

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ и А. А. САМАРСКИЙ

ОБ ОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

п. 1. Настоящая работа посвящена построению точной разностной схемы и разностных схем любого порядка точности для краевых задач 1-го, 2-го и 3-го рода для дифференциального уравнения

$$L^{(p,q,f)}u = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right] - q(x)u + f(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \quad (1)$$

где $0 < K_1 \leq p(x) \leq K_2$, $0 \leq q(x) \leq K_2$.

Все указанные схемы относятся к семейству однородных трехточечных консервативных разностных схем ^(1, 2) вида

$$L_h^{(p,q,f)}y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{A_i^h} \right) - D_i^h y_i + \Phi_i^h, \quad (2)$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1} \quad (h = 1/N, x_i = ih);$$

$$A_i^h = A^h [p(x_i + sh), q(x_i + sh)] \quad (-1 < s < 0);$$

$$D_i^h = D^h [p(x_i + sh), q(x_i + sh)] \quad (-1 < s < 1);$$

$$\Phi_i^h = \Phi^h [p(x_i + sh), q(x_i + sh), f(x_i + sh)] \quad (-1 < s < 1),$$

$A^h [\bar{p}(s), \bar{q}(s)]$, $D^h [\bar{p}(s), \bar{q}(s)]$, $\Phi^h = \Phi^h [\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s)]$ — некоторые нелинейные функционалы, вычисляемые при помощи квадратур для схем конечного порядка точности.

п. 2. Дадим конструкцию точной схемы. Введем местную систему координат, положив $s = \frac{1}{h}(x - x_i)$, $x_i = ih$. Тогда интервал (x_{i-1}, x_{i+1}) преобразуется в интервал $-1 < s < 1$, а уравнение (1) примет вид

$$L^* \bar{u} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{d\bar{u}}{ds} \right] - h^2 \bar{q}(s) \bar{u}(s) = -h^2 \bar{f}(s), \quad (3)$$

где $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$ и т. д.

Для построения точной схемы достаточно установить соотношение, связывающее значения $\bar{u}(s)$ при $s = -1, 0, 1$; это возможно, так как решение уравнения второго порядка на интервале определяется заданием значений искомой функции на концах этого интервала.

Общее решение уравнения (3) представимо в виде

$$\bar{u}(s) = \frac{\alpha(s; h)}{\alpha(1; h)} \bar{u}(1) + \frac{\beta(s; h)}{\beta(-1; h)} \bar{u}(-1) + h^2 \gamma(s; h), \quad (4)$$

где $\alpha(s; h) = v_1$ и $\beta(s; h) = v_2$ — два линейно независимых решения однородного уравнения

$$L^* v = 0, \quad \alpha(-1, h) = 0, \quad \alpha'(-1, h) = \bar{p}(-1), \\ \beta(1, h) = 0, \quad \beta'(1, h) = -\bar{p}(1), \quad (5)$$

а $\gamma(s; h) = v_3$ — решение неоднородного уравнения

$$L^* \gamma = -\bar{f}(s), \quad \gamma(-1; h) = \gamma(1; h) = 0. \quad (6)$$

Полагая в (4) $s = 0$, приходим к формуле

$$\bar{u}(0) = P^h \bar{u}(-1) + Q^h \bar{u}(1) + R^h, \quad (7)$$

где коэффициенты

$$P^h = \frac{\beta(0; h)}{\beta(-1; h)} = P^h[\bar{p}(s); \bar{q}(s)], \quad Q^h = \frac{\alpha(0; h)}{\alpha(1; h)} = Q^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s)], \quad (8)$$

$$R^h = h^2 \gamma(0; h) = R^h[\bar{p}(s), \bar{q}(s); \bar{f}(s)]$$

являются функционалами коэффициентов уравнения (3).

Возвращаясь к старым переменным, получим разностные уравнения

$$u_i = P_i^h u_{i-1} + Q_i^h u_{i+1} + R_i^h, \quad 0 < i < N, \quad u_0 = \mu_1, \quad u_N = u(1) = \mu_2, \quad (9)$$

которым удовлетворяет решение $u = u(x)$ дифференциального уравнения (1).
Здесь

$$u_i = u(x_i), \quad P_i^h = P^h[\bar{p}_i(s), \bar{q}_i(s)], \quad Q_i^h = Q^h[\bar{p}_i(s), \bar{q}_i(s)],$$

$$R_i^h = R^h[\bar{p}_i(s), \bar{q}_i(s), \bar{f}_i(s)], \quad \bar{p}_i(s) = p(x_i + sh), \quad \bar{q}_i(s) = q(x_i + sh),$$

$$\bar{f}_i(s) = f(x_i + sh).$$

Функции $\alpha(s; h)$, $\beta(s; h)$ и $\gamma(s; h)$, при помощи которых конструируются функционалы P^h , Q^h , R^h для точной схемы, мы в дальнейшем будем называть шаблонными функциями.

