Предварительно рассмотрим задачу для \overline{z} , соответствующую начальной функции $|z^0|$, правой части $|\Psi|$ и нулевым граничным условиям.

Тогда при $\gamma \leqslant c_*/2$ (1 — a) k^* из отрицательности правой части (7) при t=0 следует, как легко видеть, что $z_i^1 > 0$. Продолжая рассуждения, получим $\bar{z}_i^j \geqslant 0$.

Из (7) для z имеем

$$\|\bar{z}\|_0 \leqslant (1 + M\tau) (\|\bar{z}\|_0 + \|\Psi\|_0)$$

11

$$\|ar{z}\|_0 \leqslant M ig(\|oldsymbol{z}^0\|_0 + \sum_{\omega_{ au}^l} \|oldsymbol{\Psi}\|_0 \ au ig)$$
 .

Рассматривая теперь задачу для $z=\overline{z}-z$ при том же ограничения на ү, аналогично предыдущему получим

$$\| \bar{\bar{z}} \|_0 \leqslant M \left(\| \ z^0 \|_0 \ + \sum_{\omega_z^t} \| \Psi \|_0 \tau \right).$$

Замечая, что $z=\bar{z}-\bar{z}$, и учитывая оценки для \bar{z} и \bar{z} , получим искомую оценку (5).

Из принципа максимума для схемы

$$\begin{pmatrix} * & * & * & | & \alpha \\ * & * & * & | & 1 - - \alpha \end{pmatrix}$$

следует равномерная устойчивость по начальным данным и правой части. Для неявной схемы

$$\begin{pmatrix} * & * & * & | & 1 \\ & * & | & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha = 1)$$

устойчивость по норме $\|\cdot\|_0$ имеет место при любых h и τ . Требование $d \geqslant 0$ не является ограничением, так как с помощью преобразования $z_i^j = s_j v_i^j$ и соответствующего выбора s_j всегда можно добиться выполнения условия $d \geqslant 0$.

2. Устойчивость в среднем по начальным данным

Остановимся на вопросе устойчивости разностных схем в норме $\| \|_2$ по начальным данным. С этой целью получим интегральное тождество

$$\frac{1+\beta}{2}(\rho^{(\alpha)}, z^{2})_{\overline{t}} + \frac{\tau(1-\beta)}{2}(\rho^{(\alpha)}, z_{\overline{t}}^{2}) + 0.5I + ((0.5-\alpha)(1+\beta) + 0.5\beta)\check{I} + \\ + (\alpha - 0.5)\tau^{2}(a, z_{\overline{x}}^{2}] + ((2\alpha - 1 + \alpha\beta)a + (1-\alpha)\check{a}, z_{\overline{x}}^{2}\check{z}_{\overline{x}}^{2}] - \\ - \tau(\alpha - 0.5)(a_{\overline{t}}, \check{z}_{\overline{x}}^{2}] = (z+\beta\check{z}, \Psi) + \frac{1+\beta}{2}(\rho_{\overline{t}}^{(\alpha)}, \check{z}^{2}) - \\ - \alpha(d, z^{2}) - (1-\alpha)\beta(\check{d}, \check{z}^{2}) - (\alpha\beta d + (1-\alpha)\check{d}, z\check{z}), \tag{8}$$

$$\text{THE } I = (a, z_{\overline{x}}^{2}], \quad \rho^{(\alpha)}|_{t=0} = \rho|_{t=0}, \quad z_{\overline{x}}^{2} = (z_{\overline{x}})^{2}.$$

Умножим уравнение (6) на $z + \beta z$; суммируя по ω_x^1 и пользуясь по аналогии с [8] первой формулой Грина, в случае первой краевой задачи

получим

$$\frac{1+\beta}{2}(\rho^{(\alpha)}, z^{2})_{\bar{t}} + \frac{1+\beta}{2}(\rho^{(\alpha)}_{\bar{t}}, \check{z}^{2}) + \frac{\tau(1-\beta)}{2}(\rho^{(\alpha)}, z^{2}_{\bar{t}}) + \alpha I + \\ + (1-\alpha)\beta\check{I} + (\alpha\beta a + (1-\alpha)\check{a}, z_{\bar{x}}\check{z}_{\bar{x}}] + \alpha(d, z^{2}) + \\ + (1-\alpha)\beta(\check{d}, \check{z}^{2}) + (\beta\alpha d + (1-\alpha)\check{d}, z\check{z}) = (z+\beta\check{z}, \Psi).$$

Отсюда, учитывая преобразования

$$\alpha I + (1 - \alpha) \beta \check{I} = 0.5I + (\alpha - 0.5) (I + \check{I}) + ((0.5 - \alpha)(1 + \beta) + 0.5\beta) \check{I},$$

 $I + \check{I} - 2 (a, z_{\bar{x}} \check{z}_{\bar{x}}) = \tau^2 (a, z_{\bar{x}\bar{t}}) - \tau (a_{\bar{t}}, \check{z}_{\bar{x}}),$

получаем интегральное тождество (8).

