Доклады Академии наук СССР
1959. Том 124, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ и А. А. САМАРСКИЙ

ОБ ОДНОЙ НАИЛУЧШЕЙ ОДНОРОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ

В работе ([1]) было найдено необходимое условие сходимости в классе кусочно-непрерывных и кусочно-гладких коэффициентов $Q_m(p)$ нормальной разностной схемы (см. ([2])) $L_h^{(p)}$, применяемой для решения класса дифференциальных уравнений

$$L^{(p)}u = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right] = -f(x) \quad (0 < x < 1,\ 0 < m \leqslant p(x) \leqslant M). \quad (1)$$

Ставится задача: найти «наилучшие» разности схемы, которые могут давать второй интегральный порядок точности в $Q_m(p)$ ([1]). Показано, что существует только одна наилучшая нормальная схема.

п. 1. Рассмотрим нормальную разностную схему

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2}\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{B_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i}\right] \quad \left(h = \frac{1}{N}\right), \quad (2)$$

где $B_i = B[\bar{p}(s)]$, $A_i = A[\bar{p}(s)]$, $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$; A и B — нормальные (линейные, регулярные, положительные ([3]), не зависящие от h) и взаимно симметричные функционалы. Если $L_h^{(p)}$ удовлетворяет необходимому условию сходимости в $Q_1^{\gamma}(p)$, то она квазиконсервативна ([1]), т. е. функционал $A[\bar{p}(s)]$ определен для $-1 < s < 0$, $B[\bar{p}(s)]$ — для $0 < s < 1$, причем $B[\bar{p}(s)] = A[\bar{p}(1+s)] + \Gamma[\bar{p}(s)]$, где $\Gamma[\bar{p}(s)]$ — нуль-функционал. Иными словами,

$$B_i = A_{i+1} + \Gamma[p(x_i + sh)] \quad \text{в } Q_m(p),$$
$$B_i = A_{i+1} \quad \text{в } C_m(p).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать такие схемы.

п. 2. Пусть $p(x)$ имеет разрыв 1-го рода в точке $x = \xi = x_n + \theta h$, где $\theta = \theta(h)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $n = n(h)$, и принадлежит классу $Q_m(p)$ $(m \geqslant 3)$. Обозначая $u(x)$ некоторое решение дифференциального уравнения $L^{(p)}u$, а y_i — некоторое решение разностного уравнения $L_h^{(p)}y_i = 0$, получим для их разности $z_i = y_i - u(x_i)$ неоднородное уравнение

$$L_h^{(p)} z_i = -\varphi_i,$$

где

$$\varphi_i = L_h^{(p)}u_i - (L^{(p)}u)_i.$$

Если $i \neq n$, $i \neq n+1$, то $\varphi_i = O(h^2)$ или $|\varphi_i| < Ch^2$. Выражения для φ_n и φ_{n+1} даны в ([1]) (формулы (3) и (4)).

Положим, по аналогии с ([1]), $p(x) = \hat{p}(x) + \tilde{p}(x)$, где $\hat{p}(x) = p_л = p(\xi - 0)$ при $x < \xi$; $\hat{p}(x) = p_п = p(\xi + 0)$ при $x > \xi$. Тогда будем иметь $A_n = A[\hat{p}(x_n + sh)] + A[\tilde{p}(x_n + sh)] = p_л + O(h)\,(A[1] = 1)$, $B_{n+1} = p_п + O(h)$ $(B[1] = 1)$. Если $i \neq n$, то $B_i = A_{i+1}$ и $\varkappa_i = B_i / A_{i+1} = 1$, т. е. условия леммы (при $\psi_i = \varphi_i$) из ([1]) выполнены.

Отсюда следует, что для того, чтобы полигональная функция $z(x, h)$ имела второй порядок малости по h, т. е. $|z(x, h)| < Ch^2$ при $h \to 0$, должны выполняться необходимые условия второго порядка точности:

$$\bar{\bar{\Delta}}(\xi, h) = \frac{\varphi_n}{A_{n+1}} + \frac{\varphi_{n+1}}{B_n} = O(h), \quad \varphi_n = O(1), \quad \varphi_{n+1} = O(1) \tag{3}$$

(третье условие является следствием первых двух условий).

