Доклады Академии наук СССР
1959. Том 124, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ и А. А. САМАРСКИЙ

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Многие разностные схемы, применяемые для решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сходящиеся в классе гладких коэффициентов, являются расходящимися в случае разрывных коэффициентов. Цель настоящей статьи — установить необходимые условия сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов для уравнения

$$Lu = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right] = -f(x) \quad (0 < x < 1,\ 0 < m \leqslant p(x) \leqslant M), \tag{1}$$

а также дать общую характеристику класса нормальных [1] схем, удовлетворяющих необходимому условию сходимости.

п. 1. Рассмотрим класс дифференциальных операторов $L^{(p)}u$, определенных на интервале $0 < x < 1$, и соответствующую нормальную разностную схему (см. [1]) $L_h^{(p)}$, определенную на равномерной разностной сетке S_N $x_0 = 0,\ x_1 = h, \ldots, x_i = ih, \ldots, x_N = Nh = 1$):

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{B_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i}\right], \tag{2}$$

где $A_i = A[\bar{p}(s)]$, $B_i = B[\bar{p}(s)]$ при $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$ $(-1 < s < 1)$; A и B — нормальные, т. е. линейные регулярные, положительные и не зависящие от h функционалы, удовлетворяющие условию взаимной симметрии [2].

п. 2. Будем называть $L_h^{(p)}$ **квазиконсервативной разностной схемой**, если $B_i = A_{i+1}$ или $B[p(x_i + sh)] = A[p(x_{i+1} + sh)]$ в классе $C_m(p)$. Если A и B — линейные регулярные функционалы, то условие квазиконсервативности означает, что: 1) функционал $A[\bar{p}(s)]$ определен для функций $\bar{p}(s)$, заданных на интервале $-1 < s < 0$, а $B[\bar{p}(s)]$ — на интервале $0 < s < 1$; 2) в классе разрывных коэффициентов $Q_m(\bar{p})$ $B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1 + s)] + \Gamma[\bar{p}(s)]$, где $\Gamma[\bar{p}(s)]$ — нуль-функционал (см. [2]).

Если условие $B_i = A_{i+1}$ выполняется и в классе $Q_m(p)$, то разностную схему $L_h^{(p)}$ мы будем называть **консервативной схемой**. В этом случае $B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1 + s)]$ для $\bar{p}(s) \in Q_m$, и разностный оператор $L_h^{(p)}$ можно представить в виде

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{A_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i}\right] = \frac{1}{h^2}\Delta\left(\frac{1}{A_i}\nabla y_i\right).$$

п. 3. Перейдем к изучению вопроса о сходимости в $Q_m(p)$ нормальной разностной схемы (2), имеющей 2-й порядок точности в $C_m(p)$ $(m \geqslant 3)$. Предположим, что $p(x)$ из Q_m имеет разрыв 1-го рода в точке $x = \xi$ $(0 < \xi < 1)$, причем $\xi = x_n + \theta h$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, где $x_n = nh$ — узловая точка разностной сетки S_N $(h = 1/N)$. Очевидно, что $\theta = \theta(h)$, $n = n(h)$.

Вычислим погрешность схемы $L_h^{(p)}$ в окрестности точки $x=\xi$. Если $p \in Q_m$ $(m \geqslant 3)$, то погрешность аппроксимации

$$\varphi_i = L_h u_i - (Lu)_i = O(h^2) \quad \text{при } i \neq n, \ i \neq n+1,$$

где $u = u(x)$ — решение дифференциального уравнения (1).

Для φ_n и φ_{n+1} получаем выражения

$$\varphi_n = \frac{w}{h}\left[\frac{\theta p_\text{л} + (1-\theta)\, p_\text{п}}{B_n} - \frac{p_\text{л}}{A_n}\right] + \frac{1}{B_n}\,[(1-\theta)^2 u''_\text{п} - \theta^2 u''_\text{л}] +$$

$$+ \frac{1}{A_n}\,(0{,}5+\theta)\,u''_\text{л} - \left(\frac{1}{p}\,u'\right)'_\text{л} + O(h) = \varphi_n^0 + O(h), \tag{3}$$

$$\varphi_{n+1} = \frac{w}{h}\left[\frac{p_\text{п}}{B_{n+1}} - \frac{\theta p_\text{л} + (1-\theta)\, p_\text{п}}{A_{n+1}}\right] - \frac{1}{A_{n+1}}\,[(1-\theta)^2 u''_\text{п} - \theta^2 u''_\text{л}] +$$

$$+ \frac{1}{B_{n+1}}\,(1{,}5-\theta)\,u''_\text{п} - \left(\frac{1}{p}\,u'\right)'_\text{п} + O(h) = \varphi_{n+1}^0 + O(h), \tag{4}$$

где $w = u'_\text{л} / p_\text{л} = u'_\text{п} / p_\text{п}$, $\quad f_\text{л} = f(\xi - 0)$, $f_\text{п} = f(\xi+0)$.