Рассмотрим вопрос об устойчивости по начальным данным для случая $a = \frac{1}{2}$.

Полагая в (8) $\beta = 1$, $\alpha = 1/2$, $\Psi = 0$, получим

$$(\rho^{(\alpha)}, z^2)_{\bar{t}} + 0.5 (I + \check{I}) + 0.5 (a + \check{a}, z_{\bar{x}} \dot{z}_{\bar{x}}] =$$

$$= -\frac{1}{2} (d, z^2) - \frac{1}{2} (\check{d}, \check{z}^2) - \frac{1}{2} (d + \check{d}, \check{z}z) + (\rho_{\bar{t}}^{(\alpha)}, \check{z}^2). \tag{9}$$

Используя оценку из работы [8]:

$$I \leqslant \!\! M \left(
ho^{(lpha)}, \, z_{\overline{x}}^2
ight] \!\!\mid_{t=0}, \,\, \text{ for }
ho^{(lpha)} \mid_{t=0} =
ho \!\!\mid_{t=0},$$

и пользуясь неравенствами

$$\frac{a+\overset{\circ}{a}}{2V_{a\overset{\circ}{a}}}\leqslant 1+M\tau, \ (1,\,z^2)\leqslant MI,$$

$$-M\delta^2\left(
ho^{(a)},\ z^2
ight)|_{t=0} \leqslant -M au^2\left(I+\check{I}
ight) \leqslant 0.5\ (I+\check{I}) + 0.5\ (a+\check{a},\ z_{\bar{z}}\check{z}_{\bar{z}}],$$

из (9) получаем

$$(1 - M\tau) w \leqslant (1 + M\tau) \dot{w} + \tau M \delta^2 w^0,$$

где $w = (\rho^{(\alpha)}, z^2), \delta = \varepsilon/h$.

Отсюда следует

$$w \ll M (1 + \delta^2) w^0$$

11

$$||z||_2 \leqslant M \sqrt{1 + \delta^2} ||z^0||_2,$$
 (10)

Из предыдущего неравенства в силу [14] следует

Теорема 1. Если выполнено условие (S), то схема $\mathcal{F}_{h\tau}^{(\alpha)}$ при $\alpha = 1/2$ устойчива в среднем по начальным данным при произвольном $\delta = \tau/h \to \infty$.

Замечание. Используя интегральное тождество (8) при $\beta=0$ и $\Psi=0$, легко получить для $0\leqslant \alpha<{}^1\!/{}_2, {}^1\!/{}_2<\alpha\leqslant 1$ следующие оценки:

$$\begin{split} & \| z \|_2 \leqslant \frac{M_1(\gamma) \, e^{M/\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}} \| z^0 \|_2, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{c_* \, (1-\epsilon)}{2 \, (1-2\alpha) \, k^*} \,, \quad 0 \leqslant \alpha <^{1/2}, \\ & \| z \|_2 \leqslant M_2(\gamma) \| z^0 \|_2 \quad \text{ при } ^{1/2} < \alpha \leqslant 1 \, \text{ и любых } \gamma, \end{split}$$

где ϵ — любое число из интервала $0<\epsilon<1$ (в случае $\alpha=1$ постоянная M_2 не зависит от γ).

Отсюда следует, согласно [14], устойчивость по норме $\|\cdot\|_2$ в среднем по начальным данным при $\alpha \neq 1/2$ и произвольном $\gamma \nrightarrow \infty$ при выполнении условия (S).

Если отказаться от требования ограниченности разностных отношений (например, в случае косого разрыва) $a_{\overline{t}}$ и $d_{\overline{t}}$, то, пользуясь методом интегральных неравенств, можно получить следующую оценку:

$$\|z\|_{2} \leqslant M \sqrt{1 + (1 - \alpha)^{2} \gamma^{2}} \|z^{0}\|_{2} + M \left\{ \sum_{\omega_{\tau}^{t}} \tau \|\Psi\|_{2}^{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (0, 5 \leqslant \alpha \leqslant 1). \quad (10')$$

Оценка получена в предположении ограниченности р.

3. Априорные оценки и устойчивость по начальным данным и по правой части

В работе [8] для решения задачи

$$\overline{\mathcal{P}}_{h\tau}^{(\alpha)}z = -\Psi, \quad z_0 = z_N = 0, \quad z|_{t=0} = z^0, \qquad 0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

получены следующие априорные оценки:

$$||z_0|| \leqslant ||z||_2 + ||z_{\overline{x}}||_2 \leqslant M \left\{ ||z^0||_2 + ||z_{\overline{x}}||_2 + \left(\sum_{\omega_{\overline{x}}} ||\Psi||_2^2 \tau \right)^{1/2} \right\}, \tag{11}$$

$$(1, z^{2^m})^{1/2^m} \leqslant C_m \|\widetilde{\Psi}\|_3, \tag{12}$$

$$\left(\sum_{\omega^{t}} z^{2^{m}} \tau\right)^{1/2^{m}} \leqslant C_{m} \|\widetilde{\Psi}\|_{3}, \quad \alpha = 1, \quad z_{0} = 0,$$
(13)

где $C_m = M2^m m e^{M2^m m}$. Оценка (11) получена при условии $|a_{\overline{t}}| \leqslant M$, $|\rho_{\overline{t}}| \leqslant M$, а (12) и (13) — в предположении ограниченности лишь $|\rho_{\overline{t}}|$. Оценки (12) и (13) будут использованы для изучения сходимости в случае подвижных разрывов.

