

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ и А. А. САМАРСКИЙ

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В КЛАССЕ
РАЗРЫВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Многие разностные схемы, применяемые для решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сходящиеся в классе гладких коэффициентов, являются расходящимися в случае разрывных коэффициентов. Цель настоящей статьи — установить необходимые условия сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов для уравнения

$$Lu = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right] = -f(x) \quad (0 < x < 1, 0 < m \leq p(x) \leq M), \quad (1)$$

а также дать общую характеристику класса нормальных ⁽¹⁾ схем, удовлетворяющих необходимому условию сходимости.

п. 1. Рассмотрим класс дифференциальных операторов $L^{(p)}u$, определенных на интервале $0 < x < 1$, и соответствующую нормальную разностную схему (см. ⁽¹⁾) $L_h^{(p)}$, определенную на равномерной разностной сетке S_N $x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_i = ih, \dots, x_N = Nh = 1$):

$$L_h^{(p)}y_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{B_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i} \right], \quad (2)$$

где $A_i = A[\bar{p}(s)], B_i = B[\bar{p}(s)]$ при $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$ ($-1 < s < 1$); A и B — нормальные, т. е. линейные регулярные, положительные и не зависящие от h функционалы, удовлетворяющие условию взаимной симметрии ⁽²⁾.

п. 2. Будем называть $L_h^{(p)}$ квазиконсервативной разностной схемой, если $B_i = A_{i+1}$ или $B[p(x_i + sh)] = A[p(x_{i+1} + sh)]$ в классе $C_m(p)$. Если A и B — линейные регулярные функционалы, то условие квазиконсервативности означает, что: 1) функционал $A[\bar{p}(s)]$ определен для функций $\bar{p}(s)$, заданных на интервале $-1 < s < 0$, а $B[\bar{p}(s)]$ — на интервале $0 < s < 1$; 2) в классе разрывных коэффициентов $Q_m(\bar{p})$ $B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1+s)] + \Gamma[\bar{p}(s)]$, где $\Gamma[\bar{p}(s)]$ — нуль-функционал (см. ⁽²⁾).

Если условие $B_i = A_{i+1}$ выполняется и в классе $Q_m(p)$, то разностную схему $L_h^{(p)}$ мы будем называть консервативной схемой. В этом случае $B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1+s)]$ для $\bar{p}(s) \in Q_m$, и разностный оператор $L_h^{(p)}$ можно представить в виде

$$L_h^{(p)}y_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{A_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i} \right] = \frac{1}{h^2} \Delta \left(\frac{1}{A_i} \nabla y_i \right).$$

п. 3. Перейдем к изучению вопроса о сходимости в $Q_m(p)$ нормальной разностной схемы (2), имеющей 2-й порядок точности в $C_m(p)$ ($m \geq 3$). Предположим, что $p(x)$ из Q_m имеет разрыв 1-го рода в точке $x = \xi$ ($0 < \xi < 1$), причем $\xi = x_n + \theta h$, $0 \leq \theta \leq 1$, где $x_n = nh$ — узловая точка разностной сетки S_N ($h = 1/N$). Очевидно, что $\theta = \theta(h)$, $n = n(h)$.

Вычислим погрешность схемы $L_h^{(p)}$ в окрестности точки $x = \xi$. Если $p \in Q_m$ ($m \geq 3$), то погрешность аппроксимации

$$\varphi_i = L_h u_i - (Lu)_i = O(h^2) \quad \text{при } i \neq n, i \neq n+1,$$

где $u = u(x)$ — решение дифференциального уравнения (1).

Для φ_n и φ_{n+1} получаем выражения

$$\begin{aligned} \varphi_n = & \frac{\omega}{h} \left[\frac{0p_n + (1-0)p_n}{B_n} - \frac{p_n}{A_n} \right] + \frac{1}{B_n} [(1-\theta)^2 u'' - \theta^2 u''_{n+1}] + \\ & + \frac{1}{A_n} (0,5 + \theta) u''_n - \left(\frac{1}{p} u' \right)'_n + O(h) = \varphi_n^0 + O(h), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} = & \frac{\omega}{h} \left[\frac{p_n}{B_{n+1}} - \frac{\theta p_n + (1-0)p_n}{A_{n+1}} \right] - \frac{1}{A_{n+1}} [(1-\theta)^2 u'' - \theta^2 u''_n] + \\ & + \frac{1}{B_{n+1}} (1,5 - \theta) u''_n - \left(\frac{1}{p} u' \right)'_{n+1} + O(h) = \varphi_{n+1}^0 + O(h), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\omega = u'_n / p_n = u'_n / p_n$, $f_n = f(\xi - 0)$, $f_n = f(\xi + 0)$.