Если $p(x) \in Q_1^\gamma$, то $\varphi_i = O(h^\gamma)$ при $i \neq n$, $\quad i \neq n+1$; $\quad \varphi_n = \varphi_n^0 + O(h^\gamma)$, $\varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}^0 + O(h^\gamma)$; $|O(h^\gamma)| < Kh^\gamma$ $\quad(\gamma > 0)$; K — положительная постоянная, зависящая от выбора функции $p(x)$.

п. 4. Рассмотрим отрезок $[\bar{x}, \bar{\bar{x}}]$, целиком лежащий внутри отрезка $[0,1]$ и содержащий фиксированную точку $x=\xi$, $\bar{x} < \xi < \bar{\bar{x}}$. Точка $x = \xi$ принадлежит некоторому интервалу сетки S_N, так что $x_n \leqslant \xi \leqslant x_{n+1}$. Рассмотрим разностное уравнение

$$L_h z_i = \frac{1}{h^2}\left[\frac{z_{i+1} - z_i}{B_i^h} - \frac{z_i - z_{i-1}}{A_i^h}\right] = -\psi_i \quad (\bar{x} < x_i < \bar{\bar{x}}) \tag{*}$$

и предположим, что коэффициенты A_i^h, B_i^h и правая часть ψ_i удовлетворяют условиям:

I. Существуют такие $m > 0$ и $M > 0$, что $m \leqslant A_i^h \leqslant M$, $\quad m \leqslant B_i^h \leqslant M$.

II. Существует такое $b > 0$, что $\varkappa_i \geqslant e^{-bh}$ при $x_i > \xi + h$ $\quad (i > n+1)$; $\varkappa_i \leqslant e^{+bh}$ при $x_i < \xi - h$ $\quad (i < n)$; $\varkappa_i = B_i^h / A_{i+1}^h$.

III. $|\psi_i| < \rho(h)$, где $\rho(h) \to 0$ при $h = 1/N \to 0$, если $i \neq n$ и $i \neq n+1$.

Пусть z_i^h — решение уравнения (*), а $z(x, h)$ — полигональная функция.

Лемма 1. *Если для уравнения* (*) *выполнены условия* I, II, III *и существует некоторая последовательность решений* $z(x, h_N)$ *уравнения* (*), *равномерно сходящаяся к нулю при* $h_N \to 0$ $(N \to \infty)$, *то выполняется условие*

$$\Delta(\xi, h) = h\left(\frac{\psi_n}{A_{N+1}^h} + \frac{\psi_{n+1}}{B_n^h}\right) = \rho(h) \to 0 \quad \textit{при } h = h_N \to 0. \tag{5}$$

Лемма 2. *Если выполнены условия леммы* 1 *и, кроме того*: 1) $\psi_i = O(h^2)$ *или* $|\psi_i| < C_1 h^2$ *при* $i \neq n$, $\quad i \neq n+1$; 2) $|z(x, h_N)| < C_2 h^2$ *на некоторой последовательности сеток* S_N, *то выполняются условия*

$$\Delta(\xi, h) = O(h^2), \ \psi_n = O(1), \quad \psi_{n+1} = O(1). \tag{6}$$

п. 5. Обозначая $u(x)$ решение дифференциального уравнения $L^{(p)}u = -f(x)$, а y_i — решение уравнения $L_h^{(p)} y = -F_i^h$, $\quad F_i^h = F[\bar{f}(s)]$, $\quad \bar{f}(s) = f(x_i + sh)$, где F — нормальный симметричный функционал, удовлетворяющий условию нормировки $F[1] = 1$, получим для разности $z_i = y_i - u(x_i)$ уравнение

