1959 г. май—июнь т. XIV, вып. 3 (87)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

ЗАСЕДАНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 16 декабря 1958 г.

1. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский «О наилучших разностных схемах» (доклад прочитал А. Н. Тихонов).

1°. Различные конечно-разностные методы, пригодные для решения определенного типа дифференциальных уравнений, могут различаться как по порядку их точности, так и по области применимости в зависимости от класса коэффициентов этих уравнений. Автоматизация вычислений, связанная с использованием быстродействующих счетных машин, настоятельно требует развития алгоритмов решения не отдельных задач, а классов задач. Так, например, желательно, чтобы одна и та же разностная схема позволяла решать задачи для дифференциальных уравнений как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов, не прибегая к явному выделению точек или линий разрыва. Это приводит нас к так называемым однородным разностным схемам, вычислительный алгоритм которых один и тот же для всех точек разностной сетки и для любых коэффициентов из данного класса (см. [1]—[4]). При этом может оказаться, что разностные схемы, сходящиеся в некотором классе коэффициентов, будут давать расходящийся результат в более широком классе коэффициентов. Например, разностная схема

$$L_h^{(k)} u_i = k_i \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \tag{1}$$

соответствующая дифференциальному оператору $L^{(k)} u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right]$, имеет второй порядок точности в классе достаточно гладких коэффициентов, но расходится при $h \to 0$ в классе разрывных коэффициентов $k(x) \in Q_m$.

2°. Пусть $Lu(x) = 0$ $(0 < x < 1)$ — дифференциальное уравнение, а $L_h y_i = 0$ — соответствующие разностные уравнения на сетке

$$S_N = \left(x_0 = 0,\ x_1 = h,\ \ldots,\ x_N = Nh = 1;\ h = \frac{1}{N}\right).$$

Если L и L_h — линейные операторы, то

$$L_h y_i = \sum_j a_{ij} y_j = 0.$$

Рассмотрим класс дифференциальных уравнений $L^{(k)} u = 0$, определяемый коэффициентами $k(x) = \{k_1(x), \ldots, k_n(x)\}$ из некоторого функционального пространства $\mathscr{K}$ (это может быть, например, пространство Q_m функций, кусочно-непрерывных и имеющих m кусочно-непрерывных производных и др.). Разностный оператор $L_h^{(k)}$, определенный для всех $k(x) \in \mathscr{K}$, мы будем называть разностной схемой в классе функций $\mathscr{K}$.

Для линейных уравнений разностная схема $L_h^{(k)}$ определяется заданием матрицы-функционала (a_{ij}^h), элементы которой являются функционалами над пространством $\mathscr{K}$ коэффициентов $k(x)$.

3°. Вводятся понятия однородности и симметрии схемы.

1) Схема $L_h^{(k)}$ однородна, если она представляет единый во всех точках i сетки S_N и для любых $k(x)\in\mathscr{K}$ вычислительный алгоритм:

$$a_{ij}^h[k]=a_{j-i}^h[\bar{k}(s)],\quad \bar{k}(s)=k(x_i+sh),\quad -n_1\leqslant j-i\leqslant n_2,\ n_1\geqslant 0,\ n_2\geqslant 0.$$

2) Однородная схема $L_h^{(k)}$ симметрична, если

$$n_1=n_2,\quad a_{j-i}^h[k(x_i+sh)]=a_{i-j}^h[k(x_i-sh)].$$

При этом разностный оператор L_h не меняется при изменении направления оси x. Кроме того, естественно требовать, чтобы разностная задача была определенной, т. е. разрешимой на любой сетке S_N и для любого $k(x)\in\mathscr{K}$ (см. [1]).

4°. Порядок апроксимации оператора L_h относительно L характеризуется разностью $\varphi_i^h=L_hu_i-(Lu)_i$.

