Доклады Академии наук СССР
1960. Том 131, № 6

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ и А. А. САМАРСКИЙ

О КОЭФФИЦИЕНТО-УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Рассматривается вопрос об устойчивости решения разностных краевых задач относительно коэффициентов разностных схем (о ко-устойчивости). Показано, что необходимым и достаточным условием ко-устойчивости канонической схемы является ее консервативность.

п. 1. Рассмотрим на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ класс краевых задач

$$L^{(p,q,f)}u = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right] - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \tag{1}$$

Коэффициенты уравнения принадлежат классу Q_0 кусочно-непрерывных функций и удовлетворяют условиям:

$$0 < K_1 \leqslant p(x) \leqslant K_2, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant K_2, \quad |f(x)| \leqslant K_2, \tag{2}$$

где K_1 и K_2 — положительные постоянные.

Пусть $s_N = \{x_0 = 0,\ x_1 = h, \ldots, x_i = ih, \ldots, x_N = Nh = 1\}$ — равномерная разностная сетка с шагом $h = \frac{1}{N}$, а $L_h^{(p,q,f)}y_i$ — однородная трехточечная разностная схема, соответствующая оператору

$$L_h^{(p,q,f)}y_i = \frac{1}{h^2}[(y_{i+1} - y_i)/B_i^h - (y_i - y_{i-1})/A_i^h] - D_i^h y_i + F_i^h; \tag{3}$$

$$A_i^h = A^h[\bar{p}_i(s)], \quad B_i^h = B^h[\bar{p}_i(s)], \quad -1 < s < 1, \quad \bar{p}_i(s) = p(x_i + sh);$$

$$D_i^h = D^h[q(x_i + sh)], \quad F_i^h = F^h[f(x_i + sh)], \quad -0{,}5 < s < 0{,}5.$$

Функционалы A^h, B^h, D^h и F^h удовлетворяют условиям $А_1$, $А_2$, $А_3$ работы ([1]), т. е. мы рассматриваем тот же исходный класс разностных схем, что и в работе ([1]). При этом предполагается, что D^h и F^h — линейные функционалы.

п. 2. Если $B_i^h = A_{i+1}^h$, то разностный оператор L_h называется консервативным. Консервативный оператор можно записать в самосопряженной форме

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2}\Delta(\nabla y_i / A_i^h) - D_i^h\ y_i + F_i^h, \text{ где } \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\ \nabla y_i = y_i - y_{i-1}. \tag{3'}$$

Заметим, что разностная схема (3) может быть консерватизирована путем умножения на множитель

$$\mu_i = \prod_{s=1}^{i-1}(A_{s+1}^h / B_s^h). \tag{4}$$

В результате получим консервативную, вообще говоря, неоднородную схему.

п. 3. Разностная функция Грина $G_{i,k}$ определяется условиями

$$L_h^{(p,q)}G_{i,k} = -\frac{\delta_{i,k}}{h}, \quad G_{0k} = G_{Nk} = 0, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \tag{5}$$

Решение краевой задачи

$$L_h^{(p,q)}z_i = -\varphi_i, \quad 0 < i < N, \quad z_0 = 0, \quad z_N = 0 \tag{6}$$

дается формулой

$$z_i = \sum_{k=1}^{N-1} G_{ik}\varphi_k h. \tag{7}$$

Функция Грина G_{ik} удовлетворяет следующему условию «симметрии» $\mu_i G_{ik} = \mu_k G_{ki}$, где μ_i дается формулой (4). Для консервативного оператора $L_h^{(p,q)}$ $B_s^h = A_{s+1}^h$, $\mu_i = 1$, и мы получаем условие симметрии $G_{ik} = G_{ki}$.

Лемма 1. *Если коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ из класса Q_0 удовлетворяют условиям* (2), *а $L_h^{(p,q)}$ — исходная разностная схема вида* (3), *то разностная функция Грина G_{ik}, определяемая условиями* (5), *и ее первые разностные отношения*

$$(G_{i,k+1} - G_{i,k})/h \quad (0 \leqslant i \leqslant N,\ 0 \leqslant k \leqslant N-1);$$
$$(G_{i+1,k} - G_{i,k})/h \quad (0 \leqslant i \leqslant N-1,\ 0 \leqslant k \leqslant N)$$

ограничены по абсолютной величине постоянной, зависящей только от K_1, K_2.

п. 4. При решении разностных краевых задач может оказаться, что коэффициенты разностных уравнений по тем или иным причинам определяются неточно. Однако желательно, чтобы при малом искажении коэффициентов решение задачи менялось мало.