Если $p(x) \in Q_1^\gamma$, то $\varphi_i = O(h^\gamma)$ при $i \neq n, i \neq n+1$; $\varphi_n = \varphi_n^0 + O(h^\gamma)$, $\varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}^0 + O(h^\gamma)$; $|O(h^\gamma)| < Kh^\gamma$ ($\gamma > 0$); K — положительная постоянная, зависящая от выбора функции $p(x)$.

п. 4. Рассмотрим отрезок $[\bar{x}, \bar{x}]$, целиком лежащий внутри отрезка $[0, 1]$ и содержащий фиксированную точку $x = \xi$, $\bar{x} < \xi < \bar{x}$. Точка $x = \xi$ принадлежит некоторому интервалу сетки S_N , так что $x_n \leq \xi \leq x_{n+1}$. Рассмотрим разностное уравнение

$$L_h z_i = \frac{1}{h^2} \left[\frac{z_{i+1} - z_i}{B_i^h} - \frac{z_i - z_{i-1}}{A_i^h} \right] = -\phi_i \quad (\bar{x} < x_i < \bar{x}) \quad (*)$$

и предположим, что коэффициенты A_i^h, B_i^h и правая часть ϕ_i удовлетворяют условиям:

- I. Существуют такие $m > 0$ и $M > 0$, что $m \leq A_i^h \leq M$, $m \leq B_i^h \leq M$.
- II. Существует такое $b > 0$, что $x_i \geq e^{-bh}$ при $x_i > \xi + h$ ($i > n+1$); $x_i \leq e^{+bh}$ при $x_i < \xi - h$ ($i < n$); $x_i = B_i^h / A_{i+1}^h$.
- III. $|\phi_i| < \rho(h)$, где $\rho(h) \rightarrow 0$ при $h = 1/N \rightarrow 0$, если $i \neq n$ и $i \neq n+1$.

Пусть z_i^h — решение уравнения (*), а $z(x, h)$ — полигональная функция.

Лемма 1. Если для уравнения (*) выполнены условия I, II, III и существует некоторая последовательность решений $z(x, h_N)$ уравнения (*), равномерно сходящаяся к нулю при $h_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), то выполняется условие

$$\Delta(\xi, h) = h \left(\frac{\psi_n}{A_{n+1}^h} + \frac{\psi_{n+1}}{B_n^h} \right) = \rho(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h = h_N \rightarrow 0. \quad (5)$$

Лемма 2. Если выполнены условия леммы 1 и, кроме того: 1) $\phi_i = O(h^2)$ или $|\phi_i| < C_1 h^2$ при $i \neq n, i \neq n+1$; 2) $|z(x, h_N)| < C_2 h^2$ на некоторой последовательности сеток S_N , то выполняются условия

$$\Delta(\xi, h) = O(h^2), \quad \psi_n = O(1), \quad \psi_{n+1} = O(1). \quad (6)$$

п. 5. Обозначая $u(x)$ решение дифференциального уравнения $L^{(p)}u = -f(x)$, а y_i — решение уравнения $L_h^{(p)}y = -F_i^h$, $F_i^h = F[\bar{f}(s)]$, $\bar{f}(s) = f(x_i + sh)$, где F — нормальный симметричный функционал, удовлетворяющий условию нормировки $F[1] = 1$, получим для разности $z_i = y_i - u(x_i)$ уравнение

$$L_h^{(p)}z_i = -\phi_i, \quad \phi_i = \varphi_i + F_i^h - f(x_i).$$

Пусть $L_h^{(p)}$ — нормальная схема 2-го порядка аппроксимации; $p \in Q_1^+$, $\xi \in Q_0^+$. Если $\xi = x_n + \theta h$ ($0 < \theta < 1$) — точка разрыва $p(x)$ и $f(x)$, то $\phi_i = O(h^\gamma)$ при $i \neq n, i \neq n+1$ (условие III). Нетрудно убедиться в том, что условия II и III из п. 4 также выполнены. Подставляя в формулу (5) выражения (3) и (4) для φ_n и φ_{n+1} и учитывая, что $F_n^h - f(x_n) = O(1)$, $F_{n+1}^h - f(x_{n+1}) = O(1)$, получим необходимое условие сходимости однородной разностной схемы $L_h^{(p)}$ в классе кусочно-непрерывных и кусочно-гладких коэффициентов $p(x)$. Это условие имеет вид:

$$\frac{B_n^h B_{n+1}^h}{p_{II}} - \frac{A_n^h A_{n+1}^h}{p_{II}} = \rho(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (\delta)$$

