АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИМ ЯДРОМ *

Член-корреспондент АН СССР А.Н. ТИХОНОВ и

А.А. САМАРСКИЙ

1. Настоящая работа посвящена асимптотике интегралов вида

$$I[h, x_0; f] = \frac{1}{h}\int_a^b \omega\left(\frac{x-x_0}{h}\right) f(x)\,dx, \tag{1}$$

где h – малый параметр $(h > 0)$, $a < x_0 < b$.

При этом предполагается, что ядро $\omega(\xi)$ медленно убывает на бесконечности, а именно, допускает при $\xi \to \pm\infty$ разложение

$$\begin{aligned} \omega(\xi) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k^+}{\xi^k} + \omega_n^+(\xi); \qquad \omega_n^+(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^{n+1}}\right); \qquad \text{при } \xi \to \infty; \\ \omega(\xi) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k^-}{\xi^k} + \omega_n^-(\xi); \qquad \omega_n^-(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^{n+1}}\right); \qquad \text{при } \xi \to -\infty, \end{aligned} \tag{2}$$

где $O(\alpha)$ – величина порядка α при $\alpha \to 0$. Пределы

$$q_1^+ = \lim_{\xi\to\infty} \xi\omega(\xi), \qquad q_1^- = \lim_{\xi\to-\infty} \xi\omega(\xi),$$

вообще говоря, различны, $q_1^+ \neq q_1^-$. Поэтому интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi)\,d\xi$, вообще говоря, не существует даже в смысле главного значения.

Простейшим примером может служить интеграл

$$I = \int_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(x-x_0)^2 + h^2}}$$

с ядром

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \qquad (q_1^+ = 1,\ q_1^- = -1).$$

В дальнейшем мы пользуемся следующими обозначениями: $f^{(k)}(x_0)$ – значение k-ой производной в точке $x = x_0$;

$$f_k = f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0) - \ldots - \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

*ДАН СССР, т. 126, № 1, 1960, с. 26-29.

– остаточный член в формуле Тейлора;

$$\Omega_k(\xi) = \xi^k \omega_k(\xi) = \begin{cases} \xi^k \omega_k^+ & \text{при } \xi > 0; \\ \xi^k \omega_k^- & \text{при } \xi < 0; \end{cases}$$

$$\overline{\Omega}_k(\xi) = \xi^k \omega_{k+1}(\xi).$$

Функция $\overline{\Omega}_k(\xi)$ при $\xi \to \pm\infty$ имеет второй порядок малости $\left(\overline{\Omega}_k = O\left(\frac{1}{\xi^2}\right)\right)$ и абсолютно интегрируема по любому бесконечному промежутку (c, ∞) или $(-\infty, -c)$, где $c > 0$.

2. Основное содержание работы выражает следующая теорема.

Теорема. *Для интеграла* (1) *имеет место асимптотическое при* $h \to 0$ *разложение*

$$I = \sum_{k=0}^{n} (\widehat{I}_k \ln h + I_k) h^k + h^n \rho(h), \qquad \rho(h) \to 0, \qquad \textit{при } h \to 0, \quad (3)$$

где

$$\widehat{I}_k = -(q_{k+1}^+ - q_{k+1}^-) \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}; \quad (4)$$

$$I_k = [C_k + q_{k+1}^+ \ln(b - x_0) - q_{k+1}^- \ln(x_0 - a)] \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + q_{k+1}^+ \int_{x_0}^{b} \frac{f_k(x)\,dx}{(x - x_0)^{k+1}} +$$

$$+ q_{k+1}^- \int_{a}^{x_0} \frac{f_k(x)\,dx}{(x - x_0)^{k+1}} - \sum_{s=0}^{k-1} \frac{f^{(s)}(x_0)}{s!(k - s)} \left[\frac{q_{k+1}^+}{(b - x_0)^{k-s}} - \frac{q_{k+1}^-}{(x_0 - a)^{k-1}} \right]; \quad (5)$$

$$C_k = \int_{-1}^{1} \Omega_k(\xi)\,d\xi + \int_{1}^{\infty} [\overline{\Omega}_1^+(\xi) + \overline{\Omega}_k^-(-\xi)]\,d\xi, \quad (6)$$

если выполнены условия:

1) *функция* $f(x)$ *ограничена в* (a, b) $(|f(x)| < M)$ *и имеет в точке* $x = x_0$, $a < x_0 < b$, *дифференциал* $(n+1)$*-ого порядка*;

2) *функция* $\omega(\xi)$ *абсолютно интегрирума на любом конечном интервале и допускает при* $\xi \to \pm\infty$ *представления* (2).

Замечание. Если $k = 0$, то в формуле (5) последнее слагаемое, очевидно, отсутствует.