$$L_h^{(p)} z_i = -\psi_i, \quad \psi_i = \varphi_i + F_i^h - f(x_i).$$

Пусть $L_h^{(p)}$ — нормальная схема 2-го порядка аппроксимации; $p \in Q_1^\gamma$, $f \in Q_0^\gamma$. Если $\xi = x_n + \theta h$ $(0 < \theta < 1)$ — точка разрыва $p(x)$ и $f(x)$, то $\psi_i = O(h^\gamma)$ при $i \neq n$, $i \neq n+1$ (условие III). Нетрудно убедиться в том, что условия II и III из п. 4 также выполнены. Подставляя в формулу (5) выражения (3) и (4) для φ_n и φ_{n+1} и учитывая, что $F_n^h - f(x_n) = O(1)$, $F_{n+1}^h - f(x_{n+1}) = O(1)$, получим необходимое условие сходимости однородной разностной схемы $L_h^{(p)}$ в классе кусочно-непрерывных и кусочно-гладких коэффициентов $p(x)$. Это условие имеет вид:

$$\frac{B_n^h B_{n+1}^h}{p_{\text{п}}} - \frac{A_n^h A_{n+1}^h}{p_{\text{л}}} = \rho(h) \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{δ}$$

Аналогично, подставляя в (6) выражения (3) и (4) для ψ_n и ψ_{n+1}, получим, в силу леммы 2, необходимые условия 2-го интегрального порядка точности схемы $L_h^{(p)}$ в $Q_m(p)$:

$$\frac{\psi_n}{A_{n+1}^h} + \frac{\psi_{n+1}}{B_n^h} = O(h), \quad \varphi_n = O(1), \quad \varphi_{n+1} = O(1).$$

п. 6. Пусть $L_h^{(p)}$ — нормальная, сходящаяся в $C_m(p)$ схема. Представим $p(x)$ в виде суммы $p(x) = \hat{p}(x) + \tilde{p}(x)$, где $\hat{p}(x) = p_{\text{л}} = p(\xi - 0)$ при $x < \xi$; $\hat{p}(x) = p_{\text{п}} = p(\xi + 0)$ при $x > \xi$, а функция $\tilde{p}(x)$ непрерывна, причем $\tilde{p}(\xi) = 0$, $\tilde{p}_{\text{л}} = p'_{\text{л}}$, $\tilde{p}'_{\text{п}} = p'_{\text{п}}$. Поэтому $A[\tilde{p}(x_n + sh)] = O(h)$, $B[\tilde{p}(x_n + sh)] = O(h)$, и, следовательно, $A_n = \tilde{A}_n + O(h)$, $B_n = \hat{B}_n + O(h)$, где $\hat{A}_n = A[\hat{p}(x_n + sh)]$, $\hat{B}_n = B[\hat{p}(x_n + sh)]$.

Пользуясь функцией $\eta_\xi(x) = 1$ при $x < \xi$; $\eta_\xi(x) = 0$ при $x \geqslant \xi$, можно записать $\hat{p}(x) = \eta_\xi(x) p_{\text{л}} + (1 - \eta_\xi(x)) p_{\text{п}}$. Тогда будем иметь $\hat{A}_n = \alpha(\theta) p_{\text{л}} + [1 - \alpha(\theta)] p_{\text{п}}$, $\hat{B}_n = \beta(\theta) p_{\text{л}} + [1 - \beta(\theta)] p_{\text{п}}$, где $\alpha(\theta) = A[\eta_0(x)]$, $\beta(\theta) = B[\eta_0(x)]$ — характеристические функции регулярных линейных функционалов A и B ([2]).

Аналогично находим $\hat{A}_{n+1} = \alpha(-1 + \theta) p_{\text{л}} + [1 - \alpha(-1 + \theta)] p_{\text{п}}$, $\hat{B}_{n+1} = \beta(-1 + \theta) p_{\text{л}} + [1 - \beta(-1 + \theta)] p_{\text{п}}$.

Необходимое условие сходимости (δ) можно записать в виде

$$\frac{\hat{B}_n \hat{B}_{n+1}}{p_{\text{п}}} - \frac{\hat{A}_n \hat{A}_{n+1}}{p_{\text{л}}} = \rho(h). \tag{$\hat{\delta}$}$$

Нашей задачей является предельный переход при $N \to \infty$ $(h = 1/N \to 0)$ в условии $(\hat{\delta})$. При этом необходимо сначала рассмотреть возможные пределы функции $\theta = \theta(1/N) = N\xi - n$, когда $N \to \infty$, пробегая какую-либо последовательность возрастающих чисел $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$

В дальнейшем мы будем опираться на следующую теорему П. Л. Чебышева ([4]):

Если a — количество несоизмеримое, то найдется бесконечное множество таких целых чисел x, y, при которых выражение $y - ax$ будет разниться с каким-либо данным количеством b менее, чем на $2/x$. Одни из этих величин x, y будут давать $y - ax > b$, другие $y - ax < b$.

