О РАЗЛОЖЕНИИ ПО ПАРАМЕТРУ ИНТЕГРАЛОВ С ЯДРОМ ТИПА δ-ФУНКЦИИ

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский

§ 1

В настоящей статье мы будем рассматривать интегралы вида

$$J[h, x_0; f] = \int_a^b \Phi(x - x_0, h) f(x)\, dx \quad (a < x_0 < b), \tag{1}$$

где

$$\Phi(x - x_0, h) = \frac{1}{h}\, \omega\Big(\frac{x - x_0}{h}\Big). \tag{2}$$

Нетрудно убедиться в том, что при соответствующих условиях (см. теорему 1) существует предел интеграла (1), равный

$$\lim_{h \to 0} J[h, x_0; f] = J_0 = a_0 f(x_0), \quad a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Таким образом, ядро интеграла (1) при $h \to 0$ имеет характер δ-функции, нормированной к a_0.

Цель настоящей статьи — найти асимптотическое разложение

$$J = J_0 + hJ_1 + h^2 J_2 + \ldots + h^n J_n + h^n \rho(h), \tag{4}$$

где $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Научные доклады высшей школы. Серия физико-математических наук. — 1959. — № 1. — С. 54–61. Министерство высшего и среднего специального образования СССР. — М.: Издательство Высшая школа.

Пользуясь обозначениями, смысл которых указан ниже, можно написать выражения для J_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в виде

$$J_k = a_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + q_{k+1} \overline{\int\limits_a^b \frac{f_{k-1}(x)\,dx}{(x-x_0)^{k+1}}} -$$

$$- q_{k+1} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{f^{(s)}(x_0)}{s!(k-s)} \left[\frac{1}{(b-x_0)^{k-s}} - \frac{1}{(a-x_0)^{k-s}}\right], \quad (5)$$

где $f^{(s)}(x_0)$ — значение производной s-го порядка в точке $x = x_0$,

$$f_k(x) = f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0) - \ldots - \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

$$(f_0(x) = f(x) - f(x_0))$$

остаточный член в формуле Тейлора, q_k — коэффициенты асимптотического разложения функции $\omega(\xi)$ при $\xi \to \pm\infty$:

$$\omega(\xi) = \frac{q_2}{\xi^2} + \frac{q_3}{\xi^3} + \ldots + \frac{q_k}{\xi^k} + \omega_k(\xi), \quad \lim_{\xi\to\infty} \xi^k \omega_k(\xi) = 0,$$

коэффициенты a_k определяются формулами

$$a_k = \overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^k \omega_k(\xi)\,d\xi}\ .$$

Черта сверху над интегралом указывает на то, что интеграл берется в смысле главного значения в точке $x = x_0$ (или $\xi = \pm\infty$).

§ 2

Теорема 1. *Если:*

1) *функция* $f(x)$ *ограничена,* $|f(x)| < M$ $(a < x < b)$ *и непрерывна в точке* $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$,

2) *функция* $\omega(\xi)$ *абсолютно интегрируема,* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\omega(\xi)|\,d\xi \leqslant K_0$,

то существует предел

$$\lim_{h\to 0} J[h, x_0; f] = J_0 = a_0 f(x_0).$$

Доказательство. Пусть дано некоторое число $\varepsilon > 0$. Покажем, что можно найти такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что будет выполняться неравенство

$$\left|J[h, x_0; f] - J_0\right| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad h < \delta(\varepsilon) \quad (h > 0!).$$

Возьмем разность

$$J - J_0 = \frac{1}{h}\int_a^b \omega(\xi) f_0(x)\,dx + \\ + f(x_0)\left[\int_{-\infty}^{\frac{a-x_0}{h}} \omega(\xi)\,d\xi + \int_{\frac{b-x_0}{h}}^{\infty} \omega(\xi)\,d\xi\right] = C_0 + B_0 \quad \left(\xi = \frac{x-x_0}{h}\right)$$

и представим C_0 в виде суммы трех интегралов

$$C_0 = \frac{1}{h}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \omega(\xi) f_0(x)\,dx + \frac{1}{h}\int_{x_0+\eta}^{b} \omega(\xi) f_0(x)\,dx + \\ + \frac{1}{h}\int_a^{x_0-\eta} \omega(\xi) f_0(x)\,dx = C_0^{(1)} + C_0^{(2)} + C_0^{(3)}.$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ можно указать такое $\eta(\varepsilon') > 0$, что

$$|f_0(x)| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{6K_0}, \quad \text{если только} \quad |x - x_0| < \eta|\varepsilon'|.$$

