Доклады Академии наук СССР
1960. Том 131, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ и А. А. САМАРСКИЙ

ОБ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

п. 1. Настоящая работа посвящена построению точной разностной схемы и разностных схем любого порядка точности для краевых задач 1-го, 2-го и 3-го рода для дифференциального уравнения

$$L^{(p,q,f)}u = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right] - q(x)u + f(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \tag{1}$$

где $0 < K_1 \leqslant p(x) \leqslant K_2$, $0 \leqslant q(x) \leqslant K_2$.

Все указанные схемы относятся к семейству однородных трехточечных консервативных разностных схем [1,2] вида

$$L_h^{(p,q,f)}y_i = \frac{1}{h^2}\Delta\left(\frac{\nabla y_i}{A_i^h}\right) - D_i^h y_i + \Phi_i^h, \tag{2}$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1} \quad (h = 1/N,\ x_i = ih);$$
$$A_i^h = A^h[p(x_i + sh),\ q(x_i + sh)] \quad (-1 < s < 0);$$
$$D_i^h = D^h[p(x_i + sh),\ q(x_i + sh)] \quad (-1 < s < 1);$$
$$\Phi_i^h = \Phi^h[p(x_i + sh),\ q(x_i + sh),\ f(x_i + sh)] \quad (-1 < s < 1),$$

$A^h[\bar p(s), \bar q(s)]$, $D^h[\bar p(s), \bar q(s)]$, $\Phi^h = \Phi^h[\bar p(s), \bar q(s), \bar f(s)]$ — некоторые нелинейные функционалы, вычисляемые при помощи квадратур для схем конечного порядка точности.

п. 2. Дадим конструкцию точной схемы. Введем местную систему координат, положив $s = \frac{1}{h}(x - x_i)$, $x_i = ih$. Тогда интервал (x_{i-1}, x_{i+1}) преобразуется в интервал $-1 < s < 1$, а уравнение (1) примет вид

$$L^*\bar u = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\bar p(s)}\frac{d\bar u}{ds}\right] - h^2\bar q(s)\bar u(s) = -h^2\bar f(s), \tag{3}$$

где $\bar p(s) = p(x_i + sh)$ и т. д.

Для построения точной схемы достаточно установить соотношение, связывающее значения $\bar u(s)$ при $s = -1, 0, 1$; это возможно, так как решение уравнения второго порядка на интервале определяется заданием значений искомой функции на концах этого интервала.

Общее решение уравнения (3) представимо в виде

$$\bar u(s) = \frac{\alpha(s;\ h)}{\alpha(1;\ h)}\bar u(1) + \frac{\beta(s;\ h)}{\beta(1;\ h)}\bar u(-1) + h^2\gamma(s;\ h), \tag{4}$$

где $\alpha(s;\ h) = v_1$ и $\beta(s;\ h) = v_2$ — два линейно независимых решения однородного уравнения

$$\begin{aligned} &L^*v = 0, \quad \alpha(-1,\ h) = 0, \quad \alpha'(-1,\ h) = \bar p(-1), \\ &\beta(1;\ h) = 0, \quad \beta'(1;\ h) = -\bar p(1), \end{aligned} \tag{5}$$

а $\gamma(s;\ h)=v_3$ — решение неоднородного уравнения

$$L^*\gamma=-\bar{f}(s),\quad \gamma(-1;\ h)=\gamma(1;\ h)=0. \tag{6}$$

Полагая в (4) $s=0$, приходим к формуле

$$\bar{u}(0)=P^h\bar{u}(-1)+Q^h\bar{u}(1)+R^h, \tag{7}$$

где коэффициенты

$$\begin{gathered}P^h=\frac{\beta(0;\ h)}{\beta(-1;\ h)}=P^h[\bar{p}(s);\ \bar{q}(s)],\quad Q^h=\frac{\alpha(0;\ h)}{\alpha(1;\ h)}=Q^h[\bar{p}(s),\ \bar{q}(s)],\\ R^h=h^2\gamma(0;\ h)=R^h[\bar{p}(s),\ \bar{q}(s);\ \bar{f}(s)]\end{gathered} \tag{8}$$

являются функционалами коэффициентов уравнения (3).