Мы будем говорить, что разностная схема $L_h^{(k)}y_i$ сходится в классе $\mathscr{K}$, если для $k(x)\in\mathscr{K}$ решение уравнения $L_hy_i=0$ сходится на любой последовательности сеток S_N при $h\to 0$ к соответствующему решению $u(x)$ дифференциального уравнения $L^{(k)}u=0$. Если $\max\limits_{(i)}|y_i-u(x_i)|<Ch^n$, то мы говорим, что разностная схема $L_h^{(k)}$ имеет n-й (интегральный) порядок точности.

Ставится задача отыскания наилучших однородных схем, сходящихся в наиболее широком классе коэффициентов и обладающих там наивысшей точностью.

5°. Рассматривается первая краевая задача для класса уравнений

$$\left.\begin{aligned}&L^{(k,q,f)}u=[k(x)u'(x)]'-q(x)u+f(x)=0\qquad(0<x<1),\\&u(0)=\bar{u},\quad u(1)=\bar{\bar{u}}\quad(k(x)\geqslant k_0>0,\quad q(x)\geqslant 0)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

в классе коэффициентов

$$Q_{m_k,m_q,m_f}^{(k,q,f)}=\{Q_{m_k}(k),\ Q_{m_q}(q),\ Q_{m_f}(f)\}.$$

Соответствующие однородные разностные схемы берутся в виде

$$L_h^{(k,q,f)}y_i=\frac{1}{h^2}[B_i^h(y_{i+1}-y_i)-A_i^h(y_i-y_{i-1})]-D_i^hy_i+F_i^h,\tag{3}$$

где

$$A_i^h=A^h[\bar{k}(s)],\quad B_i^h=B^h[\bar{k}(s)],\quad \bar{k}(s)=k(x_i+sh),\quad -1<s<1,$$

$$D_i^h=D^h[q(x_i+sh)],\quad F_i^h=F^h[f(x_i+sh)],\quad -\frac{1}{2}<s<\frac{1}{2},$$

$A^h[\bar{k}(s)]$, $B^h[\bar{k}]$, $D^h[\bar{q}]$, $F^h[\bar{f}]$ — функционалы, определенные над $Q_{m_k},\ m_q,\ m_f$.

Устанавливается необходимое условие сходимости и второго порядка точности схемы $L_h^{(k,q,f)}$ в классе кусочно-непрерывных коэффициентов.

Пусть $\xi=x_n+\theta h$ $(0\leqslant\theta\leqslant 1,\ x_n=nh)$ — точка разрыва коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$.

Необходимое условие сходимости имеет вид

$$\Delta_n=(A_{n+1}^h\varphi_n^h+B_n^h\varphi_{n+1}^h)h=\rho(h)\to 0\quad\text{при}\quad h\to 0\tag{4}$$

или

$$\frac{B_n^hB_{n+1}^h}{k_{\text{п}}}-\frac{A_n^hA_{n+1}^h}{k_{\text{л}}}=\rho(h),\quad k_{\text{л}}=k(\xi-0),\quad k_{\text{п}}=k(\xi+0).\tag{5}$$

Необходимые условия второго порядка точности для схемы $L_h^{(k,\,q,\,f)}$ имеют вид:

$$\varphi_n^h = O(1), \qquad \Delta_n = O(h^2). \tag{6}$$

Заметим, что для схемы (1) $\Delta_n = O(1)$, т. е. эта схема не удовлетворяет необходимому условию сходимости в классе $O_m(k)$.

Функционалы A, B, D и F могут быть, например, линейными. При этом оказалось необходимым обобщить теорему Рисса о представлении линейных функционалов в классе непрерывных функций на случай кусочно-непрерывных функций $f(x) \in Q_m$ (см. [5]).

Среди нормальных разностных схем (3) найден класс схем, удовлетворяющих необходимому условию сходимости (квазиконсервативные схемы). Всякая консервативная ($B_i = A_{i+1}$) схема также удовлетворяет условию (4).

