ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ С МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИМ ЯДРОМ

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

§ 1

Рассмотрим интеграл вида

$$J[h, x_0; f] = \frac{1}{h} \int\limits_a^b \omega\Big(\frac{x - x_0}{h}\Big) f(x)\, dx, \tag{1}$$

ядро которого $\frac{1}{h}\omega\Big(\frac{x-x_0}{h}\Big)$ при $h \to 0$ имеет характер δ-функции, если $a < x_0 < b$.

В работе [1] было получено разложение интеграла J по целым степеням h:

$$J = \sum_{k=0}^{n} h^k J_k + h^n \rho(h), \quad \rho(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{2}$$

в предположении, что функция $\omega(\xi)$ абсолютно интегрируема на бесконечной прямой и имеет при $\xi \to \pm\infty$ следующее разложение:

$$\omega(\xi) = \frac{q_2}{\xi^2} + \frac{q_3}{\xi^3} + \ldots + \frac{q_k}{\xi^k} + \omega_k(\xi), \quad \omega_k(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi^{k+1}}\Big). \tag{3}$$

В настоящей статье изучается асимптотика при $h \to 0$ интеграла (1) для того случая, когда ядро $\omega(\xi)$ медленно убывает на бесконечности и его разложение при $\xi \to \pm\infty$ содержит член порядка $\frac{1}{\xi}$, причем пределы

$$\lim_{\xi \to +\infty} \xi\omega(\xi) = q_1^+ \quad \text{и} \quad \lim_{\xi \to -\infty} \xi\omega(\xi) = q_1^-,$$

Научные доклады высшей школы. Серия физико-математических наук. — 1959. — № 1. — С. 62–70. Министерство высшего и среднего специального образования СССР. — М.: Издательство Высшая школа.

вообще говоря, различны. Иными словами, функция $\omega(\xi)$ при $\xi \to \pm\infty$ допускает представление

$$\left.\begin{aligned} \omega(\xi) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k^+}{\xi^k} + \omega_n^+(\xi), \quad \omega_n^+(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi^{n+1}}\Big) \quad \text{при} \quad \xi \to +\infty, \\ \omega(\xi) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k^-}{\xi^k} + \omega_n^-(\xi), \quad \omega_n^-(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi^{n+1}}\Big) \quad \text{при} \quad \xi \to -\infty. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Оба эти разложения полезно заменить единой формулой:

$$\left.\begin{aligned} \omega(\xi) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{q_k}{\xi^k} + \frac{\overline{q}_k}{\xi^{k-1}|\xi|}\Big) + \omega_n(\xi), \\ \omega_n(\xi) &= O\Big(\frac{1}{\xi^{n+1}}\Big) \quad \text{при} \quad \xi \to \pm\infty, \end{aligned}\right\} \tag{4$'$}$$

где

$$q_k = 0{,}5(q_k^+ + q_k^-), \quad \overline{q}_k = 0{,}5(q_k^+ - q_k^-).$$

Нетрудно заметить, что к интегралу J с ядром, имеющим разложение (4′), нельзя применить теорему 1 работы [1], так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi)\, d\xi$$

при $q_1^+ \neq q_1^-$ не существует даже в смысле главного значения. Поэтому в дальнейшем конечность пределов интегрирования a и b играет существенную роль.

Простейшим примером может служить интеграл

$$J = \int_a^b \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{(x - x_0)^2 + h^2}}$$

с ядром

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (q_1^+ = 1,\ q_1^- = -1).$$

§ 2

В дальнейшем мы пользуемся следующими обозначениями:

$f^{(k)}(x_0)$ — значение производной функции $f(x)$ порядка k в точке $x = x_0$,

$f_k(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$,

$f_k(x)$ — остаточный член в формуле Тейлора,

$$F_{k+1}(x) = \frac{F_k(x) - F_k(x_0)}{x - x_0}, \quad F_0(x) = f(x),$$

$$\Omega_k(\xi) = \xi^k \omega_k(\xi),$$

$$\overline{\Omega}_k(\xi) = \Omega_k(\xi) - \frac{q_{k+1}}{\xi} = \xi^k \omega_{k+1}(\xi),$$

так что

$$\Omega_{k+1}(\xi) = \xi \overline{\Omega}_k(\xi).$$

Нетрудно заметить, что

$$F_k(x) = \frac{f_{k-1}(x)}{(x - x_0)^k}, \quad F_k(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Функция $\overline{\Omega}_k(\xi)$ при $\xi \to \pm\infty$ имеет второй порядок малости:

$$\overline{\Omega}_k(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi^2}\Big),$$

т. е. $\overline{\Omega}_k(\xi)$ — абсолютно интегрируема по любому бесконечному промежутку (c, ∞) или $(-\infty, -c)$, где $c > 0$.