Рассмотрим ряд частных случаев.

3. Члены, содержащие $h^k \ln h$, в формуле (3) появляются только в том случае, когда $q_{k+1}^+ \neq q_{k+1}^-$. Если же все $q_k^+ = q_k^- = q_k$ $(k = 1, 2, \dots)$, т. е. все $\widehat{I_k} = 0$, то разложение I идет по целым степеням и коэффициент I_k может быть записан в виде

$$I_k = a_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + q_{k+1} \overline{\int_a^b \frac{f_{k-1}(x)}{(x-x_0)^{k+1}}\, dx} -$$

$$- q_{k+1} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{f^{(s)}(x_0)}{s!(k-s)} \left[\frac{1}{(b-x_0)^{(k-s)}} - \frac{1}{(a-x_0)^{k-s}} \right], \tag{7}$$

$$a_k = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_k(\xi)\, d\xi} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \xi^k \omega_k(\xi)\, d\xi}.$$

Черта сверху означает, что интеграл понимается в смысле главного значения. В частности, при $k = 0$ имеем

$$I_0 = a_0 f(x_0) + q_1 \overline{\int_a^b \frac{f(x)\, dx}{x - x_0}}, \qquad a_0 = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi)\, d\xi}.$$

Если же кроме того, $q_1 = 0$ $(q_1^+ = q_1^- = 0)$, то

$$I_0 = a_0 f(x_0)$$

и, следовательно,

$$\lim_{h \to 0} I = a_0 f(x_0), \qquad a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi)\, d\xi, \tag{8}$$

т.е. в этом случае ядро $\frac{1}{h}\omega\left(\frac{x - x_0}{h}\right)$ при $h \to 0$ имеет характер δ-функции, нормированной к a_0.

4. Остановимся подробнее на случае $q_1 = 0$.

Если $a = -\infty$, $b = \infty$, то выражение для I_k упрощается:

$$I_k = a_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + q_{k+1} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{k-1}(x)\, dx}{(x-x_0)^{k+1}}}, \tag{9}$$

$$I = \sum_{k=0}^{n} I_k h^k + h^n \rho(h), \qquad \text{где } \rho(h) \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{10}$$

Если, кроме того, все $q_k = 0$, то

$$I_k = \overline{a}_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \overline{a}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^k \omega(\xi)\, d\xi = a_k \quad (\omega_k(\xi) = \omega(\xi)). \tag{11}$$

Это соответствует тому случаею, когда при $\xi = \pm\infty$ $\dfrac{d^k\omega}{d(1/\xi)^k} = 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким свойством обладает, например, ядро интеграла Пуассона для уравнения теплопроводности, равное

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}.$$

В этом случае (если все $q_k = 0$) разложение I в ряд по степеням h может быть получено элементарно, так как все моменты $\overline{a}_k$ функции $\omega(\xi)$ существуют.

Производя замену переменных $\xi = (x - x_0)/h$ и разлагая $f(x_0 + \xi h)$ в ряд Тейлора, сразу получим

$$I[h, x_0; f] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) f(x_0 + \xi h)\, d\xi =$$

$$= \overline{a}_0 f(x_0) + \overline{a}_1 f'(x_0) h + \ldots + \overline{a}_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \ldots, \tag{12}$$

где

$$\overline{a}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^k \omega(\xi)\, d\xi.$$

Если функция $\omega(\xi)$ четная, то все моменты нечетного порядка $\overline{a}_{2n+1} = 0$ равны нулю и разложение только по четным степеням h.

Однако этот прием получения разложения невозможен, например, для функции

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2}, \tag{13}$$

которая является ядром интеграла Пуассона, дающего решение задачи Дирихле для полуплоскости $y = h \leqslant 0$:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f'(x)\, dx'}{(x - x')^2 + y^2}.$$

Нетрудно заметить, что для функции (13) моменты $\overline{a}_k$ не существуют уже для $k \geqslant 2$, и поэтому разложение вида (12) невозможно. Между тем, в силу нашей основной теоремы из п. 2, функция $u(x, y)$ имеет следующее асимптотическое представление

$$u(x, y) = f(x) + y I_1(x) + y^2 I_2(x) + \ldots,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(x')}{(x - x')^2}\, dx'}, \qquad I_2 = -\frac{f''(x)}{2}, \quad \ldots$$

При этом мы используем разложение

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\xi^{2(n+1)}}, \qquad q_{2n+1} = 0, \qquad q_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{\pi}.$$

В заключение отметим, что применяемый нами метод асимптотического разложения при $h \to 0$ допускает естественное обобщение как на случай ядер

$$\omega = \omega\left(\frac{x - x_0}{h}, x\right),$$

непосредственно зависящих от x, так и на случай многих переменных.