Аналогично, подставляя в (6) выражения (3) и (4) для ψ_n и ψ_{n+1} , получим, в силу леммы 2, необходимые условия 2-го интегрального порядка точности схемы $L_h^{(p)}$ в $Q_m(p)$:

$$\frac{\psi_n}{A_{n+1}^h} + \frac{\psi_{n+1}}{B_n^h} = O(h), \quad \varphi_n = O(1), \quad \varphi_{n+1} = O(1).$$

п. 6. Пусть $L_h^{(p)}$ — нормальная, сходящаяся в $C_m(p)$ схема. Представим $p(x)$ в виде суммы $p(x) = \hat{p}(x) + \tilde{p}(x)$, где $\hat{p}(x) = p_{II} = p(\xi - 0)$ при $x < \xi$; $\tilde{p}(x) = p_{II} = p(\xi + 0)$ при $x > \xi$, а функция $\tilde{p}(x)$ непрерывна, причем $\tilde{p}(\xi) = 0$, $p_{II} = p_{II}$, $p_{II} = p_{II}$. Поэтому $A[\tilde{p}(x_n + sh)] = O(h)$, $B[\tilde{p}(x_n + sh)] = O(h)$, и, следовательно, $A_n = \hat{A}_n + O(h)$, $B_n = \hat{B}_n + O(h)$, где $\hat{A}_n = A[\hat{p}(x_n + sh)]$, $\hat{B}_n = B[\hat{p}(x_n + sh)]$.

Пользуясь функцией $\gamma_\xi(x) = 1$ при $x < \xi$; $\gamma_\xi(x) = 0$ при $x \geq \xi$, можно записать $\hat{p}(x) = \gamma_\xi(x) p_{II} + (1 - \gamma_\xi(x)) p_{II}$. Тогда будем иметь $\hat{A}_n = \alpha(\theta) p_{II} + [1 - \alpha(\theta)] p_{II}$, $\hat{B}_n = \beta(\theta) p_{II} + [1 - \beta(\theta)] p_{II}$, где $\alpha(\theta) = A[\gamma_\theta(x)]$, $\beta(\theta) = B[\gamma_\theta(x)]$ — характеристические функции регулярных линейных функционалов A и B (2).

Аналогично находим $\hat{A}_{n+1} = \alpha(-1 + \theta) p_{II} + [1 - \alpha(-1 + \theta)] p_{II}$, $\hat{B}_{n+1} = \beta(-1 + \theta) p_{II} + [1 - \beta(-1 + \theta)] p_{II}$.

Необходимое условие сходимости (δ) можно записать в виде

$$\frac{\hat{B}_n \hat{B}_{n+1}}{p_{II}} - \frac{\hat{A}_n \hat{A}_{n+1}}{p_{II}} = \rho(h). \quad (\hat{\delta})$$

Нашей задачей является предельный переход при $N \rightarrow \infty$ ($h = 1/N \rightarrow 0$) в условии (δ̂). При этом необходимо сначала рассмотреть возможные пределы функции $\theta = \theta(1/N) = N\xi - n$, когда $N \rightarrow \infty$, пробегая какую-либо последовательность возрастающих чисел $N_1, N_2, \dots, N_k, \dots$.

В дальнейшем мы будем опираться на следующую теорему П. Л. Чебышева (4):

Если a — количество несоизмеримое, то найдется бесконечное множество таких целых чисел x, y , при которых выражение $y - ax$ будет отличаться с каким-либо данным количеством b менее, чем на $2/x$. Одни из этих величин x, y будут давать $y - ax > b$, другие $y - ax < b$.