Пользуясь формулой (8) при $\beta = -1$, можно получить методом, аналогичным [8], априорную оценку при $0 \leqslant \alpha < 1/2$, $z^0 = 0$ и условии (S):

$$\|z\|_0 \leqslant \frac{Me^{M/\varepsilon}}{V\varepsilon} \left(\sum_{\omega_{\pm}^l} \Psi\|_2^2 \tau\right)^{1/2}$$
 при $\gamma \leqslant \frac{c_* (1-\varepsilon)}{2 (1-2\alpha) k^*}, \ \varepsilon \in (0,1).$ (14)

Из формул (11) и (14) следует устойчивость по правой части ($z^0=0$):

$$\parallel z \parallel_0 \leqslant M \left(\sum_{\omega_{\tau}^l} \parallel \Psi \parallel_2^2 \tau \right)^{^{1/_2}} \leqslant M \left(\sum_{\omega_{\tau}^l} \parallel \Psi \parallel_0^2 \tau \right)^{^{1/_2}},$$

а также по начальным данным ($\Psi=0$):

$$||z||_0 \leqslant ||z||_2 + ||z_{\overline{x}}||_2 \leqslant M \{||z^0||_2 + ||z_{\overline{y}}^0||_2\}.$$

§ 3. Сходимость разностных схем в классе разрывных коэффициентов

В этом параграфе мы докажем ряд теорем о сходимости (и точности) решения разностной задачи (II) к решению задачи (I) при $h \to 0$ и $\tau \to 0$. Отдельно рассматриваются два случая:

- а) неподвижные разрывы (линии разрыва k(x, t) прямые, x = const),
- б) косые или движущиеся разрывы на кривых $x = \eta_{\nu}(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$, причем $\eta_{\nu}'(t) \not\equiv 0$ по крайней мере для одного ν .

Особую роль играет схема $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)},$ определяемая шаблонными функционалами

$$R[\psi(s)] = D[\psi(s)] = F[\psi(s)] = \int_{-0.5}^{0.5} \psi(s) \, ds, \ A[\psi(s)] = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{\psi(s)}\right]^{-1},$$

так что

$$a = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{k(x+sh, t)}\right]^{-1}, \quad d = \int_{-0.5}^{0.5} q(x+sh, t) ds, \quad \rho = \int_{-0.5}^{0.5} c(x+sh, t) ds,$$

$$\Phi = \int_{-0.5}^{0.5} f(x+sh, t) ds.$$

В дальнейшем будем называть ее схемой (Л).

Формулируем используемое ниже

Условие A_{α} . Функции k', k'', c', q', f', u'', (ku')'' удовлетворяют условию Липшица по x, а функции

$$k, c, \partial^{m_{\alpha}-1} c / \partial t^{m_{\alpha}-1}, \partial^{m_{\alpha}} u / \partial t^{m_{\alpha}}$$

— условию Липшица по t ($m_{\alpha}=1$ при $\alpha \neq 1/2$, $m_{1/2}=2$) либо во всей

области $\overline{\mathcal{H}}$, либо в каждой из подобластей Δ_{ν} ($\nu=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,\nu_0$) (в нальнейшем это будет всегда указываться).

Рассмотрим сначала вопрос о сходимости в случае непрерывных коэффициентов.

1. Сходимость в классе непрерывных коэффициентов

T е о р е м а 2. Eсли условия A_{α} выполнены в области $\overline{\mathcal{U}}$, то любая τ хема $\mathscr{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ из исходного семейства схем имеет второй порядок точности по h и порядок m_{α} по τ , точнее, при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$ имеют место опенки

a)
$$\|y - u\|_0 \leqslant M (h^2 + \tau^{m_\alpha}),$$
 $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1,$
6) $\|y - u\|_0 \leqslant M (h^2 + \tau),$ $\alpha = 0,$

причем в случае $\alpha = 0$ должно выполняться требование

$$\gamma = rac{ au}{h^2} \leqslant rac{c_*}{2k^*}$$
 .

Как следует из § 1 (п. 3 и 4), для правой части задачи (III) имеет место соотношение

$$\|\Psi\|_{0} = O(h^{2}) + O(\tau^{m_{\alpha}}).$$

Пользуясь априорной оценкой работы [8] (см. § 2, п. 3) и учитывая, что $\|\Psi\|_2 \leqslant \|\Psi\|_0$, получаем оценку а). Оценка б) следует из принципа максимума (§ 2, п. 1; см. также [5]).