6°. Рассматривается однородная симметричная разностная схема

$$L_h^{(k)}\, y_i = \frac{1}{h^2}\,[B_i^h\,(y_{i+1} - y_i) - A_i^h\,(y_i - y_{i-1})], \tag{7}$$

соответствующая уравнению $L^{(k)}u = [k(x)\,u'(x)]' = 0$. Здесь $A_i^h = \Phi\,(l_1\,[\varphi\,(k\,(x_i + sh))]$, $B_i^h = \Psi\,(l_2\,[\psi\,(k\,(x_i + sh))])$, а $l_1\,[f(s)]$ и $l_2\,[f(s)]$ — нормальные (т. е. линейные, регулярные, положительные ($l\,[f] > 0$ при $f \geqslant \varepsilon > 0$) и независимые от h (см. [4])) функционалы для $-1 < s < 1$. Функции φ, ψ, Φ и Ψ имеют производные второго порядка, удовлетворяющие условию Липшица.

Теорема 1. *Если разностная схема вида* (7) *имеет в классе* $Q_m(k)$, $m \geqslant 3$, *второй порядок точности, то она определена однозначно*:

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2}\,\Delta\,(A_i \nabla y_i) = \frac{1}{h^2}\,[A_{i+1}\,(y_{i+1} - y_i) - A_i\,(y_i - y_{i-1})], \tag{8}$$

$$A_i = \frac{1}{\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}} \qquad (B_i = A_{i+1}) \quad \text{(см. [4])}. \tag{9}$$

Эта схема не только может иметь, но и в самом деле имеет второй порядок точности в $Q_m(k)$, $m \geqslant 3$ (см. п. 7).

7°. Рассмотрим однородную схему

$$L_h^{(k,\,q,\,f)}\; y_i = L_h^{(k)}\; y_i - D_i^h y_i + F_i^h, \tag{10}$$

где $L_h^{(k)} y_i$ есть схема (8), а $D\,[\bar{q}]$ и $F\,[\bar{f}]$ — нормальные симметричные ($F\,[\bar{f}\,(-s)] = F\,[\bar{f}\,(s)]$) функционалы, определенные для $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$.

Теорема 2. *Если разностная схема вида* (10) *имеет в классе* $Q_{m_k,\,m_q,\,m_f}(k, q, f)$ *второй порядок точности, то она определена однозначно*

$$L_h^{(k,\,q,\,f)}\quad y_i = \frac{1}{h^2}\,\Delta\,(A_i \nabla y_i) - \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)\,dx \cdot y_i + \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)\,dx, \tag{11}$$

где

$$A_i = \left[\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}, \qquad x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{1}{2}\,h.$$

Теорема 3. *Разностная схема* (11) *имеет в классе* $Q_{m_k,\,m_q,\,m_f}$ *для* $m_k \geqslant 3$, $m_q \geqslant 2$, $m_f \geqslant 2$ *второй порядок точности, т. е. является наилучшей схемой* (см. [4]).

8°. Применение наилучшей разностной схемы для решения задачи Штурма—Лиувилля позволяет определять собственные значения и собственные функции с точностью до второго порядка относительно h в классе разрывных коэффициентов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами, ДАН **108**, № 3 (1956).

[2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Об однородных разностных схемах, ДАН **122**, № 4 (1958).

[3] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Об одной наилучшей разностной схеме, ДАН **124**, № 4 (1959).

[4] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов, ДАН **124**, № 3 (1959).

[5] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, О представлении линейных функционалов в классе разрывных функций, ДАН **122**, № 2 (1958).

2. А. Б. Васильева «Асимптотическое разложение для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных».