Теорема. *Для интеграла* (1) *имеет место асимптотическое при* $h \to 0$ *разложение*

$$J = \sum_{s=0}^{n} (\hat{J}_s \ln h + J_s) h^s + h^n \rho(h)$$

$$(\rho(h) \to 0 \quad \textit{при} \quad h \to 0), \tag{5}$$

где

$$\hat{J}_s = -(q_{s+1}^+ - q_{s+1}^-)\frac{f^{(s)}(x_0)}{s!}, \tag{6}$$

$$J_s = \left[C_s + q_{s+1}^+ \ln(b - x_0) - q_{s+1}^- \ln(x_0 - a)\right]\frac{f^{(s)}(x_0)}{s!} +$$

$$+ q_{s+1}^+ \int\limits_{x_0}^{b} F_{s+1}(x)\,dx + q_{s+1}^- \int\limits_{a}^{x_0} F_{s+1}(x)\,dx -$$

$$- \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!(s-k)}\left[\frac{q_{k+1}^+}{(b-x_0)^{s-k}} - \frac{q_{k+1}^-}{(a-x_0)^{s-k}}\right], \tag{7}$$

$$C_s = \int\limits_{-1}^{1} ;\Omega_s(\xi)\,d\xi + \int\limits_{1}^{\infty}\left[\overline{\Omega}_s(\xi) + \overline{\Omega}_s(-\xi)\right]d\xi, \tag{8}$$

если выполнены условия:

1) *функция* $f(x)$ *ограничена в* (a, b), $|f(x)| < M$, *и имеет в точке* $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$ *дифференциал* $(n+1)$*-го порядка,*

2) *функция* $\omega(\xi)$ *абсолютно интегрируема на любом конечном промежутке и допускает при* $\xi \to \pm\infty$ *представления* (4).

§ 3

Представим $J[h, x_0; f]$ в виде суммы

$$J = f(x_0)\cdot\frac{1}{h}\int\limits_{a}^{b}\omega(\xi)\,dx + \frac{1}{h}\int\limits_{a}^{b} f_0(x)\omega(\xi)\,dx \quad \left(\xi = \frac{x - x_0}{h}\right),$$

где

$$f_0(x) = f(x) - f(x_0).$$

Прибавляя и вычитая интегралы

$$q_1 \int\limits_{a}^{b} \frac{f_0(x)}{x - x_0}\,dx + \overline{q}_1 \int\limits_{a}^{b} \frac{f_0(x)}{|x - x_0|}\,dx = H_0,$$

получим

$$J = K_0 + H_0 + hA_1, \tag{9}$$

где

$$K_0 = f(x_0) \cdot \frac{1}{h} \int\limits_a^b \omega(\xi)\, dx,$$

$$A_1 = \frac{1}{h^2} \int\limits_a^b f_0(x)\Big[\omega(\xi) - \frac{q_1}{\xi} - \frac{\overline{q}_1}{|\xi|}\Big]\, dx = \frac{1}{h} \int\limits_a^b \Omega_1(\xi) F_1(x)\, dx,$$

$$F_1(x) = \frac{f_0(x)}{x - x_0}, \quad \Omega_1(\xi) = \xi\omega_1(\xi) = \xi\Big[\omega(\xi) - \frac{q_1}{\xi} - \frac{\overline{q}_1}{|\xi|}\Big],$$

$$\Omega_1(x) = \frac{q_2}{\xi} + \frac{\overline{q}_2}{|\xi|} + \ldots + \frac{q_k}{\xi^{k-1}} + \frac{\overline{q}_k}{\xi^{k-2}|\xi|} + \xi\omega_k(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \to \pm\infty.$$

Отсюда видно, что разложение J по h сводится к разложению интеграла A_1 того же типа, а также интеграла K_0.