2. Погрешность аппроксимации в окрестности линии разрыва

Пусть функция k (x, t) и все остальные коэффициенты уравнения (1) имеют разрывы первого рода на конечном числе прямых $x_i^* = \eta_v = x_{n_v} + \theta_v h$ ($x_{n_v} = n_v h$, $0 \leqslant \theta_v \leqslant 1$, $v = 1, 2, \ldots, v_0$), параллельных оси t, причем предельные значения слева и справа функций

$$q, f, k', q', c', f', k'', u', u'', u'''$$

удовлетворяют вдоль каждой линии разрыва $x=\eta_{\nu}$ условию Липшица по t для $0\leqslant t\leqslant T$ (у с л о в и е Б).

Если, кроме того, в каждой из областей Δ_{ν} выполнено условие \mathbf{A}_{α} ,

$$\Psi = O(h^2) + O(\tau^{m_\alpha})$$

во всех точках (x, t) сетки Ω , для которых $x \neq x_{n_v}$, $x \neq x_{n_v+1}$.

Для упрощения записи будем вести изложение для одной линии $\eta = x_n + \theta h$, n = n (h), $\theta = \theta$ (h). Переход к общему случаю \mathbf{v}_0 линий разрыва не представляет труда.

В статье [7] дано разложение $\phi + \chi = \psi$ по степеням h в точках $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$. При этом оказывается, что для схемы (Λ), описанной в § 1, п. 3,

$$\varphi_n = O(1), \quad \varphi_{n+1} = O(1),$$

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = (0.5 - \theta) \{ (L^{(k,q,f)}u)_{\Pi} - (L^{(k,q,f)}u)_{\Pi} \} + O(h).$$
(15)

5 жвм и мф. № 5

Для любой схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ из рассматриваемого класса схем выполнены условия

$$h\varphi_n = O(1), \quad h\varphi_{n+1} = O(1), \quad \varphi_n + \varphi_{n+1} = O(1).$$

Вычислим χ_n и χ_{n+1} , учитывая при этом, что

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\Big|_{\Gamma_{y}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Pi} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Lambda} = 0.$$

В случае схемы (Л) имеем

$$\rho = \int_{-0.5}^{0.5} c (x + sh, t) ds.$$

Рассматривая порознь каждый из случаев $0 \leqslant \theta \leqslant 0.5$ и $0.5 \leqslant \theta \leqslant 1$. находим

$$\chi_n = O(1), \quad \chi_{n+1} = O(1),$$
 $\chi_n + \chi_{n+1} = -(0.5 - \theta) (c_{\Pi} - c_{\Pi}) \frac{\partial u}{\partial t} (\eta, t) + O(h).$

Объединяя эти результаты с (15) и учитывая уравнение $\mathcal{P}u=0$, а также оценку

$$r_n = O(\tau^{m_\alpha}), \quad r_{n+1} = O(\tau^{m_\alpha}),$$

получаем

$$(\varphi + \chi)_n + (\varphi + \chi)_{n+1} = (0.5 - \theta)\{(\mathcal{P}u)_{11} - (\mathcal{P}u)_{21}\} + O(h) = O(h)$$

и, следовательно, для схемы (Л) имеем

$$\psi_n = O(1), \quad \psi_{n+1} = O(1), \quad \text{rae } \psi = \varphi + \chi, \quad \psi_n + \psi_{n+1} = O(h).$$

Для любой схемы $\mathcal{P}_{n\tau}^{(\alpha)}$ выполнены условия

$$h\psi_n = O(1), \ h\psi_{n+1} = O(1), \ \psi_n + \psi_{n+1} = O(1).$$

Выражения для ψ_n и $\psi_n + \psi_{n+1}$ можно представить в виде

$$\psi_n = \frac{\beta_{(-1)}}{h} + \beta_{(0)} + h\beta_{(1)} + O(h^2), \quad \psi_n + \psi_{n+1} = \sigma_{(0)} + h\sigma_{(1)} + O(h^2).$$

Не выписывая выражений для $\beta_{(-1)}$, $\beta_{(0)}$, $\beta_{(1)}$, $\sigma_{(0)}$ и $\sigma_{(1)}$, укажем, что $\beta_{(-1)}$ зависит от θ , $k_{_{\rm I}}$, $k_{_{\rm II}}$ ($k_{_{\rm I}}u'_{_{\rm I}}=k_{_{\rm II}}u'_{_{\rm I}}$), $\beta_{(0)}$ и $\sigma_{(0)}$ — от θ , $k_{_{\rm II}}$, $k_{_{\rm II}}$, $c_{_{\rm II}}$, $c_{_{\rm II}}$, $c_{_{\rm II}}$, $q_{_{\rm II}$

Для схемы (Λ) имеем

$$\beta_{(-1)} = 0, \quad \sigma_{(0)} = 0.$$

Представим $\psi = \varphi + \chi$ в виде суммы

$$\psi = \overline{\psi} + \overline{\overline{\psi}},\tag{16}$$

где

$$egin{align} \overline{\psi} &= 0 \ \ {
m пр} {
m id} \ \ x \neq x_n \ \ {
m id} \ \ x \neq x_{n+1}, \ \ \overline{\psi}_n &= rac{eta_{(-1)}}{h} + eta_{(0)} + h eta_{(1)}, \ \ \overline{\psi}_n + \overline{\psi}_{n+1} = \sigma_{(0)} + h \sigma_{(1)}. \end{split}$$

Отсюда и из (16) ясно, что

$$\|\overline{\overline{\psi}}\| = O(h^2)$$

для всех схем $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$.