п. 3. Рассмотрим теперь краевое условие 3-го рода при $x = 0$:

$$u'(0)/p(0) - \sigma u(0) = \mu_1 \quad (10)$$

и найдем его разностный эквивалент.

Рассматривая интервал $(0; h)$, представляя затем общее решение уравнения (3) в интервале $(0 < s < 1)$ через шаблонные функции $\alpha^*(s; h)$, $\beta(s; h)$, $\gamma^*(s; h)$, удовлетворяющие условиям

$$L^* \alpha^* = L^* \beta = 0, \quad L^* \gamma^* = -\bar{f}(s), \quad \alpha^*(0; h) = \gamma^*(0; h) = 0, \quad (11)$$

$$\beta(1; h) = \gamma^*(1; h) = 0, \quad \alpha^{*'}(0; h) = \bar{p}(0); \quad \beta'(1; h) = -\bar{p}(1),$$

и требуя, чтобы выполнялось условие (10), в результате приходим к точному двухточечному разностному краевому условию 3-го рода

$$u_0 = a_1 u_1 + b_1, \quad (12)$$

$$a_1 = \left\{ 1 + h \left[\sigma + h \int_0^1 q(sh) \beta(s; h) ds \right] \right\}^{-1}, \quad b_1 = h \left[\mu_1 - \frac{h \gamma^{*'}(0; h)}{p(0)} \right] \alpha_1 \beta(0; h).$$

Индекс нуль сверху (например β^0) означает, что шаблонные функции берутся для коэффициентов $\bar{p}_0(s) = p(sh)$, $q_0(s) = q(sh)$, $\bar{f}_0(s) = f(sh)$.

п. 4. Преобразуем разностное уравнение (7) или (9). Для этого используем ряд свойств шаблонных функций $\alpha(s; h)$ и $\beta(s; h)$:

$$1) \quad \alpha(s; h) > 0, \quad \beta(s; h) > 0 \text{ при } -1 < s < 1, \text{ если } \bar{q}(s) \geq 0; \quad (13)$$

$$2) \quad \alpha(1; h) = \beta(-1; h); \quad (14)$$

$$3) \quad \alpha(1; h) - \alpha(0; h) - \beta(0; h) = h^2 \left\{ \beta(0; h) \int_{-1}^0 \bar{q}(s) \alpha(s; h) ds + \right. \\ \left. + \alpha(0; h) \int_0^1 \bar{q}(s) \beta(s; h) ds \right\}. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) устанавливаются при помощи второй формулы Грина с учетом условий (5).

В силу условий (14) и (15) равенство (7) можно записать так:

$$\frac{1}{h^2} \left[\frac{\bar{u}(1) - \bar{u}(0)}{\beta(0; h)} - \frac{\bar{u}(0) - \bar{u}(-1)}{\alpha(0; h)} \right] - \bar{u}(0) \left\{ \frac{1}{\alpha(0; h)} \int_{-1}^0 \bar{q}(s) \alpha(s; h) ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta(0; h)} \int_0^1 \bar{q}(s) \beta(s; h) ds \right\} + \frac{\alpha(1; h)}{\alpha(0; h) \beta(0; h)} \gamma(0; h) = 0. \quad (16)$$

Положим $\bar{p}_i(s) = p(x_i + sh)$ и т. д. и обозначим $\alpha_i(s; h)$, $\beta_i(s; h)$, $\gamma_i(s; h)$ полученные в результате такой замены функции α , β и γ . Нетрудно показать, что

$$\beta_i(0; h) = \alpha_{i+1}(0; h). \quad (17)$$

В результате мы получаем консервативную схему (2), где

$$A_i^h = \alpha_i(0; h) = A^h [\bar{p}_i(s), \bar{q}_i(s)]; \quad \bar{p}_i(s) = p(x_i + sh); \quad \bar{q}_i(s) = q(x_i + sh); \quad (18)$$

$$D_i^h = \frac{1}{A_i^h} \int_{-1}^0 \bar{q}_i(s) \alpha_i(s; h) ds + \frac{1}{A_{i+1}^h} \int_0^1 \bar{q}_i(s) \beta_i(s; h) ds; \quad (19)$$

$$\Phi_i^h = \left(h^2 D_i^h + \frac{1}{A_i^h} + \frac{1}{A_{i+1}^h} \right) \gamma_i(0; h). \quad (20)$$

Условие (17), очевидно, есть условие консервативности $B_i^h = A_{i+1}^h$ (см. (2)). Уравнение $L_h^{(p,q,f)} y_i = 0$, определяемое формулами (2), (18), (19) и (20), по построению эквивалентно уравнению (9).

Таким образом, установлено, что точная схема $L_h^{(p,q,f)}$ является однородной, трехточечной, консервативной разностной схемой.