С помощью аналогичных рассуждений нетрудно убедиться в справедливости реккурентной формулы

$$A_s = K_s + H_s + hA_{s+1} \quad (s \geqslant 0), \tag{10}$$

где приняты следующие обозначения:

$$K_s = F_s(x_0) \cdot \frac{1}{h} \int\limits_a^b \Omega_s(\xi)\, dx, \tag{11}$$

$$H_s = q_{s+1} \int\limits_a^b \frac{F_s(x) - F_s(x_0)}{x - x_0}\, dx + \overline{q}_{s+1} \int\limits_a^b \frac{F_s(x) - F_s(x_0)}{|x - x_0|}\, dx \tag{12}$$

или

$$H_s = q^+_{s+1} \int\limits_{x_0}^b F_{s+1}(x)\, dx + q^-_{s+1} \int\limits_a^{x_0} F_{s+1}(x)\, dx, \tag{12$'$}$$

$$A_s = \frac{1}{h} \int\limits_a^b \Omega_s(\xi) F_s(x)\, dx, \quad A_0 = J. \tag{13}$$

Пользуясь формулами (9) и (10), находим

$$J = \sum_{s=0}^{n-1} H_s h^s + \sum_{s=0}^{n} K_s h^s + h^n (A_n - K_n). \tag{14}$$

Чтобы вычислить коэффициенты при степенях h, надо найти разложение K_s по h.

Предыдущее изложение носило чисто формальный характер, поскольку не выяснились требования, которым должны при этом удовлетворять функция $f(x)$ и ядро $\omega(\xi)$.

§ 4

Перейдем теперь к разложению интеграла

$$K_s = F_s(x_0) \cdot \frac{1}{h} \int_a^b \Omega_s(\xi)\, d\xi = F_s(x_0) \cdot \overline{K}_s.$$

При этом будем учитывать асимптотику для $\Omega_s(\xi)$:

$$\Omega_s(\xi) = \frac{q_{s+1}}{\xi} + \frac{\overline{q}_{s+1}}{|\xi|} + \ldots + \frac{q_{n+1}}{\xi^{n+1-s}} + \frac{\overline{q}_{n+1}}{\xi^{n-s}|\xi|} + \xi^s \omega_{n+1}(\xi).$$

Перепишем выражение для $\overline{K}_s$ в виде суммы

$$\overline{K}_s = \int_{\frac{a-x_0}{h}}^{\frac{b-x_0}{h}} \Omega_s(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} \Omega_s(\xi)\, d\xi + \int_{1}^{\frac{b-x_0}{h}} \Omega_s(\xi)\, d\xi + \int_{\frac{a-x_0}{h}}^{-1} \Omega_s(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{-1}^{1} \Omega_s(\xi)\, d\xi + \int_{1}^{\infty} \overline{\Omega}_s(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{-1} \overline{\Omega}_s(\xi)\, d\xi - \int_{\frac{b-x_0}{h}}^{\infty} \overline{\Omega}_s(\xi)\, d\xi -$$

$$- \int_{-\infty}^{\frac{a-x_0}{h}} \overline{\Omega}_s(\xi)\, d\xi + q_{s+1}^{+} \int_{1}^{\frac{b-x_0}{h}} \frac{d\xi}{\xi} + q_{s+1}^{-} \int_{\frac{a-x_0}{h}}^{-1} \frac{d\xi}{\xi} \tag{15}$$

$$(h > 0!),$$

где

$$\overline{\Omega}_s(\xi) = \Omega_s(\xi) - \frac{q_{s+1}}{\xi} - \frac{\overline{q}_{s+1}}{|\xi|}.$$

Учитывая соотношения

$$\overline{\Omega}_s(\xi) = \sum_{k=1}^{n-s} \frac{q^{+}_{s+k+1}}{\xi^{k+1}} + \xi^s \omega^{+}_{n+1}(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \to +\infty,$$

$$\overline{\Omega}_s(\xi) = \sum_{k=1}^{n-s} \frac{q^{-}_{s+k+1}}{\xi^{k+1}} + \xi^s \omega^{-}_{n+1}(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \to -\infty,$$

находим

$$\int\limits_{\frac{b-x_0}{h}}^{\infty} \overline{\Omega}_s(\xi)\, d\xi + \int\limits_{-\infty}^{\frac{a-x_0}{h}} \overline{\Omega}_s(\xi)\, d\xi =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-s} \frac{h^k}{k} \left[\frac{q^{+}_{s+k+1}}{(b-x_0)^k} - \frac{q^{-}_{s+k+1}}{(a-x_0)^k} \right] + O(h^{n-s+1}). \quad (16)$$