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\mu\frac{dz}{dt}=F(z,\ y,\ t),\\ &\frac{dy}{dt}=f(z,\ y,\ t),\\ &z\,|_{t=t^0}=z^0,\qquad y\,|_{t=t^0}=y^0,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где $\mu\geqslant 0$ — малый параметр. Задача о предельном переходе при $\mu\to 0$ для решения $z(t,\ \mu)$, $y(t,\ \mu)$ системы (1) хорошо изучена. Пусть $z=\varphi(y,\ t)$ — одно из решений уравнения $F(z,\ y,\ t)=0$, причем $\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(y,\ t),\ y,\ t)<0$ в некоторой замкнутой области D изменения $y,\ t$. Тогда, если начальная точка z^0, y^0, t^0 удовлетворяет условию $F(z,\ y^0,\ t^0)(z-\varphi(y^0,\ t^0))<0$ при $z_0 \gtreqless z \gtrless \varphi(y^0,\ t^0)$, то имеют место предельные равенства

$$\lim_{\mu\to 0} y(t,\ \mu)=\bar y(t)\qquad t^0\leqslant t\leqslant T,\tag{2}$$

$$\lim_{\mu\to 0} z(t,\ \mu)=\bar z(t)\qquad t^0< t\leqslant T,\tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\bar z=\varphi(\bar y,\ t),\\ &\frac{d\bar y}{dt}=f(\bar z,\ \bar y,\ t),\\ &\bar y\,|_{t=t^0}=y^0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

T — некоторая конечная величина, зависящая от расположения интегральной кривой $y=\bar y(t)$ в области D). Предельный переход (2) является равномерным относительно t на $t^0\leqslant t\leqslant T$ и функция $\bar y(t)$ может служить равномерным приближением для $y(t,\ \mu)$; предельный переход (3) этим свойством не обладает, так как, вообще говоря, $z^0\neq\varphi(y^0,\ t^0)$.

Чтобы построить равномерное приближение для $y(t,\ \mu)$, $z(t,\ \mu)$ с точностью $O(\mu^{n+1})$, определим две системы вспомогательных функций. Первая система z_0, y_0; z_1, y_1; ...; z_n, y_n определяется путем следующей операции: перейдем в (1) к переменному $\tau=\frac{t-t^0}{\mu}$, в полученную систему уравнений подставим z и y в виде формальных рядов

$$z=z_0(\tau)+\mu z_1(\tau)+\ldots,\qquad y=y_0(\tau)+\mu y_1(\tau)+\ldots,$$

приравнивая в обеих частях коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим уравнения для последовательного определения z_0, y_0; z_1, y_1 и т. д.; начальные условия зададим в виде

$$z_0|_{\tau=0}=z^0, \qquad y_0|_{\tau=0}=y^0, \qquad z_i|_{\tau=0}=y_i|_{\tau=0}=0 \qquad (i>0).$$

Вторая система вспомогательных функций

$$\bar{z}, \ \bar{y}; \ \bar{z}_\mu, \ \bar{y}_\mu; \ \ldots; \ \bar{z}_{\mu^n}, \ \bar{y}_{\mu^n}$$

определяется в результате подстановки в (1) z и y в виде формальных рядов

$$z=\bar{z}(t)+\mu\bar{z}_\mu(t)+\frac{\mu^2}{2}\bar{z}_{\mu^2}(t)+\ldots,$$

$y=\bar{y}(t)+\mu\bar{y}_\mu(t)+\frac{\mu^2}{2}\bar{y}_{\mu^2}(t)+\ldots$ и последующего приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ (отметим, что соответствующая система для $\bar{z}$, $\bar{y}$ есть (4)); для любой пары $\bar{y}_{\mu^k}$, $\bar{z}_{\mu^k}$ получается, таким образом, система, состоящая из одного алгебраического и одного дифференциального уравнения; начальные условия для этой системы зададим в виде

$$\bar{y}_{\mu^k}|_{t=t^0}=(-1)^k\int_0^\infty \tau^k f_{k-1}^{(k)}(\tau)\,d\tau,$$

где f_{k-1} — коэффициент номера $k-1$ в разложении $f(z_0(\tau)+\ldots, y_0(\tau)+\ldots, \mu\tau)$. Вспомогательные функции $\bar{z}_{\mu^k}$, $\bar{y}_{\mu^k}$ обладают свойством [1]

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\mu\to0} z_{\mu^k}(t, \mu)&=\bar{z}_{\mu^k},\\ \lim_{\mu\to0} y_{\mu^k}(t, \mu)&=\bar{y}_{\mu^k},\end{aligned}\right\} \quad t^0<t\leqslant T.$$