Возвращаясь к старым переменным, получим разностные уравнения

$$u_i=P_i^hu_{i-1}+Q_i^hu_{i+1}+R_i^h,\quad 0<i<N,\quad u_0=\mu_1,\quad u_N=u(1)=\mu_2, \tag{9}$$

которым удовлетворяет решение $u=u(x)$ дифференциального уравнения (1). Здесь

$$\begin{gathered}u_i=u(x_i),\ P_i^h=P^h[\bar{p}_i(s),\ \bar{q}_i(s)],\ Q_i^h=Q^h[\bar{p}_i(s);\ \bar{q}_i(s)],\\ R_i^h=R^h[\bar{p}_i(s),\ \bar{q}_i(s),\bar{f}_i(s)],\ \bar{p}_i(s)=p(x_i+sh),\quad \bar{q}_i(s)=q(x_i+sh),\\ \bar{f}_i(s)=f(x_i+sh).\end{gathered}$$

Функции $\alpha(s;\ h)$, $\beta(s;\ h)$ и $\gamma(s;\ h)$, при помощи которых конструируются функционалы P^h, Q^h, R^h для точной схемы, мы в дальнейшем будем называть шаблонными функциями.

п. 3. Рассмотрим теперь краевое условие 3-го рода при $x=0$:

$$u'(0)/p(0)-\sigma u(0)=\mu_1 \tag{10}$$

и найдем его разностный эквивалент.

Рассматривая интервал $(0;\ h)$, представляя затем общее решение уравнения (3) в интервале $(0<s<1)$ через шаблонные функции $\alpha^*(s;\ h)$, $\beta(s;\ h)$, $\gamma^*(s;\ h)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}L^*\alpha^*=L^*\beta=0,\quad L^*\gamma^*=-\bar{f}(s),\quad \alpha^*(0;\ h)=\gamma^*(0;\ h)=0,\\ \beta(1;\ h)=\gamma^*(1;\ h)=0.\quad \alpha^{*\prime}(0;\ h)=\bar{p}(0);\quad \beta'(1;\ h)=-\bar{p}(1),\end{gathered} \tag{11}$$

и требуя, чтобы выполнялось условие (10), в результате приходим к точному двухточечному разностному краевому условию 3-го рода

$$u_0=a_1u_1+b_1, \tag{12}$$

$$a_1=\left\{1+h\left[\sigma+h\int_0^1 q(sh)\overset{0}{\beta}(s;\ h)\,ds\right]\right\}^{-1},\ b_1=h\left[\mu_1-\frac{h\overset{0}{\gamma^{*\prime}}(0;\ h)}{p(0)}\right]\alpha_1\overset{0}{\beta}(0;\ h).$$

Индекс нуль сверху (например $\overset{0}{\beta}$) означает, что шаблонные функции берутся для коэффициентов $\bar{p}_0(s)=p(sh)$, $q_0(s)=q(sh)$, $\bar{f}_0(s)=f(sh)$.

п. 4. Преобразуем разностное уравнение (7) или (9). Для этого используем ряд свойств шаблонных функций $\alpha(s;\ h)$ и $\beta(s;\ h)$:

$$1)\quad \alpha(s;\ h)>0,\quad \beta(s;\ h)>0 \text{ при } -1<s<1, \text{ если } \bar{q}(s)\geqslant 0; \tag{13}$$

$$2)\quad \alpha(1;\ h)=\beta(-1;\ h); \tag{14}$$

$$3)\quad \alpha(1;\ h)-\alpha(0;\ h)-\beta(0;\ h)=h^2\left\{\beta(0;h)\int_{-1}^{0}\bar{q}(s)\,\alpha(s;\ h)\,ds+\right.$$

$$\left.+\alpha(0;\ h)\int_{0}^{1}\bar{q}(s)\,\beta(s;\ h)\,ds\right\}. \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) устанавливаются при помощи второй формулы Грина с учетом условий (5).