п. 3. Выражение для φ_n можно записать в виде

$$\varphi_n = \frac{w}{h}\left[\frac{\theta p_л + (1-\theta) p_п}{B_n} - 1\right] + O(1), \qquad w = \frac{u'_л}{p_л} = \frac{u'_п}{p_п}.$$

Требование $\varphi_n = O(1)$ дает

$$B_n = \theta(h) p_л + [1 - \theta(h)] p_п + O(h).$$

С другой стороны, имеем

$$B_n = B[\hat{p}(x_n + sh)] + B[\tilde{p}(x_n + sh)] = \beta(\theta) p_л + (1 - \beta(\theta)) p_п + O(h).$$

Сравнивая оба выражения для B_n, получим $\beta(\theta) - \theta = O(h)$.

Совершим предельный переход по последовательности сеток $S_{\overline{N}_k}$ при $\overline{N}_k \to \infty$ $(\overline{h}_k \to 0)$, а затем по последовательности сеток $S_{\overline{\overline{N}}_k}$ при $\overline{\overline{N}}_k \to \infty$ $(\overline{\overline{h}}_k \to 0)$ (см. [1]). В силу теоремы Чебышева [1] будем иметь

$$\beta_п(\theta_0) = \theta_0, \quad \beta_л(\theta_0) = \theta_0,$$

где θ_0 — любое число в интервале $(0,1)$.

В силу положительности функционала B

$$\beta_п(\theta_0) - \beta(\theta_0) \geqslant 0, \quad \beta(\theta_0) - \beta_л(\theta_0) \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $\beta_л(\theta_0) = \beta_п(\theta_0) = \theta_0$. Таким образом, характеристическая функция $\beta(s)$ функционала B непрерывна и равна $\beta(s) = s$ $(0 < s < 1)$.

Аналогично, из условия $\varphi_{n+1} = O(1)$ находим $\alpha(s) = 1 + s$ $(-1 < s < 0)$, т. е.

$$A[\bar{p}(s)] = \int_{-1}^{0} \bar{p}(s)\, ds, \quad B[\bar{p}(s)] = \int_{0}^{1} \bar{p}(s)\, ds.$$

Схема $L_h^{(p)}$ консервативна.

Требование $\bar{\Delta}(\xi, h) = O(h)$ сводится к условию $\varphi_n + \varphi_{n+1} = O(h)$. Подставляя сюда полные выражения для φ_n и φ_{n+1} из [1], получаем $\varphi_n + \varphi_{n+1} = (0{,}5 - \theta)[(Lu)_п - (Lu)_л] + O(h) = O(h)$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Второй интегральный порядок точности в классе $Q_m(p)$ среди нормальных схем $L_h^{(p)}$ может иметь только одна схема*

$$L_h^{(p)} y_i = \frac{1}{h^2}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{A_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i}\right] = \frac{1}{h^2} \Delta\left(\frac{1}{A_i} \nabla y_i\right), \tag{α}$$

$$A_i = \int_{1}^{0} p(x_i + sh)\, ds = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\, dx.$$

Эта «наилучшая» схема консервативна [1]. Можно показать, что схема (α) в самом деле реализует второй порядок точности в $Q_m(p)$ для однородного уравнения $L_h^{(p)} y_i = 0$.

п. 4. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$L^{(p,q)}u = -f(x),$$

где

$$L^{(p,q)}u = L^{(p)}u - q(x)u = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right] - q(x)u \quad (0 \leqslant q(x) < M).$$

Для удобства изложения запишем это уравнение в виде

$$\mathscr{L}^{(p,q,f)}u = 0,$$

где $\mathscr{L}^{(p,q,f)}u = L^{(p,q)}u + f(x)$. Ему соответствует разностное уравнение

$$\mathscr{L}_h^{(p,q,f)}y_i = L_h^{(p,q)}y_i + F_i^h = 0,$$

где $L_h^{(p,q)}y_i = L_h^{(p)}y_i - l_i^h y_i$; $L_h^{(p)}$ — нормальная разностная схема (2); $l_i^h = l[q(x_i + sh)]$; $l[\bar{q}(s)]$ — нормальный симметричный функционал, определенный на $Q_m(q)$ в интервале $-1/2 < s < 1/2$, а $F_i^h = F[f(x_i + sh)]$ обладает теми же свойствами, что и l_i^h.

Разностную схему $\mathscr{L}_h^{(p,q,f)}$, обладающую такими свойствами, будем также называть нормальной схемой.