Из теоремы Чебышева следует, что для иррационального ξ и любого $\theta_0, 0 < \theta_0 < 1$: 1) существует бесконечная последовательность таких сеток $S_{\bar{N}_k}$ с шагом $\bar{h}_k = 1/\bar{N}_k$, что $\lim_{\bar{N}_k \rightarrow \infty} \theta = \theta_0 + 0$, т. е. $\theta \rightarrow \theta_0$ справа; 2) существует бесконечная последовательность таких $S_{\bar{N}_k}$ с шагом $\bar{h}_k = 1/\bar{N}_k$, что $\theta \rightarrow \theta_0$ слева при $\bar{N}_k \rightarrow \infty$.

Отметим, что: а) если θ_0 — рациональное число, то найдется такое ξ , что равенство $\theta(1/N) = \theta_0$ имеет место для бесконечного множества разностных сеток S_{N_k} ; б) если θ_0 — иррациональное число, то, каково бы ни было ξ , равенство $\theta_0 = \theta(1/N) = N\xi - n$ возможно не более, чем для одного значения N , т. е. не более, чем для одной разностной сетки.

п. 7. Потребуем теперь, чтобы наша нормальная схема $L_h^{(p)}$ удовлетворяла необходимому условию (δ) в $Q_m(p)$. Выбирая произвольное $0 \leq \theta_0 \leq 1$ и совершая предельный переход по последовательности сеток S_{N_k} (или $S_{\bar{N}_k}$) при $\bar{N}_k \rightarrow \infty$, а также учитывая симметрию схемы, условия нормировки $\alpha(1) = A[1] = 1$, $\beta(1) = B[1] = 1$ и положительность функционалов A и B , получим: 1) $\beta(\xi) = 0$ при $-1 < \xi < 0$; $\alpha(\xi) = 1$ при $0 < \xi < 1$; 2) $\beta(\xi) = \alpha(-1 + \xi)$ в точках непрерывности α и β .

Отсюда следует, что условию сходимости (δ) удовлетворяет только квазиконсервативная схема $B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1+s)] + \Gamma[\bar{p}(s)]$, где $\Gamma[\bar{p}(s)] = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(\xi_j) [p_{\text{л}}(\xi_j) - p_{\text{п}}(\xi_j)]$ — нуль-функционал. В силу значения б) п. 6 суммирование проводится только по иррациональным особым точкам функционала Γ .

Лемма 3. На любой последовательности разностных сеток S_{N_k}

$$\Gamma[p(x_i + sh_{N_k})] = \rho(h_{N_k}) \rightarrow 0 \text{ при } N_k \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что найденной нами схеме эквивалентна консервативная схема, для которой $\beta(\xi) = \alpha(-1 + \xi)$ при всех $0 < \xi < 1$. Учитывая условие симметрии, найдем $\alpha(\xi) = 0,5 + \omega(\xi + 0,5)$, где $\omega(t)$ — произвольная нечетная функция ограниченной вариации: $\omega_{\text{л}}(-t) = -\omega_{\text{п}}(t)$, удовлетворяющая условию нормировки $\omega(0,5) = 0,5$.

п. 8. Рассматривая сходимость для однородного уравнения и пользуясь следующим определением сходимости: разностная схема $L_h^{(p)}$ сходится к дифференциальному оператору $L^{(p)}$ в заданном классе коэффициентов ($p(x)$) если для любого решения $u(x)$ уравнения $L^{(p)}u = 0$ с коэффициентами из заданного класса найдется такое решение разностного уравнения $L_h^{(p)}y_i = 0$, что на любой последовательности сеток S_{N_k} полигональная функция $y(x, h)$ равномерно сходится к $u(x)$ при $h = 1/N_k \rightarrow 0$, т. е. $|y(x, h) - u(x)| < \rho(h) \rightarrow 0$, можно формулировать теоремы:

Теорема 1. Если нормальная разностная схема $L_h^{(p)}$ сходится в $Q_1^Y(p)$, то она квазиконсервативна.

Теорема 2. Для всякой сходящейся в $Q_1^Y(p)$ квазиконсервативной нормальной схемы $L_h^{(p)}$ существует эквивалентная ей в смысле сходимости консервативная схема.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
13 X 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 122, № 4 (1958). ² А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 122, № 2 (1958). ³ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 108, № 3 (1956). ⁴ П. Л. Чебышев, Поли. собр. соч. 1, М.—Л., 1944, стр. 271.