В силу условий (14) и (15) равенство (7) можно записать так:

$$\frac{1}{h^2}\left[\frac{\bar{u}(1)-\bar{u}(0)}{\beta(0;\ h)}-\frac{\bar{u}(0)-\bar{u}(-1)}{\alpha(0;\ h)}\right]-\bar{u}(0)\left\{\frac{1}{\alpha(0;\ h)}\int_{-1}^{0}\bar{q}(s)\,\alpha(s;\ h)\,ds+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta(0;\ h)}\int_{0}^{1}\bar{q}(s)\,\beta(s,\ h)\,ds\right\}+\frac{\alpha(1;\ h)}{\alpha(0;\ h)\,\beta(0;\ h)}\,\gamma(0;\ h)=0. \tag{16}$$

Положим $\bar{p}_i(s)=p(x_i+sh)$ и т. д. и обозначим $\alpha_i(s;\ h)$, $\beta_i(s;\ h)$, $\gamma_i(s,\ h)$ полученные в результате такой замены функции α, β и γ. Нетрудно показать, что

$$\beta_i(0;\ h)=\alpha_{i+1}(0;\ h). \tag{17}$$

В результате мы получаем консервативную схему (2), где

$$A_i^h=\alpha_i(0;\ h)=A^h[\bar{p}_i(s),\ \bar{q}_i(s)];\ \bar{p}_i(s)=p(x_i+sh);\ \bar{q}_i(s)=q(x_i+sh); \tag{18}$$

$$D_i^h=\frac{1}{A_i^h}\int_{-1}^{0}\bar{q}_i(s)\,\alpha_i(s;\ h)\,ds+\frac{1}{A_{i+1}^h}\int_{0}^{1}\bar{q}_i(s)\,\beta_i(s;\ h)\,ds; \tag{19}$$

$$\Phi_i^h=\left(h^2D_i^h+\frac{1}{A_i^h}+\frac{1}{A_{i+1}^h}\right)\gamma_i(0;\ h). \tag{20}$$

Условие (17), очевидно, есть условие консервативности $B_i^h=A_{i+1}^h$ (см.([2])). Уравнение $L_h^{(p,q,f)}y_i=0$, определяемое формулами (2), (18), (19) и (20), по построению эквивалентно уравнению (9).

Таким образом, установлено, что точная схема $L_h^{(p,q,f)}$ является однородной, трехточечной, консервативной разностной схемой.

п. 5. Шаблонные функции $\alpha(s;\ h)$, $\beta(s;\ h)$, $\gamma(s;\ h)$ являются целыми аналитическими функциями от h^2:

$$\alpha(s;\ h)=\sum_{k=0}^{\infty}h^{2k}\alpha^{(2k)}(s)=\alpha^{(0)}(s)+h^2\alpha^{(2)}(s)+\ldots+h^{2k}\alpha^{(2k)}(s)+\ldots,$$

$$\beta(s;\ h)=\sum_{k=0}^{\infty}h^{2k}\beta^{(2k)}(s),\qquad \gamma(s;\ h)=\sum_{k=0}^{\infty}h^{2k}\gamma^{(2k)}(s). \tag{21}$$

Учитывая условия (5) и (6), находим

$$\alpha^{(0)}(s)=\int\limits_{-1}^{s}\bar{p}(s)\,ds,\qquad \beta^{(0)}(s)=\int\limits_{s}^{1}\bar{p}(s)\,ds.\tag{22}$$

$$\alpha^{(2k+2)}(s)=\int\limits_{-1}^{s}\bar{p}(t)\left[\int\limits_{-1}^{t}\bar{q}(\lambda)\,\alpha^{(2k)}(\lambda)\,d\lambda\right]dt,$$

$$\beta^{(2k+2)}(s)=\int\limits_{s}^{1}\bar{p}(t)\left[\int\limits_{t}^{1}\bar{q}(\lambda)\,\beta^{(2k)}(\lambda)\,d\lambda\right]dt\ (k=0,\ 1,\ 2,\ldots);$$

$$\gamma^{(2k)}(s)=\left[\int\limits_{-1}^{1}\bar{p}(t)\,dt\right]^{-1}\cdot\left\{\int\limits_{-1}^{1}\bar{p}(t)\left[\int\limits_{-1}^{t}\eta^{(2k)}(\lambda)\,d\lambda\right]dt\cdot\int\limits_{-1}^{s}\bar{p}(t)\,dt-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-1}^{s}\bar{p}(t)\left[\int\limits_{-1}^{t}\eta^{(2k)}(\lambda)\,d\lambda\right]dt\cdot\int\limits_{-1}^{1}\bar{p}(t)\,dt\right\},\tag{23}$$