Представим решение задачи (III) в виде суммы

$$z = v + w$$

где w — решение «стаплонарной» задачи

$$(aw_{\bar{x}})_x = -\bar{\psi}, \quad w_0 = 0, \quad w_N = 0.$$
 (IV)

Правая часть Ψ уравнения (III) может быть представлена в виде

$$\Psi = \alpha \psi + (1 - \alpha) \, \dot{\psi} + r = \overline{\Psi} + \overline{\overline{\Psi}},$$

где

$$\overline{\Psi} = \alpha \overline{\psi} + (1 - \alpha) \dot{\overline{\psi}}, \quad \overline{\Psi} = \alpha \overline{\psi} + (1 - \alpha) \dot{\overline{\psi}} + r.$$

Отсюда следует, что функция v определяется условиями

$$egin{aligned} \overline{\mathcal{P}}_{h au}^{(lpha)}v &= -Q & ext{Ha} & \Omega, \ v_0 &= v_N &= 0, \ v^0 &= -w^0, \end{aligned}$$

где

$$Q = \overline{\Psi} - \rho^{(\alpha)} w_{\bar{t}} - \alpha d \cdot w - (1 - \alpha) \, d \cdot w. \tag{17}$$

3. Теорема — о сходимости в случае неподвижных разрывов

Перейдем к оценке w и $w_{\overline{t}}$. Задача (IV) была исследована в [7], где показано, что

$$\|w\|_0 \leqslant \bar{M} \|\psi\|_4 \leqslant Mh^{\times};$$

здесь $\varkappa=2$ для схемы (Λ) , $\varkappa=1$ для любой схемы $\mathscr{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ из рассматриваемого класса схем.

Лемма 1. Если выполнены условия Б, то для решения задачи (IV) имеют место оценки:

a)
$$\|w_{\bar{t}}\|_{0} \leqslant Mh^{\times}$$
,

6)
$$||w_{\bar{x}}||_2 \leqslant Mh^{\kappa-1/2}$$
.

 $\mathbb B$ самом деле, учитывая, что $(dw_{\overline x})_{\overline t}=aw_{\overline x\overline t}+a_{\overline t}w_{\overline x}$, получим для $\xi=w_{\overline t}$ краевую задачу

$$(a\zeta_{\widetilde{x}})_x = -\widetilde{\widetilde{\psi}}, \quad \zeta_0 = \zeta_N = 0,$$

где

$$\widetilde{\widetilde{\psi}} = \psi_{\overline{t}} + (a_{\overline{t}} \widetilde{w}_{\overline{\tau}})_{x}.$$

Воспользуемся теперь априорной оценкой [7]

$$\|\zeta\|_0 \leqslant M \|\widetilde{\widetilde{\psi}}\|_4 \leqslant M \|\|\widetilde{\psi}_{\overline{t}}\|_1 + \|\check{w}_{\overline{x}}\|_1 \}.$$

В силу условия Б величины

$$(\mathfrak{S}_{(0)})_{\overline{t}}, (\mathfrak{S}_{(1)})_{\overline{t}}, (\mathfrak{S}_{(0)})_{\overline{t}}, (\mathfrak{S}_{(-1)})_{\overline{t}}$$

ограничены по абсолютной величине, поэтому

$$\|\overline{\psi}_{\overline{l}}\|_{4} \leqslant Mh^{\star}. \tag{18}$$

Вводя разностную функцию Грина G задачи (IV) и представляя w в виде $w = (G, \overline{\psi}).$

нетрудно убедиться в том, что $w_{\bar{x}} = O(h^{x})$ при $x \neq x_{n+1}, (w_{\bar{x}})_{n+1} = O(h^{x-1}).$

Отсюда сразу следует

$$\| \stackrel{\star}{w_{\scriptscriptstyle x}} \|_{\!\scriptscriptstyle 1} = O \ (h^{\scriptscriptstyle \mathsf{x}}), \qquad \| \stackrel{\star}{w_{\scriptscriptstyle x}} \|_{\!\scriptscriptstyle 2} = O \ (h^{\scriptscriptstyle \mathsf{x} \ -1/2}).$$

Тем самым лемма доказана.