п. 5. Шаблонные функции $\alpha(s; h)$, $\beta(s; h)$, $\gamma(s; h)$ являются целыми аналитическими функциями от h^2 :

$$\alpha(s; h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \alpha^{(2k)}(s) = \alpha^{(0)}(s) + h^2 \alpha^{(2)}(s) + \dots + h^{2k} \alpha^{(2k)}(s) + \dots, \\ \beta(s; h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \beta^{(2k)}(s), \quad \gamma(s; h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \gamma^{(2k)}(s). \quad (21)$$

Учитывая условия (5) и (6), находим

$$\alpha^{(0)}(s) = \int_{-1}^s \bar{p}(s) ds, \quad \beta^{(0)}(s) = \int_s^1 \bar{p}(s) ds. \quad (22)$$

$$\alpha^{(2k+2)}(s) = \int_{-1}^s \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \bar{q}(\lambda) \alpha^{(2k)}(\lambda) d\lambda \right] dt,$$

$$\beta^{(2k+2)}(s) = \int_s^1 \bar{p}(t) \left[\int_t^1 \bar{q}(\lambda) \beta^{(2k)}(\lambda) d\lambda \right] dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\begin{aligned} \gamma^{(2k)}(s) = & \left[\int_{-1}^1 \bar{p}(t) dt \right]^{-1} \cdot \left\{ \int_{-1}^1 \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \eta^{(2k)}(\lambda) d\lambda \right] dt \cdot \int_{-1}^s \bar{p}(t) dt - \right. \\ & \left. - \int_{-1}^s \bar{p}(t) \left[\int_{-1}^t \eta^{(2k)}(\lambda) d\lambda \right] dt \cdot \int_{-1}^1 \bar{p}(t) dt \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

где $\eta^{(0)}(\lambda) = \bar{f}(\lambda)$, $\eta^{(2k)}(\lambda) = \bar{q}(\lambda) \gamma^{(2k-2)}(\lambda)$ при $k = 1, 2, \dots$

Таким образом, каждый из коэффициентов $\alpha^{(2k)}$, $\beta^{(2k)}$, $\gamma^{(2k)}$ выражается при помощи $(k+1)$ -кратного интегрирования через $\bar{p}(s)$, $\bar{q}(s)$ и $\bar{f}(s)$.

п. 6. Возникает вопрос: если в (21) ограничиться конечным числом слагаемых, т. е. вместо рядов взять полиномы

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}(s, 2m; h) &= \alpha^{(0)}(s) + h^2 \alpha^{(2)}(s) + \dots + h^{2m} \alpha^{(2m)}(s), \\ \Pi^{(2)}(s, 2m; h) &= \beta^{(0)}(s) + h^2 \beta^{(2)}(s) + \dots + h^{2m} \beta^{(2m)}(s), \\ \Pi^{(3)}(s, 2m; h) &= \gamma^{(0)}(s) + h^2 \gamma^{(2)}(s) + \dots + h^{2m} \gamma^{(2m)}(s), \end{aligned} \quad (24)$$

то какой интегральный порядок точности по h будет иметь построенная при помощи шаблонов $\Pi^{(j)}(s, 2m; h)$ ($j = 1, 2, 3$) разностная схема $L_h^{(p,p,f)}$ ^{2m}

Таковую схему мы будем называть усеченной разностной схемой ранга $2m$.

Мы будем рассматривать пока первую краевую задачу

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{\nabla y_i}{A_i} \right) - D_i^{2m} y_i + \Phi_i^{2m} = 0, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \quad (25)$$

Коэффициенты усеченной схемы (25) определяются по (18) — (20), следует заменить α , β , γ шаблонными функциями $\Pi^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$).

Теорема. Усеченная схема $2m$ -го ранга имеет для 1-й краевой задачи (25) $(2m+2)$ -й интегральный порядок точности, если коэффициенты $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ дифференциального уравнения (1) принадлежат классу кусочно-непрерывных функций Q_0 , причем

$$0 < K_1 \leq p(x) \leq K_2, \quad 0 \leq q(x) \leq K_2, \quad |f(x)| \leq K_2.$$

Эта теорема легко обобщается на случай краевых условий 2-го и 3-го ранга, если ввести понятие усеченного разностного краевого условия $2m$ -го ранга. Из теоремы, в частности, следует, что усеченная схема нулевого ранга имеет 2-й интегральный порядок точности в Q_0 (ср. (3)). Усеченные схемы являются полезным аппаратом для построения дискретных схем повышенного порядка точности.

п. 7. Если разностная сетка $S_N = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_N = 1\}$ неравномерна и $h = \max h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, то и в этом случае может быть построена точная трехточечная схема и усеченные схемы любого ранга, для которых имеет место теорема п. 6.

Поступило
4 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 122, № 2 (1958). ² А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 124, № 3 (1959). ³ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 124, № 4 (1959).