где $\eta^{(0)}(\lambda)=\bar{f}(\lambda)$, $\eta^{(2k)}(\lambda)=\bar{q}(\lambda)\,\gamma^{(2k-2)}(\lambda)$ при $k=1,\ 2,\ldots$

Таким образом, каждый из коэффициентов $\alpha^{(2k)}$, $\beta^{(2k)}$, $\gamma^{(2k)}$ выражается при помощи $(k+1)$-кратного интегрирования через $\bar{p}(s)$, $\bar{q}(s)$ и $\bar{f}(s)$.

п. 6. Возникает вопрос: если в (21) ограничиться конечным числом слагаемых, т. е. вместо рядов взять полиномы

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}(s,\ 2m;\ h)&=\alpha^{(0)}(s)+h^2\alpha^{(2)}(s)+\ldots+h^{2m}\alpha^{(2m)}(s),\\ \Pi^{(2)}(s,\ 2m;\ h)&=\beta^{(0)}(s)+h^2\beta^{(2)}(s)+\ldots+h^{2m}\beta^{(2m)}(s),\\ \Pi^{(3)}(s,\ 2m;\ h)&=\gamma^{(0)}(s)+h^2\gamma^{(2)}(s)+\ldots+h^{2m}\gamma^{(2m)}(s),\end{aligned}\tag{24}$$

то какой интегральный порядок точности по h будет иметь построенная при помощи шаблонов $\Pi^{(j)}(s,\ 2m;\ h)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ разностная схема $\overset{2m}{L}{}_h^{(p,p,f)}$? Такую схему мы будем называть усеченной разностной схемой ранга $2m$.

Мы будем рассматривать пока первую краевую задачу

$$\overset{2m}{L}{}_h^{(p,q,f)}y_i=\frac{1}{h^2}\Delta\left(\frac{\nabla y_i}{\overset{2m}{A}{}_i^h}\right)-\overset{2m}{D}{}_i^h y_i+\overset{2m}{\Phi}{}_i^h=0,\qquad y_0=\mu_1,\qquad y_N=\mu_2.\tag{25}$$

Коэффициенты усеченной схемы (25) определяются по (18)—(20), следует заменить α, β, γ шаблонными функциями $\Pi^{(j)}$ $(j=1,\ 2,\ 3)$.

Теорема. *Усеченная схема $2m$-го ранга имеет для 1-й краевой задачи* (25) $(2m+2)$*-й интегральный порядок точности, если коэффициенты $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ дифференциального уравнения* (1) *принадлежат классу кусочно-непрерывных функций Q_0, причем*

$$0<K_1\leqslant p(x)\leqslant K_2,\qquad 0\leqslant q(x)\leqslant K_2,\qquad |f(x)|\leqslant K_2.$$

Эта теорема легко обобщается на случай краевых условий 2-го и 3-го ранга, если ввести понятие усеченного разностного краевого условия $2m$-го ранга. Из теоремы, в частности, следует, что усеченная схема нулевого ранга имеет 2-й интегральный порядок точности в Q_0 (ср. [3]). Усеченные схемы являются полезным аппаратом для построения дискретных схем повышенного порядка точности.

п. 7. Если разностная сетка $S_N=\{x_0=0,\ x_1,\ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ldots,x_N=1\}$ неравномерна и $h=\max h_i$, $h_i=x_i-x_{i-1}$, то и в этом случае может быть построена точная трехточечная схема и усеченные схемы любого ранга, для которых имеет место теорема п. 6.

Поступило
4 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 122, № 2 (1958). [2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 124, № 3 (1959). [3] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 124, № 4 (1959).