Теорема 3. Если выполнено условие B и условия A_{α} в каждой из областей Δ_{ν} ($\nu=0,1,\ldots,\nu_0$), то решение задачи (II) сходится к решению задачи (I) при независимом стремлении h и τ к нулю, так что при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0$ для любой схемы $\mathcal{P}_{h\tau}^{(\alpha)}$ из рассматриваемого класса схем справедливы оценки

$$\|y-u\|_0 \leqslant M(h+\tau) \qquad \text{ dag } \alpha=1, \tag{19}$$

$$\|y - u\|_0 \leqslant M (h^{1/2} + \tau^{m\alpha}) \quad \partial n = 0.5 \leqslant \alpha < 1,$$
 (20)

ede $m_{\alpha}=1$ npu $\alpha \neq 1/2$, $m_{1/2}=2$.

T е о р е м а 4. Если выполнены условия теоремы 3, то для схемы (Λ) имеют место оценки

$$\|y-u\|_0 \leqslant M(h^2+\tau) \qquad \partial n \alpha = 1, \tag{21}$$

$$\|y - u\|_0 \leqslant M(h^{3/2} + \tau^{m_\alpha}) \quad \partial_{\mathcal{A}} g \quad 0.5 \leqslant \alpha < 1.$$
 (22)

Замечание. Для всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ при дополнительном условии

$$\gamma = \frac{\mathbf{\tau}}{h^2} \leqslant \frac{\mathbf{c}_{\bullet}}{2(1-\alpha)k^*} \tag{23}$$

справедлива оценка

$$||y - u||_0 \leqslant M (h^{\varkappa} + \tau^{m_{\alpha}}). \tag{24}$$

Теоремы 3 и 4 будут доказаны, если мы убедимся в том, что оценки (19)—(22), (24) имеют место для функции v—решения задачи (V), так как

$$\parallel z \parallel_0 \leqslant \parallel v \parallel_0 + \parallel w \parallel_0 \leqslant Mh^{\times} + \parallel v \parallel_0.$$

Для оценки решения задачи (V) в случае $0.5 \leqslant \alpha < 1$ воспользуемся априорной оценкой (11):

$$\|v\|_{0} \leqslant M \left\{ \|w_{\widetilde{x}}^{0}\|_{2} + \left(\sum_{\omega_{\tau}^{l}} \|Q\|_{2}^{2} \tau\right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$
 (25)

В силу (17) и леммы 1 имеем

$$||Q||_2 \leqslant M (h^{\varkappa} + \tau^{m_{\alpha}}), ||w_{\overline{x}}^0||_2 \leqslant M h^{\varkappa - 1/2}.$$

Отсюда и из (25) следуют неравенства (20) и (22).

Если выполнено условие (23), то для получения оценок (19), (21) и (24) можно воспользоваться принципом максимума:

$$\parallel v \parallel_0 \leqslant M \left\{ \parallel v^0 \parallel_0 \ + \ \sum_{\omega_{ au}'} \ au \parallel Q \parallel_0
ight\} \leqslant M \ (h^{f x} + \ au^{m_{f lpha}}),$$

так как

$$||v^0||_0 = ||w^0||_0 = O(h^{\kappa}).$$

Тем самым теорема доказана.

Следует при этом иметь в виду, что априорная оценка (11) имеет место только при условии ограниченности $|a_{\overline{t}}|$ и $|\rho_{\overline{t}}|$ (т. е. $|k_{\overline{t}}| \leqslant M$, $|c_{\overline{t}}| \leqslant M$). В рассматриваемом случае неподвижного разрыва эти условия выполнены.

4. Сходимость в случае косого разрыва

Рассмотрим теперь случай «косого разрыва», т. е. задачу, поставленную в § 1, п. 1.

Коэффициент k(x, t) имеет разрывы на конечном числе кривых $\Gamma_{1}(v=1, 2, \ldots, v_{0})$, удовлетворяющих условиям:

- 1) кривые Γ_{ν} ($\nu=0,1,\ldots,\nu_0+1$) попарно не пересекаются;
- 2) кривые Г, дифференцируемы.

Коэффициенты q(x, t) и f(x, t) также разрывны только на кривых Γ_{ν} , а c(x, t) может иметь разрывы только на тех кривых Γ_{ν} , которые параллельны оси $t(\eta'_{\nu}(t) \equiv 0)$. Все эти условия относительно коэффициентов и кривых Γ_{ν} будем называть условиями K.

Теорема 5. Если выполнены условия K и условия A_{α} в каждой из областей Δ_{ν} ($\nu=0,1,\ldots,\nu_0$), то решение задачи (II) при $\alpha=1$ сходится κ решению задачи (I) при независимом стремлении h и τ κ нулю, так вто при достаточно малых $h < h_0$ и $\tau \ll \tau_0$

$$||y - u||_0 \le M (h^{1/2 - \rho_1(h)} + \tau^{1-\rho_2(h)}),$$

 $eve_{-\rho_1}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $\rho_2(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, во всем классе исходных $eve_{-\delta}$.