Отсюда следует, что

$$|C_0^{(1)}| \leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |\omega(\xi)||f_0(x)|\,dx < \varepsilon' \int_{-\frac{\eta}{h}}^{\frac{\eta}{h}} |\omega(\xi)|\,d\xi \leqslant \varepsilon' K_0 = \frac{\varepsilon}{6}.$$

Если h достаточно мало, то

$$\left|C_0^{(2)}\right| \leqslant \frac{2M_0}{h} \int\limits_{x_0+\eta}^{b} |\omega(\xi)|\,dx = 2M_0 \int\limits_{\frac{\eta}{h}}^{\frac{b-x_0}{h}} |\omega(\xi)|\,d\xi < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|C_0^{(3)}\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

что следует из абсолютной интегрируемости $\omega(\xi)$. Аналогично убеждаемся в том, что для B_0 имеет место оценка

$$|B_0| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

В результате получаем

$$|J - J_0| < \varepsilon,$$

если только h достаточно мало: $h < \delta(\varepsilon)$.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями: $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ — четная и нечетная части функции $\omega(\xi)$, $\varphi_k(\xi)$ и $\psi_k(\xi)$ — четная и нечетная части функции $\omega_k(\xi)$, причем, очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$\omega(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\xi), \quad \omega_k(\xi) = \varphi_k(\xi) + \psi_k(\xi),$$

$$\varphi_{2n}(\xi) = \varphi_{2n+1}(\xi), \quad \psi_{2n-1}(\xi) = \psi_{2n}(\xi).$$

§ 3

Т е о р е м а 2. *Существует предел*

$$\lim_{h\to 0} \frac{J[h, x_0; f] - J_0 - hJ_1 - \ldots - h^{k-1}J_{k-1}}{h^k} = J_k, \tag{6}$$

где J_k дается формулой (5), если выполнены следующие условия:

1. *Функция $f(x)$ ограничена, $|f(x)| < M$ $(a < x < b)$, а в точке $x = x_0$, $a < x_0 < b$, имеет дифференциал порядка $k+1$, так что*

$$f(x) + f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) + f_{k+1}(x),$$

где

$$f_{k+1}(x) = O[(x - x_0)^{k+1}].$$

2. *Функция $\omega(\xi)$ абсолютно интегрируема на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ и при $\xi \to \pm\infty$ имеет следующее асимптотическое представление*

$$\omega(\xi) = \frac{q_2}{\xi^2} + \frac{q_3}{\xi^3} + \ldots + \frac{q_{k+1}}{\xi^{k+1}} + \omega_{k+1}(\xi), \tag{7}$$

где

$$\omega_{k+1}(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi^{k+2}}\Big) \quad \text{при} \quad \xi \to \pm\infty.$$

§ 4

Покажем сначала, что при четном $k = 2m$ функции

$$\xi^k \varphi_k(\xi) \quad \text{и} \quad \xi^{k+1}\psi_{k+1}(\xi),$$

а при нечетном значении $k = 2m + 1$ функции

$$\xi^k \psi_k(\xi) \quad \text{и} \quad \xi^{k+1}\varphi_{k+1}(\xi)$$

абсолютно интегрируемы, если функция $\omega(\xi)$ удовлетворяет условиям 2 теоремы 2.

В самом деле, при четном k имеем

$$\xi^k \varphi_k(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi^2}\Big) \quad \text{при} \quad \xi \to \pm\infty, \tag{8}$$

$$\xi^k \varphi_k(\xi) = \xi^k \varphi_k(\xi) - q_2\xi^{k-2} - \ldots - q_{k-2}\xi^2 - q_k. \tag{9}$$

Далее, можно написать

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\xi^k \varphi_k(\xi)\right| d\xi = \int\limits_{-1}^{1} \left|\xi^k \varphi_k(\xi)\right| d\xi + \int\limits_{-\infty}^{-1} \left|\xi^k \varphi_k(\xi)\right| d\xi + \int\limits_{1}^{\infty} \left|\xi^k \varphi_k(\xi)\right| d\xi.$$

Каждое из слагаемых в правой части существует, что следует из приведенных выше формул (8) и (9).