Пусть y_i и $\tilde{y}_i$ — решения разностных краевых задач

$$L_h^{(p,q,f)}y_i = 0, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \tag{8}$$

$$\tilde{L}_h^{(p,q,f)}\tilde{y}_i = 0, \quad \tilde{y}_0 = \mu_1, \quad \tilde{y}_N = \mu_2,$$
$$\tilde{L}_h^{(p,q,f)}\tilde{y}_i = h^{-2}(\Delta y_i \mid \tilde{B}_i^h - \nabla y_i \mid \tilde{A}_i^h) - \tilde{D}_i^h y_i + \tilde{F}_i^h. \tag{9}$$

При этом коэффициенты уравнения искажаются либо за счет искажения коэффициентов дифференциального уравнения, либо за счет неточности вычисления функционалов A^h, B^h, D^h и F^h, либо, наконец, в результате обеих указанных причин.

Будем говорить, что разностная схема (3) удовлетворяет принципу ко-устойчивости, если из условий

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{A}_i^h - A_i^h| h = \rho(h), && \sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{B}_i^h - B_i^h| h = \rho(h), \\ &\sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{D}_i^h - D_i^h| h = \rho(h), && \sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{F}_i^h - F_i^h| h = \rho(h), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$, следует сходимость решения $\tilde{y}_i$ разностной краевой задачи (9) к решению $u(x)$ задачи (1), т. е.

$$|\tilde{y}_i - u(x_i)| \leqslant \rho_0(h) \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{11}$$

Отсюда, в частности, следует, что для ко-устойчивой схемы $|y_i - u(x_i)| \leqslant \rho_1(h)$, $|y_i - \widetilde{y}_i| \leqslant \rho_2(h)$, где $\rho_1(h)$, $\rho_2(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Если в условиях (10) и (11) заменить

$$\rho(h) = O(h^n), \quad \rho_0(h) = O(h^n), \tag{12}$$

то мы получим принцип ко-устойчивости n-го ранга.

п. 5. Формулируем необходимое условие ко-устойчивости.

Пусть $p(x)$ имеет разрыв в точке $\xi = x_n + \theta h$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $x_n = nh$, так что $p_л = p(\xi - 0) \neq p_п = p(\xi + 0)$. Введем функцию $\widetilde{p}(x, h)$, совпадающую с $p(x)$ всюду, кроме интервалов (x_n, x_{n+1}) и (x_{n+1}, x_{n+2}). Тогда для ко-устойчивости схемы $L_h^{(p,q,f)}$ вида (3) необходимо выполнение условия

$$\widetilde{B}_n^h \widetilde{B}_{n+1}^h \widetilde{B}_{n+2}^h / p_п - \widetilde{A}_n^h \widetilde{A}_{n+1}^h \widetilde{A}_{n+2}^h / p_л = \rho(h) \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{13}$$

Нетрудно заметить, что необходимое условие сходимости в классе разрывных коэффициентов, полученное ранее в работах ([3], [4]), является следствием необходимого условия ко-устойчивости (13) (при $\widetilde{p} \equiv p$).

п. 6. Лемма 2. *Любая консервативная схема* $L_h^{(p,q,f)}$ *из исходного семейства схем удовлетворяют необходимому условию ко-устойчивости* (13).

Лемма 3. *Пусть* y_i, $\widetilde{y}_i$ — *решения краевых задач*

$$L_h y_i = 0, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2; \qquad \widetilde{L}_h \widetilde{y}_i = 0, \quad \widetilde{y}_0 = \mu_1, \quad \widetilde{y}_N = \mu_2,$$

где L_h, $\widetilde{L}_h$ — *консервативные разностные операторы вида* (3′), *коэффициенты которых удовлетворяют условиям*

$$0 < K_1 \leqslant A_i^h \leqslant K_2, \quad 0 \leqslant D_i^h \leqslant K_2, \quad |F_i^h| \leqslant K_2. \tag{2′}$$

Тогда имеет место неравенство

$$\|y_i - \widetilde{y}_i\|_{(0 \leqslant i \leqslant N)} \leqslant C \left\{ \sum_{k=1}^{N} |\widetilde{A}_k^h - A_k^h| h + \sum_{k=1}^{N-1} |\widetilde{D}_k^h - D_k^h| h + \sum_{k=1}^{N-1} |\widetilde{F}_k^h - F_k^h| h \right\}, \tag{14}$$

где C — *постоянная, зависящая только от* K_1 *и* K_2.

Аналогичная лемма имеет место для задачи (1).

Выбирая в качестве $\widetilde{L}_h$ точную схему $\widetilde{L}_h^{(p,q,f)}$ (см. ([2])), а в качестве L_h — консервативную схему $L_h^{(p,q,f)}$ из исходного семейства схем и опираясь на лемму 3, нетрудно доказать теорему (ср. с ([1])).

Теорема 1. *Если консервативная схема* $L_h^{(p,q,f)}$ *из исходного семейства имеет в некотором классе* C_{m_k, m_q, m_f} *n-й интегральный порядок точности, то она имеет этот же n-й порядок точности для коэффициентов из класса* $C_{n-1}^{(1)}$ *, *т. е. для* $p \in C_{n-1}^{(1)}$, $q \in C_{n-1}^{(1)}$, $f \in C_{n-1}^{(1)}$.