Если подставить (16) в (15), то получим для $\overline{K}_s$ следующее асимптотическое разложение

$$\overline{K}_s = C_s + q^{+}_{s+1} \ln(b-x_0) - q^{-}_{s+1} \ln(x_0-a) - (q^{+}_{s+1} - q^{-}_{s+1}) \ln h -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-s} \frac{h^k}{k} \left(\frac{q^{+}_{s+k+1}}{(b-x_0)^k} - \frac{q^{-}_{s+k+1}}{(a-x_0)^k} \right) + O(h^{n+1-s}), \quad (17)$$

где

$$C_s = \int\limits_{-1}^{1} \Omega_s(\xi)\, d\xi + \int\limits_{1}^{\infty} \left[\overline{\Omega}_s(\xi) + \overline{\Omega}_s(-\xi) \right] d\xi. \quad (8)$$

В формуле (14) фигурирует сумма $\sum\limits_{s=0}^{n} K_s h^s$. Пользуясь выражением (17), преобразуем ее к виду:

$$\sum_{s=0}^{n} (-\alpha_s \ln h + \beta_s) h^s + h^n \rho(h),$$

где α_s и β_s — постоянные, не зависящие от h.

Перепишем K_s в форме:

$$K_s = \Big\{ D_s - (q^+_{s+1} - q^-_{s+1}) \ln h - \\ - \sum_{k=1}^{n-s} \frac{h^k}{k} \left[\frac{q^+_{s+k+1}}{(b-x_0)^k} - \frac{q^-_{s+k+1}}{(a-x_0)^k} \right] \Big\} F_s(x_0) + O(h^{n+1-s}), \quad (18)$$

где

$$D_s = C_s + q^+_{s+1} \ln(b - x_0) - q^-_{s+1} \ln(x_0 - a).$$

Тогда будем иметь

$$\sum_{s=0}^{n} K_s h^s = \\ = \sum_{s=0}^{n} D_s F_s(x_0) h^s - \sum_{s=0}^{n} (q^+_{s+1} - q^-_{s+1}) F_s(x_0) \cdot h^s \ln h - V_n + O(h^{n+1}).$$

После изменения в двойной сумме V_n порядка суммирования

$$V_n = \sum_{s=0}^{n} F_s(x_0) \sum_{k=1}^{n-s} \frac{h^{k+s}}{k} \left[\frac{q^+_{s+k+1}}{(b-x_0)^k} - \frac{q^-_{s+k+1}}{(a-x_0)^k} \right] = \\ = \sum_{j=1}^{n} h^j \sum_{s=0}^{j-1} F_s(x_0) \cdot p^j_{j-s},$$

получим

$$\sum_{s=0}^{n} K_s h^s = \sum_{s=0}^{n} \beta_s h^s - \sum_{s=0}^{n} \alpha_s h^s \ln h + O(h^{n+1}), \quad (19)$$

где

$$\alpha_s = (q^+_{s+1} - q^-_{s+1}) F_s(x_0),$$

$$\beta_s = D_s F_s(x_0) - \sum_{k=0}^{s-1} F_k(x_0) p^s_{s-k} \quad (1 \leqslant s \leqslant n), \quad \beta_0 = D_0 f(x_0),$$

$$P^s_{s-k} = \frac{1}{s-k} \left[\frac{q^+_{s+1}}{(b-x_0)^{s-k}} - \frac{q^-_{s+1}}{(a-x_0)^{s-k}} \right].$$

§ 5

Подставляя выражение (19) для $\sum\limits_{s=0}^{n} K_s h^s$ в формулу (14), приходим к следующей формуле:

$$J = \sum_{s=0}^{n} (\hat{J}_s \ln h + J_s) h^s + h^n (A_n - H_n - K_n) + O(h^{n+1}), \tag{20}$$

где

$$J_s = H_s + \beta_s, \quad \hat{J}_s = -\alpha_s.$$

Лемма. *Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ дифференциал порядка $s+1$, а функция $\omega(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы из § 2, то существует предел*

$$\lim_{h \to 0} (A_s + \alpha_s \ln h) = D_s \frac{f^{(s)}(x_0)}{s!} + H_s$$

для любого $0 < s \leqslant n$.