Из теоремы Чебышева следует, что для иррационального ξ и любого θ_0, $0 < \theta_0 < 1$: 1) существует бесконечная последовательность таких сеток $S_{\overline{N}_k}$ с шагом $\overline{h}_k = 1/\overline{N}_k$, что $\lim\limits_{N_k \to 0} \theta = \theta_0 + 0$, т. е. $\theta \to \theta_0$ справа; 2) существует бесконечная последовательность таких $S_{\overline{\overline{N}}_k}$ с шагом $\overline{\overline{h}}_k = 1/\overline{\overline{N}}_k$, что $\theta \to \theta_0$ слева при $\overline{\overline{N}}_k \to \infty$.

Отметим, что: а) если θ_0 — рациональное число, то найдется такое ξ, что равенство $\theta(1/N) = \theta_0$ имеет место для бесконечного множества разностных сеток S_{N_k}; б) если θ_0 — иррациональное число, то, каково бы ни было ξ, равенство $\theta_0 = \theta(1/N) = N\xi - n$ возможно не более, чем для одного значения N, т. е. не более, чем для одной разностной сетки.

п. 7. Потребуем теперь, чтобы наша нормальная схема $L_h^{(p)}$ удовлетворяла необходимому условию $(\hat{\delta})$ в $Q_m(p)$. Выбирая произвольное $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 1$ и совершая предельный переход по последовательности сеток $S_{\overline{N}_k}$ (или $S_{\overline{\overline{N}}_k}$) при $\overline{N}_k \to \infty$, а также учитывая симметрию схемы, условия нормировки $\alpha(1) = A[1] = 1$, $\beta(1) = B[1] = 1$ и положительность функционалов A и B, получим: 1) $\beta(\xi) = 0$ при $-1 < \xi < 0$; $\alpha(\xi) = 1$ при $0 < \xi < 1$; 2) $\beta(\xi) = \alpha(-1 + \xi)$ в точках непрерывности α и β.

Отсюда следует, что условию сходимости (δ) удовлетворяет только квазиконсервативная схема $B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1+s)] + \Gamma[\bar{p}(s)]$, где $\Gamma[\bar{p}(s)] = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(\zeta_j)[p_л(\zeta_j) - p_п(\zeta_j)]$ — нуль-функционал. В силу значения б) п. 6 суммирование проводится только по иррациональным особым точкам функционала Γ.

Лемма 3. *На любой последовательности разностных сеток* S_{N_k}

$$\Gamma[p(x_i + sh_{N_k})] = \rho(h_{N_k}) \to 0 \quad при \quad N_k \to \infty.$$

Отсюда следует, что найденной нами схеме эквивалентна консервативная схема, для которой $\beta(\xi) = \alpha(-1+\xi)$ при всех $0 < \xi < 1$. Учитывая условие симметрии, найдем $\alpha(\xi) = 0{,}5 + \omega(\xi + 0{,}5)$, где $\omega(t)$ — произвольная нечетная функция ограниченной вариации: $\omega_л(-t) = -\omega_п(t)$, удовлетворяющая условию нормировки $\omega(0{,}5) = 0{,}5$.

п. 8. Рассматривая сходимость для однородного уравнения и пользуясь следующим определением сходимости: разностная схема $L_h^{(p)}$ сходится к дифференциальному оператору $L_h^{(p)}$ в заданном классе коэффициентов $(p(x))$, если для любого решения $u(x)$ уравнения $L^{(p)}u = 0$ с коэффициентами из заданного класса найдется такое решение разностного уравнения $L_h^{(p)}y_i = 0$, что на любой последовательности сеток S_{N_k} полигональная функция $y(x, h)$ равномерно сходится к $u(x)$ при $h = 1/N_k \to 0$, т. е. $|y(x,h) - u(x)| < \rho(h) \to 0$, можно формулировать теоремы:

Теорема 1. *Если нормальная разностная схема $L_h^{(p)}$ сходится в $Q_1^{\gamma}(p)$, то она квазиконсервативна.*

Теорема 2. *Для всякой сходящейся в $Q_1^{\gamma}(p)$ квазиконсервативной нормальной схемы $L_h^{(p)}$ существует эквивалентная ей в смысле сходимости консервативная схема.*

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
13 X 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 122, № 4 (1958). [2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 122, № 2 (1958). [3] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 108, № 3 (1956) [4] П. Л. Чебышев, Поли. собр. соч. 1, М.— Л., 1944, стр. 271.