Построим теперь выражения

$$\left.\begin{aligned}Z_n&=z_0+\ldots+\mu^n z_n+\bar{z}+\ldots+\frac{\mu^n}{n!}\bar{z}_{\mu^n}-\Big(\bar{z}(t^0)+(t-t^0)\bar{z}'(t^0)+\mu\bar{z}_\mu(t^0)+\ldots\\ &\qquad\ldots+\frac{(t-t^0)^n}{n!}\bar{z}^{(n)}(t^0)+\ldots+\frac{\mu^n}{n!}\bar{z}_{\mu^n}(t^0)\Big),\\ Y_n&=y_0+\ldots+\mu^n y_n+\bar{y}+\ldots+\frac{\mu^n}{n!}\bar{y}_{\mu^n}-\Big(\bar{y}(t^0)+(t-t^0)\bar{y}'(t^0)+\mu z_\mu(t^0)+\ldots\\ &\qquad\ldots+\frac{(t-t^0)^n}{n!}\bar{z}^{(n)}(t^0)+\ldots+\frac{\mu^n}{n!}\bar{z}_{\mu^n}(t^0)\Big).\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Эти выражения представляют собой асимптотические формулы для $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ порядка n, так что

$$|z(t, \mu)-Z_n|<C\mu^{n+1}, \quad |y(t, \mu)-Y_n|<C\mu^{n+1},$$

где C не зависит от t и μ для $\mu\leqslant\mu_0$, $t^0\leqslant t\leqslant T$ (см. [1]).

Аналогичный результат имеет место также в случае, если в (1) z и y — векторы.

Выражения (5) можно использовать как приближенное решение задачи Коши для (1), но их можно также применять для построения приближенного решения краевых задач и задач на собственные значения [2], [3]. С этой целью формулы (5) надо модифицировать для случая начальных значений

$$z^0=z_0^0+\mu z_1^0+\ldots+\mu^n z_n^0, \qquad y^0=y_0^0+\mu y_1^0+\ldots+\mu^n y_n^0$$

и затем выбрать неопределенные параметры z_0^0, y_0^0, ... таким образом, чтобы удовлетворить краевым условиям с заданной степенью точности. Метод дает возможность не только строить приближенное решение краевой задачи, но и доказывать существование и в известном смысле единственность. Метод, в частности, дает возможность и исследовать не описанный прежде в литературе случай, когда решение краевой задачи в пределе представляет собой кривую с угловой точкой (простейший пример $\mu\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-1$, $y(0)=y(1)=0$) (см. [3]).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Васильева, О многократном дифференцировании по параметру решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, ДАН 119, №1 (1958).

[2] А. Б. Васильева, Асимптотика решений некоторых краевых задач для квазилинейных уравнений с малым параметром при старшей производной, ДАН 123, № 4 (1958).

[3] А. Б. Васильева, Равномерное приближение к решению системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производной и приложение к краевым задачам, ДАН 124, № 3 (1959).

Заседание 23 декабря 1958 г.

1. С. Рувка (Польша) «Об одном классе топологических пространств и его приложениях к функциональному анализу».

2. Обсуждение результатов приемных экзаменов по математике в 1958 г. на механико-математическом и физическом факультетах Московского университета и в Московском физико-техническом институте.

После вступительного слова А. Г. Куроша с сообщениями выступили: Б. В. Шабат (механико-математический факультет МГУ), В. А. Ильин (физический факультет МГУ) и Л. Д. Кудрявцев (МФТИ). В обсуждении вопроса приняли участие: А. Н. Колмогоров, В. А. Ефремович, А. А. Ляпунов, П. Я. Дорф, С. В. Смирнов, Е. Б. Дынкин, А. Н. Тихонов, Р. Л. Добрушин, А. Г. Курош.

Заседание 30 декабря 1958 г.