Доказательство. В самом деле

$$\overline{A}_s = \frac{1}{h} \int\limits_a^b \Omega_s(\xi) F_s(x)\, dx = K_s + A_s^-, \tag{21}$$

где

$$A_s^- = \frac{1}{h} \int\limits_a^b \Omega_s(\xi) [F_s(x) - F_s(x_0)]\, dx. \tag{22}$$

Интеграл $\overline{A}_s$ представим в виде суммы трех интегралов:

$\overline{A}_s^{(1)}$ с пределами интегрирования $x_0 - \eta$ и $x_0 + \eta$,

$\overline{A}_s^{(2)}$ с пределами от $x_0 + \eta$ до b,

$\overline{A}_s^{(3)}$ с пределами от a до $x_0 - \eta$.

В силу непрерывности $F_s(x)$ в точке $x = x_0$ будем иметь: если $|x - x_0| < \eta$, то

$$|F_s(x) - F_s(x_0)| < \varepsilon'(\eta), \quad \text{причем} \quad \varepsilon'(\eta) \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to 0.$$

Поэтому

$$|\overline{A}_s^{(1)}| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0-\eta}^{x_0+\eta}\Omega_s(\xi)[F_s(x)-F_s(x_0)]\,dx\right| \leqslant \varepsilon' \int\limits_{-\frac{\eta}{h}}^{\frac{\eta}{h}} |\Omega_s(\xi)|\,d\xi.$$

Из условий для функции $\omega(\xi)$ следует, что функция $\Omega_s(\xi) = \xi^s\omega_s(\xi)$ абсолютно интегрируема на любом конечном интервале (ср. [1]).

Полагая для определенности $\eta = ch$, $c > 0$, получим

$$|\overline{A}_s^{(1)}| < \varepsilon' \int\limits_{-c}^{c} |\Omega_s(\xi)|\,d\xi = \rho(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Интеграл $\overline{A}_s^{(2)}$ преобразуем следующим образом:

$$\overline{A}_s^{(2)} = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0+ch}^{b} \overline{\Omega}_s(\xi)[F_s(x)-F_s(x_0)]\,dx + q_{s+1}^{+} \int\limits_{x_0+ch}^{b} F_{s+1}(x)\,dx.$$

Первое слагаемое в правой части, в силу ограниченности в (a, b) и непрерывности в точке $x = x_0$ функции $F_s(x)$, а также абсолютной интегрируемости на бесконечном интервале (c, ∞) ядра $\overline{\Omega}_s(\xi)$, имеет оценку

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_0+ch}^{b} \overline{\Omega}_s(\xi)[F_s(x)-F_s(x_0)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_{x_0+ch}^{b} \overline{\Omega}_s(\xi)[F_s(x)-F_s(x_0+ch)]\,dx +$$

$$+ [F_s(x_0+ch)-F_s(x_0)] \int\limits_{c}^{\frac{b-x_0}{h}} \overline{\Omega}_s(\xi)\,d\xi = \rho(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

В самом деле, в силу непрерывности $F_s(x)$ в точке $x = x_0$ имеем

$$F_s(x_0+ch) - F_s(x_0) = \rho(h).$$

Интеграл

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_0+ch}^{b}\overline{\Omega}_s(\xi)[F_s(x)-F_s(x_0+ch)]\,dx$$

следует разбить на сумму двух интегралов I и II с пределами от x_0+ch до $x_0+\delta(h)$ и от $x_0+\delta(h)$ до b, причем $\delta(h)\to 0$, $\dfrac{\delta(h)}{h}\to\infty$ при $h\to 0$. Интеграл I стремится к нулю при $h\to 0$ в силу непрерывности $F_s(x)$ при $x=x_0$ и интегрируемости $\Omega_s(\xi)$ на (c,∞), интеграл II — в силу ограниченности $F_s(x)$, интегрируемости $\Omega_s(\xi)$ и условия $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\delta(h)}{h}=\infty$.

Рассмотрим разность

$$\int\limits_{x_0}^{b}F_{s+1}(x)\,dx-\int\limits_{x_0+ch}^{b}F_{s+1}(x)\,dx=\int\limits_{x_0}^{x_0+ch}F_{s+1}(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x_0+ch}\frac{f_s(x)}{(x-x_0)^{s+1}}\,dx=\int\limits_{0}^{ch}\frac{f_s(x_0+t)}{t^{s+1}}\,dt. \qquad (23)$$

Нетрудно заметить, что она стремится к нулю при $h\to 0$, если, например,

$$f_s(x_0+t)=t^sO(t^\gamma)\quad(\gamma>0).$$

Если же существует дифференциал порядка $s+1$, то $f(x_0+t)=O(t^{s+1})$ и выражение (21) имеет порядок

$$O(h)=h\rho(h),\quad \rho(h)\to 0\quad\text{при}\quad h\to 0$$

.