T е о p е m а 6. Eсли выполнены условия теоремы 5, то для схемы (Λ) vмест место оценка

$$||y - u||_0 \leqslant M (h^{1-\rho_1(h)} + \tau^{1-\rho_2(\tau)}) \quad npu \quad \alpha = 1.$$

Доказательство обеих теорем проведем для случая одного разрыва:

$$\eta = x_n + 0h, \quad x_n = nh, \quad 0 \leqslant 0 \leqslant 1,$$

где $n = n(h, t), \theta = \theta(h, t).$

Рассмотрим погрешность

$$\Psi = \psi + r, \qquad \psi = \varphi + \chi, \qquad \varphi = L_h^{(k,q,j)} u - L^{(k,q,j)} u,$$
$$\chi = (c - \rho) \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad r = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} - u_{\overline{t}} \right).$$

Если выполнены условия A_{α} в Δ_{ν} , то $\psi = O(h^2)$ для $x \neq x_n$, $x \neq x_{n+1}$. Так как c(x, t) не имеет разрыва на линии Γ_{ν} (при $\eta'_{\nu}(t) \not\equiv 0$), то $\chi_n = O(h^2)$, $\chi_{n+1} = O(h^2)$.

Для ϕ_n и ϕ_{n+1} получаем те же выражения, что и в **п**. 2, однако в этом случае

$$\Psi_n + \Psi_{n+1} = O(1)$$

 $\partial u/\partial t$ разрывна, что следует из тождества

$$\left. \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \right|_{\Gamma_{\nu}} = - \left. \eta'(t) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \right|_{\Gamma_{\nu}}.$$

В самом деле, для схемы (Л) имеем

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} = (0.5 - \theta) c (\eta(t), t) \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + O(h).$$

Остановимся подробно на оценке погрешности r. Кривая $x=\eta(t)$ для $t-\tau\leqslant t'\leqslant t$ пересекает прямые x=ih в точках (x_p,t'_p) , где $p=p_0,\ p_0+1,\ldots,\ p_0+\overline{n}-1$. Во всех этих точках $r_p=O$ (1). Пусть $\eta'(t)>0$. Тогда

$$(u_{\overline{t}})_p = (1 - \lambda) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Pi} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Pi} + O(\tau)$$

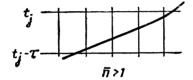
и, следовательно,

$$r_p = (1 - \lambda) c_p \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\Gamma_n} + O(\tau),$$

где λ определяется из условия $x_p=\eta$ ($t-\lambda \tau$). $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, так что

$$\lambda \tau = \eta'(t) \theta h + O(\tau h).$$

Подсчитаем число пересечений n. Возможны три случая (см. фигуру).







Число п пересечений на каждой строке сетки удовлетворяет условию

$$\overline{n} \leqslant \frac{|\eta - \check{\eta}|}{h} + 1 = \frac{|\eta - \check{\eta}|}{\tau} + 1 \leqslant M \frac{\tau}{h} + 1.$$

 Π емма 2. Пусть v есть решение задачи

$$\overline{\mathcal{P}}_{h\,\tau}^{(1)}\overline{v} = -\overline{r} \, \text{ Ha } \Omega; \quad \overline{v}_0 = \overline{v}_N = 0, \quad \overline{v^0} = 0, \quad (\text{VI})$$

еде $\overline{r}=O$ (1) в одной точке (x_p,t) на каждой строке u $\overline{r}=0$ во всех остальных точках сетки Ω . Тогда для \overline{v} при $h\leqslant h_0$ имеет место оценка

$$\|v\|_0 \leqslant Mh^{1-\varepsilon(h)},\tag{26}$$

 $e\partial e \ \rho \ (h) \rightarrow 0 \ npu \ h \rightarrow 0.$

Воспользуемся априорной оценкой (12). Из этой оценки следует неравенство

$$\|\overline{v}\|_{0} \leqslant C_{m} \|\widetilde{\overline{r}}\|_{3} h^{-1/2^{m}}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где

$$C_m = M2^m m e^{M_2^m}{}_m.$$

Вычисления дают

$$\|\bar{r}\|_{\mathbb{S}} = h \|\bar{r}_p\| \leqslant Mh$$

и

$$\| \overline{v} \|_{0} \leqslant C_{m} h^{1-1/2^{m}}$$

Выберем число m в зависимости от h так, чтобы получить оценку (26). Для этого должно быть

$$\rho(h) \geqslant \frac{1}{2^m} + \frac{M4^m}{\ln(1/h)}.$$

Выбирая, например,

$$2^m \sim \sqrt[3]{\ln(1/h)},$$

получим

$$\rho (h) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\ln (1/h)}}.$$

II е м м а 3. Если функция \overline{r} удовлетворяет условиям $\overline{h}r_n = O(h^{\mathsf{x}-1})$, $hr_{n+1} = O(h^{\mathsf{x}-1})$, $\overline{r}_n + \overline{r}_{n+1} = O(1)$ и $\overline{r} = 0$ при $x \neq x_n, x \neq x_{n+1}$ (h = n(h, t)), то для решения задачи (VI) имеет место при $h \leqslant h_0$ оценка

$$\|\overline{v}\|_0 \leqslant Mh^{\kappa/2-\rho(h)}$$

side ρ $(h) \rightarrow 0$ npu $h \rightarrow 0$.