1. И. И. Пятецкий-Шапиро «Геометрия однородных областей и теория автоморфных функций. Решение одной проблемы Э. Картана».

В теории автоморфных функций от одного переменного иногда удобнее рассматривать функции на верхней полуплоскости, чем в единичном круге.

В связи с этим представляют интерес аналоги верхних полуплоскостей в n-мерной комплексном пространстве. Мы будем их называть областями Зигеля.

Пусть V — выпуклый конус в n-мерном действительном пространстве, не содержащий целой прямой. $F(u, v)$ — функция от пары векторов u и v m-мерного комплексного пространства, значение которой есть n-мерный вектор. Вообще говоря, $n \neq m$.

$F(u, v)$ называется V-эрмитовой, если

1) $F(u, v) = \overline{F(v, u)}$;

2) $F(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda F(u_1, v) + \mu F(u_2, v)$, где λ и μ — любые комплексные числа;

3) $F(u, u) \in \overline{V}$ ($\overline{V}$ — замыкание конуса V);

4) $F(u, u) = 0$ только, если $u = 0$.

Областью Зигеля условимся называть совокупность H всех точек (z, u) $(n+m)$-мерного комплексного пространства, для которых

$$\operatorname{Im} z - F(u, u) \in V.$$

Имеют место следующие теоремы.

1°. *Всякая область Зигеля аналитически эквивалентна некоторой ограниченной области.*

2°. *Любая классическая симметрическая область может быть отображена на область Зигеля.*

Наибольший интерес представляют однородные области Зигеля, т. е. такие, что группа их аналитических автоморфизмов транзитивна. Существуют четыре серии аффинно-однородных выпуклых конусов. Мы дадим сейчас для каждой из этих серий конструкцию соответствующих однородных областей Зигеля и укажем, когда эти области являются симметрическими.

1) Пусть V — конус вещественных положительно определенных симметрических матриц Y порядка $p \geqslant 2$.

Пространство, в котором будут определены вектор-функции $F(u, v)$, описывается следующим образом. Пусть s — некоторое целое положительное число и $r(t)$ — неубывающая целочисленная функция на сегменте $[1, s]$, причем $r(1) > 0$, $r(s) \leqslant p$. Рассмотрим все прямоугольные матрицы $u = (u_{kt})$ из p строк и s столбцов такие, что $u_{kt} = 0$ при $k > r(t)$, u_{kt} — любые комплексные числа при $k \leqslant r(t)$. Матрицы указанного вида образуют комплексное аффинное пространство, размерность которого равна $\sum_{t=1}^{s} r(t)$.

Вектор-функция $F(u, v)$ в этом пространстве определяется формулой

$$F(u, v) = u\bar{v}' + \bar{v}u',$$

знак $'$ означает транспонирование.

Все построенные указанным способом области — несимметрические.

2) Пусть V — конус эрмитовых положительно определенных матриц порядка $p \geqslant 2$.

Пространство, в котором будут определены вектор-функции $F(u, v)$ описывается следующим образом.

Пусть s_1 и s_2 — целые неотрицательные числа, $r_1(t)$ и $r_2(t)$ — неубывающие положительные целочисленные функции, заданные на сегментах $[1, s_1]$ и $[1, s_2]$, причем $r_k(1) > 0$ при $s_k > 0$ и $r_k(s_k) \leqslant p$.

Пространство, в котором будет задана вектор-функция $F(u, v)$, состоит из пар $(u^{(1)}, u^{(2)})$, где $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ — прямоугольные матрицы порядков $p \times s_1$ и $p \times s_2$ соответственно, причем $u^{(i)}_{kt} = 0$ при $k > r_i(t)$ $(i = 1, 2)$, а остальные элементы матриц $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ могут быть любыми комплексными числами. Размерность пространства матриц указанного вида равна

$$\sum_{t=1}^{s} r_1(t) + \sum_{t=1}^{s_2} r_2(t).$$

Вектор-функцию $F(u, v)$ определим формулой

$$F(u, v) = u^{(1)}\bar{v}^{(1)\prime} + \bar{v}^{(2)}u^{(2)\prime}.$$

Построенные области симметрические тогда и только тогда, когда одно из чисел s_1 или s_2 равно нулю и $r_k(t) = p$ для $s_k \neq 0$.