Таким образом, если выполнены условия леммы, то

$$\lim_{h\to 0}\overline{A}_s^{(2)}=q_{s+1}^{+}\int\limits_{x_0}^{b}F_{s+1}(x)\,dx.$$

Аналогично находим

$$\lim_{h\to 0}\overline{A}_s^{(3)}=\lim_{h\to 0}\int\limits_{a}^{x_0-ch}\overline{\Omega}_s(\xi)[F_s(x)-F_s(x_0)]\,dx=q_{s+1}^{-}\int\limits_{a}^{x_0}F_{s+1}(x)\,dx.$$

Формула (21) принимает вид:

$$\underset{(0\leqslant s\leqslant n)}{A_s} = K_s + H_s + \rho(h), \tag{24}$$

где $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Принимая во внимание разложение (17):

$$K_s = -\alpha_s \ln h + D_s F_s(x_0) + \rho(h),$$

будем иметь

$$A_s + \alpha_s \ln h = H_s + D_s F_s(x_0) + \rho(h).$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Замечание. Если $s = 0$, то в условиях леммы требуется, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0. Тогда утверждение леммы означает существование предела

$$\lim_{h\to 0}(J + \alpha_0 \ln h) = D_0 f(x_0) + H_0,$$

где

$$\alpha_0 = (q_1^+ - q_1^-) f(x_0), \quad D_0 = C_0 + q_1^+ \ln(b - x_0) - q_1^- \ln(x_0 - a),$$

$$C_0 = \int_{-1}^{1} \omega(\xi)\, d\xi + \int_{1}^{\infty} [\omega_1(\xi) + \omega_1(-\xi)]\, d\xi,$$

$$H_0 = q_1^+ \int_{x_0}^{b} \frac{f_0(x)\, dx}{x - x_0} + q_1^- \int_{a}^{x_0} \frac{f_0(x)\, dx}{x - x_0}.$$

Нетрудно, впрочем, заметить, что требование дифференцируемости $f(x)$ сильно завышено; фактически достаточно потребовать существование интегралов

$$\int_{x_0}^{b} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, dx \quad \text{и} \quad \int_{a}^{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, dx;$$

для этого, например, достаточно, чтобы $f(x)$ удовлетворяла в некоторой заданной окрестности точки $x = x_0$ условию Гельдера порядка $\gamma > 0$.

Пользуясь выражением (20), а также только что доказанной леммой, которая позволяет оценить член

$$h^n(A_n - K_n - H_n) = h^n \rho(h),$$

легко убеждаемся в справедливости теоремы, сформулированной в § 2:

$$J = \sum_{s=0}^{n} (\hat{J}_s \ln h + J_s) h^s + h^n \rho(h),$$

где $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

§ 6

Отметим, что члены, содержащие $h^s \ln h$, появляются только в том случае, когда

$$q_{s+1}^{+} \neq q_{s+1}^{-}.$$

Если же все $q_s^{+} = q_s^{-} = q_s$, т. е. все $\hat{J}_s = 0$, то разложение J идет по целым степеням h и коэффициент J_s может быть записан в виде:

$$J_s = a_s \frac{f^s(x_0)}{s!} + q_{s+1} \overline{\int_a^b \frac{f_{s-1}(x)\, dx}{(x - x_0)^{s+1}}} -$$
$$- q_{s+1} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!(s-k)} \left[\frac{1}{(b - x_0)^{s-k}} - \frac{1}{(a - x_0)^{s-k}} \right] \quad (s = 1, 2, \ldots),$$

где

$$a_s = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_s(\xi)\, d\xi} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \xi^s \omega_s(\xi)\, d\xi} .$$

Черта сверху означает, что интеграл понимается в смысле главного значения. В частности, при $s = 0$ имеем

$$J_0 = a_0 f(x_0) + q_1 \overline{\int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx} , \quad a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi)\, d\xi.$$

Если же, кроме того, $q_1 = 0$ ($q_1^+ = q_1^- = 0$), то

$$J_0 = a_0 f(x_0),$$

и мы приходим к случаю, рассмотренному в работе [1].

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Дата поступления 14/I-1959 г.

Список литературы

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* О разложении по параметру интегралов с ядром типа δ-функции // Научн. докл. высшей школы. Сер. физ.-мат. наук. — 1959. — № 1. — С. 54–61.