Для доказательства леммы достаточно убедиться в том, что

$$\|\overline{r}\|_3^2 \leqslant h^3 \overline{r}_n^2 + h^2 (\overline{r}_n + \overline{r}_{n+1})^2 \leqslant Mh^{x},$$

r. e.

$$\|\stackrel{-}{r}\|_3\leqslant Mh^{lpha/2}$$
,

и воспользоваться затем априорной оценкой (12).

Лемма 4. Пусть \overline{v} — решение задачи (VI), где $\overline{r} = O$ (1) в точках $p_v + 1, p_0 + 2, \ldots, p_0 + \overline{n}$ строки $t = \tau j$ и $\overline{r} = O$ (τ) в остальных точ-ках строки $t = \tau j$, причем число точек \overline{n} удовлетворяет условию

$$0 \leqslant \overline{n} \leqslant M \frac{\tau}{h}$$
.

Tогда для \overline{v} npu $au \leqslant au_0$ имеет место оценка

$$\|\overline{v}\|_0 \leqslant M\tau^{1-\rho(\tau)}, \quad \rho(\tau) \to 0 \quad \text{при } \tau \to 0. \tag{27}$$

Для доказательства достаточно оценить

$$\|\overline{r}\|_3 \leqslant M \Big[\frac{\tau}{h} (Mh) + \tau\Big] \leqslant M\tau$$

и воспользоваться априорной оценкой (13), откуда следует, что

$$\|\overline{v}\|_0 \leqslant C_m \tau^{1-1/2^m}.$$

Выбирая теперь m в зависимости от τ , приходим при достаточно малых значениях τ к оценке (27).

Следствие. Если в лемме $4\overline{n} \leqslant M\tau/h + 1$, то в силу лемм 2 и 4 будем иметь $\|\overline{v}\|_0 \leqslant M (h^{1-\rho_1(h)} + \tau^{1-\rho_2(l)})$ при $\tau \leqslant \tau_0$ и $h \leqslant h_0$.

Обратимся теперь к доказательству теорем 5 и 6.

Представим решение z в виде суммы

$$z = \overline{z} + \overline{z} + v,$$

где ϵ — решение задачи (III) с правой частью, равной $r=\rho~(\partial u/\partial t~-~u_{\bar{t}}),$

z — решение той же задачи с правой частью

$$\overline{\Psi}_{i} = \overline{\psi}_{n} \delta_{in} + \overline{\psi}_{n+1} \delta_{i,n+1}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Оценка для \overline{z} может быть получена при помощи принципа максимума:

$$\|\overline{z}\|_0 \leqslant M (h^2 + \tau),$$

для v — при помощи следствия лемм 2 и 4, для \overline{z} — при помощи леммы 3. Собирая все результаты и замечая, что $\|z\|_0 \leqslant \|\overline{z}\|_0 + \|\overline{z}\|_0 + \|v\|_0$, получаем искомые оценки.

Замечание. Из оценки (10°) следует сходимость в среднем для шеститочечной схемы (Λ) (0,5 $\leqslant \alpha \leqslant$ 1) в случае косого разрыва.

В заключение авторы пользуются возможностью выразить благодарность А. Н. Тихонову за дискуссию по результатам работы.

Ноступила в редакцию 14.05.1961

Цитированная литература

- M. Lees. Approximate solutions of parabolic equations. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1959, 7, № 2, 167—183.
- 2. M. Lees. Apriori estimates for the solutions of difference approximations to parabolic partial differential equations. Duke Math. J., 1960, 27, № 3, 297—311.
- 3. M. Lees. Energy inequalities for the solution of differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 94, 58-73.
- 4. J. Douglas. The application of stability analysis in the numerical solution of quasi-linear parabolic differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 89, № 2, 484—518.
- 5. H. Keller. The numerical solution of parabolic partial differential equations. Math. methods digital computers. N. Y.—London, 1960, 135—143.
- 6. Л. И. Камынин. Об устойчивости разностных параболических уравнений. Докл. АН СССР, 1961, 136, № 6, 12 7—1290.
- 7. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Ободнородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 5—63.
- 8. А. А. Самарский. Априорные оценки для разностного аналога уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 441—460.
- 9. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Ободнородных разностных схемах высокого порядка точности. Докл. АН СССР, 1960, 131, № 3, 514—517.
- 10. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Ободной наилучшей разностной схеме. Докл. АН СССР, 1959, 124, № 4, 779—782.
- 11. А. А. Самарский. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения. Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям (Ереван, поябрь 1958 г.). Ереван, Изд-во АН АрмССР. 1960, 148—160.
- 12. А. А. Самарский. О сходимости метода Роте для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности. Научи, докл. высш. школы. Физ.-матем. науки, 1959.
- 13. А. А. Самарский. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 2, 225—228.
- В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1956.
- Р. Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во ин. лит., 1960.
- В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.— Л., Физматгиз, 1960.