п. 7. Рассмотрим теперь каноническую схему (см. ([1]))

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = h^{-2} [\Delta y_i / B_i - \nabla y_i / A_i] - D_i y_i + F_i, \tag{15}$$

функционалы которой не зависят от h_3, и потребуем, чтобы она удовлетворяла необходимому условию (13).

Теорема 2. *Если каноническая разностная схема* (15) *из исходного семейства схем удовлетворяет необходимому условию ко-устойчивости* (13), *то она консервативна, т. е.* $B_i = A_{i+1}$ *или* $B[\psi(s)] = A[\psi(1+s)]$.

---

* C_m^{γ} $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$ — класс функций, имеющих на отрезке [0,1] непрерывно производную m-го порядка, удовлетворяющую условию Гельдера порядка γ.

Опираясь на теорему 2 и леммы 2 и 3, можно убедиться в том, что:

Теорема 3. *Любая однородная консервативная схема из исходного семейства схем удовлетворяет принципу ко-устойчивости.*

В результате приходим к следующей основной теореме

Теорема 4. *Необходимым и достаточным условием ко-устойчивости канонической схемы $L_h^{(p,q,f)}$ является ее консервативность.*

Теорема 5. *Любая консервативная схема $L_h^{(p,q,f)}$ имеет 1-й интегральный порядок точности в классе Q_0^1 *.*

п. 8. Потребуем теперь, чтобы разностная схема $L_h^{(p,q,f)}$ удовлетворяла необходимым условиям ко-устойчивости 2-го ранга.

Теорема 6. *Существует единственная каноническая схема («наилучшая консервативная схема»), имеющая 2-й интегральный порядок точности в $Q_1^{(1)}$ и удовлетворяющая принципу ко-устойчивости 2-го ранга; эта схема $L_h^{(p,q,f)}$ консервативна и определяется при помощи функционалов*

$$A[\psi] = \int_{-1}^{0} \psi(s)\,ds, \quad D[\psi] = F[\psi] = \int_{-0,5}^{0,5} \psi(s)\,ds. \tag{16}$$

Заметим, что при доказательстве этой теоремы используется, в частности, лемма 1.

п. 9. Заменяя интеграл, определяющий $A[\psi]$ в формуле (16), схемой по какой-нибудь квадратурной формуле, мы получим вместо наилучшей канонической схемы $L_h^{(p)}$ неканоническую схему

$$\widetilde{L}_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2} \Delta(\nabla y_i / \widetilde{A}_i^h), \quad \text{где} \quad \widetilde{A}_i^h = \widetilde{A}^{h_1}[p(x_i + sh)],$$

$$\widetilde{A}^{h_1}[\psi(s)] = \sum_{j=1}^{J} a_j \psi(s_j), \quad s_j = -1 + jh_1, \quad h_1 = 1/J.$$

Теорема 7. *Для того чтобы определенная выше неканоническая схема $\widetilde{L}_h^{(p)}$ имела второй интегральный порядок точности в классе $Q_1^{(1)}$, необходимо и достаточно, чтобы $h_1/h = O(1)$ при $h \to 0$ $(N \to \infty)$.*

Аналогичная теорема имеет место и для схемы $\widetilde{L}_h^{(p,q,f)} y_i = \widetilde{L}_h^{(p)} y_i - \widetilde{D}_i^h y_i + \widetilde{F}_i^h$, функционалы $\widetilde{D}^{h_1}$ и $\widetilde{F}^{h_1}$ которой вычисляются по аналогии с функционалом $\widetilde{A}^{h_1}$.

п. 10. В работе ([1]) мы рассматриваем асимптотическое разложение для решения разностной краевой задачи в случае непрерывных коэффициентов. Если $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — функции из класса $Q_2^{(0)}$, а $L_h^{(p,q,f)}$ — наилучшая каноническая схема, то решение задачи (8) можно представить в виде

$$y_i = u(x_i) + h^2 Y(x_i, h) + O(h^4),$$

где $Y(x, h) = O(1)$ и представляет собой функцию, не имеющую предела при $h \to 0$. Отсюда следует, что в случае разрывных коэффициентов решение разностной краевой задачи (8) не имеет при $h \to 0$ асимптотики 2-го порядка.

Поступило
31 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, **131**, № 4 (1960). [2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, **131**, № 3 (1960). [3] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, **108**, № 3 (1956). [4] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, **122**, № 4 (1959).

* Q_m^γ $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$ — класс функций, имеющих на $[0,1]$ m кусочно-непрерывных производных, причем m-я производная удовлетворяет в интервалах ее непрерывности условию Гельдера порядка γ.