3) Пусть V — конус эрмитовых положительно определенных матриц Y порядка p, удовлетворяющих условию

$$YI = I\bar{Y}, \qquad I = \begin{pmatrix} j & \cdot & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & j \end{pmatrix}, \qquad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пространство, в котором будут определены вектор-функции $F(u, v)$, описывается так же, как в п. 1.

Пусть s — некоторое целое положительное число и $r(t)$ — неубывающая целочисленная функция на сегменте $[1, s]$, $r(1) > 0$, $r(s) \leqslant 2p$.

Рассмотрим все прямоугольные матрицы $u = (u_{kt})$ из $2p$ строк и s столбцов такие, что $u_{kt} = 0$ при $k > r(t)$, и u — любые комплексные числа при $k \leqslant r(t)$.

Матрицы этого вида, очевидно, образуют комплексное аффинное пространство, размерность которого равна $\sum_{t=1}^{s} r(t)$.

Вектор-функция $F(u, v)$ определяется формулой

$$F(u, v) = u\bar{v}' + I\bar{v}uI'.$$

Эти области будут симметрическими только тогда, когда $s=1$, $r(1)=2p$.

4) Пусть V — конус в $(n+2)$-мерном действительном пространстве, заданный неравенствами.

$$y_1y_2 - y_3^2 - \ldots - y_{n+2}^2 > 0, \qquad y_1 > 0.$$

Обозначим через K вспомогательное N-мерное комплексное пространство, в котором введено скалярное произведение векторов с обычными свойствами.

Пусть $T_1, \ldots, T_n$ — система унитарных матриц порядка N со следующими свойствами:

$$T_kT_m^* + T_mT_k^* = 0 \quad \text{при} \quad m \neq k.$$

Построение такой системы выполняется с помощью чисел Клиффорда.

Перейдем к описанию вектор-функции $F(u, v)$.

Пространство, в котором она будет определена, состоит из троек (u_0, u_1, u_2), где u_0 есть s-мерный вектор, u_1 и $u_2 \in K$. Размерность m этого пространства равна $s+2N$. $F(u, u)$ определяется формулами

$$F_1(u, u) = (u_0, \mathbf{u_0}) + (u_1, u_1),$$
$$F_2(u, u) = (u_2, \mathbf{u_2}),$$
$$F_{k+2}(u, u) = \mathrm{Re}\,(u_1, T_ku_2) \qquad (k=1, \ldots, n)$$

(F_m означает m-ю координату вектора F), где (u, v) — обычное скалярное произведение. Эти области будут симметрическими только при $n=2$, $s=0$ и $n=4$, $s=0$, $N=2$.

Э. Картан поставил в 1935 г. следующую проблему: существуют ли ограниченные однородные несимметрические области. Наши результаты дают решение этой проблемы. Оказывается, что простейшая ограниченная однородная несимметрическая область существует уже в четырехмерном комплексном пространстве.

2. $\boxed{\text{В. А. Чечик}}$ (Воронеж) «Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью».

Доклад прочитан Г. Е. Шиловым. Автор работы — молодой математик Виктор Аронович Чечик трагически погиб во время купания 18 июня 1956 г. Собрание почтило память В. А. Чечика вставанием.

Работа В. А. Чечика опубликована в 8 томе «Трудов московского математического общества» (1959).

Заседание 6 января 1959 г.

1. В. Статулявичус (Вильнюс) «Локальная предельная теорема для случайных величин, связанных с нестационарной цепью Маркова».

2. А. И. Маркушевич «Просвещение в Соединенных Штатах Америки (из впечатлений о поездке по США)».

Заседание 13 января 1959 г.

1. А. Н. Колмогоров «„Малые знаменатели" в задачах механики и анализа» (обзорный доклад).