Теорема 2. *Для всякой сходящейся в классе $C_{m_p,m_q,m_f}(p,q,f) = \{C_{m_p}(p), C_{m_q}(q), C_{m_f}(f)\}$ однородной линейной трехточечной разностной схемы $\tilde{\mathscr{L}}_h^{(p,q,f)}$ можно указать нормальную схему $\mathscr{L}_h^{(p,q,f)}$, эквивалентную $\tilde{\mathscr{L}}_h^{(p,q,f)}$ в смысле сходимости и имеющую тот же порядок точности.*

Теорема 3. *Второй интегральный порядок точности в классе $Q_{m_p,m_q,m_f}(p,q,f) = \{Q_{m_p}(p), Q_{m_q}(q), Q_{m_f}(f)\}$ $(m_p \geqslant 3,\ m_q \geqslant 2,\ m_f \geqslant 2)$ среди нормальных разностных схем $\mathscr{L}_h^{(p,q,f)}$ может иметь только одна схема*

$$\mathscr{L}_h^{(p,q,f)}y_i = L_h^{(p,q)}y_i + F_i^h, \quad L_h^{(p,q)}y_i = \frac{1}{h^2}\Delta\left(\frac{1}{A_i}\nabla y_i\right) - l_i^h y_i, \qquad (\beta)$$

$$A_i = \int_{-1}^{0} p(x_i + sh)\,ds = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx,$$

$$l_i^h = \frac{1}{h}\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)\,dx, \quad F_i^h = \frac{1}{h}\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\,dx \quad (x_{i+0,5} = x_i + 0{,}5h).$$

Иными словами, пусть $u(x)$ — любое решение дифференциального уравнения $\mathscr{L}^{(p,q,f)}u = 0$; y_i — решение разностного уравнения $\mathscr{L}_h^{(p,q,f)}y_i = 0$, где $\mathscr{L}_h^{(p,q,f)}$ — нормальная схема; $z_i = y_i - u(x_i)$; $z(x,h)$ — полигональная функция. Если в классе $Q_{m_p,m_q,m_f}(p,q,f)$ имеет место оценка $z(x,h) = O(h^2)$, то, согласно теореме 3, нормальная схема $\mathscr{L}_h^{(p,q,f)}$ определена однозначно. Это и есть схема (β).

п. 5. Покажем, что результат теоремы 1 не зависит от специально формы записи дифференциального и разностного операторов. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L^{(k)}u = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right].$$

Соответствующую ему однородную симметричную разностную схему запишем в виде

$$L_h^{(k)} y_i = \frac{1}{h^2} [b_i (y_{i+1} - y_i) - a_i (y_i - y_{i-1})], \qquad (\bar{\alpha})$$

где $a_i = \Phi(l_1[\varphi(k(x_i + sh))]$; $b_i = \Psi(l_2[\psi(k(x_i + sh))])$; $l_1[f(s)]$ и $l_2[f(s)]$ — нормальные функционалы на $Q_m(f)$ для $-1 < s < 1$. Функция φ, ψ, Φ и Ψ имеют производные второго порядка, удовлетворяющие условию Липшица.

Теорема 4. *Среди разностных схем вида* $(\bar{\alpha})$ *существует единственная схема*

$$a_i = \left[\int_{-1}^{0} \frac{ds}{k(x_i + sh)}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)}dx\right]^{-1}, \quad b_i = a_{i+1}, \qquad (\alpha')$$

которая может давать для однородного уравнения $L_h^{(k)} y_i = 0$ *второй порядок точности в классе* $Q_m(k)$, *где* $m \geqslant 3$.

Замечание 1. Очевидно, что схема (α') и есть наилучшая p-линейная $(p = 1/k)$ схема (α).

Замечание 2. Схема $a_i = 2k_{i-1,\text{п}} k_{i,\text{л}} / (k_{i-1,\text{п}} + k_{i,\text{л}})$, $k_{i,\text{л}} = k(x_i - 0)$, $k_{i-1,\text{п}} = k(x_{i-1} + 0)$ может давать второй порядок точности в $Q_m(k)$ только тогда, когда точка равна $\xi = x_n + \theta h$ коэффициента $k(x)$ совпадает либо с узловой точкой сетки ($\theta = 0$ или $\theta = 1$), либо находится посередине между соседними узловыми точками ($\theta = 0{,}5$).

Поступило
13 X 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 124, № 3 (1959). [2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 122, № 4 (1958). [3] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ДАН, 122, № 2 (1958). [4] П. Л. Чебышев, Полн. собр. соч., 1, М.— Л., 1944, стр. 257.