Аналогично убеждаемся в абсолютной интегрируемости функций $\xi^{k+1}\psi_{k+1}(\xi)$ и $\xi^k\psi_k(\xi)$, $\xi^{k+1}\varphi_{k+1}(\xi)$ для нечетного k.

В формулировке теоремы 2 используется обозначение

$$J_m = \overline{J}_m - G_m, \quad 0 \leqslant m \leqslant k, \tag{10}$$

где

$$\overline{J}_m = a_m \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + q_{m+1} \int\limits_a^b \frac{f_{m-1}(x)}{(x-x_0)^{m+1}}\, dx, \tag{11}$$

$$G_m = q_{m+1} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{f^{(s)}(x_0)}{s!(m-s)} \Big[\frac{1}{(b-x_0)^{m-s}} - \frac{1}{(a-x_0)^{m-s}} \Big]. \tag{12}$$

Лемма 1. *Если выполнены условия 1 и 2 теоремы 2, то интегралы, входящие в формулу для J_m, $m \leqslant k$, имеют смысл.*

Доказательство. В самом деле,

$$a_m = \overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^m \omega_m(\xi)\, d\xi} = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^m \varphi_m(\xi)\, d\xi & \text{для четного} \quad m, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^m \psi_m(\xi)\, d\xi & \text{для нечетного} \quad m. \end{cases}$$

Выше было показано, что интегралы в правой части существуют.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\overline{\int\limits_a^b \frac{f_{m-1}(x)\, dx}{(x-x_0)^{m+1}}} = \overline{\int\limits_a^b \frac{f_m(x) + \dfrac{(x-x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0)}{(x-x_0)^{m+1}}\, dx} =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{f_m(x)\, dx}{(x-x_0)^{m+1}} + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \overline{\int\limits_a^b \frac{dx}{x-x_0}}\,.$$

Первый интеграл понимается в обычном смысле, так как

$$f_m(x) = o[(x-x_0)^m] \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

а второй интеграл понимается в смысле главного значения и может быть вычислен:

$$\overline{\int\limits_a^b \frac{dx}{x-x_0}} = \ln \frac{b-x_0}{x_0-a}.$$

Тем самым лемма 1 доказана.

§ 5

Введем следующие обозначения

$$F_m(x) = \frac{F_{m-1}(x) - F_{m-1}(x_0)}{x - x_0}, \quad F_0(x) = f(x);$$

$$A_m = \frac{1}{h}\int\limits_a^b F_m(x)\Omega_m(\xi)\,dx, \quad m \geqslant 1, \quad A_0 = J; \tag{13}$$

$$\Omega_m(\xi) = \xi^m \omega_m(\xi),$$

$$\Omega_0(\xi) = \omega(\xi).$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$F_m(x) = \frac{F_{m-1}(x)}{(x - x_0)^m},$$

$$F_m(x_0) = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

Покажем, что имеет место реккурентная формула

$$A_{m+1} = \frac{A_m + B_m - \overline{J}_m}{h}, \tag{14}$$

где

$$B_m = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{-\infty}^{a} \overline{\Omega}_m(\xi)\,dx + \int\limits_{b}^{\infty} \overline{\Omega}_m(\xi)\,dx\right] \cdot F_m(x_0) \quad \left(\xi = \frac{x - x_0}{h}\right),$$

$$\overline{\Omega}_m(\xi) = \Omega_m(\xi) - \frac{q_{m+1}}{\xi} \quad (q_1 = 0),$$

$$\xi\overline{\Omega}_m(\xi) = \Omega_{m+1}(\xi),$$

A_{m+1} определяется формулой (13).

В самом деле, простые преобразования дают:

$$A_m + B_m - \overline{J}_m = \frac{1}{h}\int\limits_a^b \Omega_m(\xi)[F_m(x) - F_m(x_0)]\,dx -$$

$$- \overline{q_{m+1}\int\limits_a^b \frac{f_{m-1}(x)}{(x-x_0)^{m+1}}\,dx} = \frac{1}{h}\int\limits_a^b \Omega_m(\xi)[F_m(x) - F_m(x_0)]\,dx -$$

$$- q_{m+1}\int\limits_a^b F_{m+1}(x)\,dx = \frac{1}{h}\int\limits_a^b \overline{\Omega}_m(\xi)[F_m(x) - F_m(x_0)]\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b \Omega_{m+1}(\xi)F_{m+1}(x)\,dx = hA_{m+1}.$$

В частности, если $m = 0$, то

$$A_0 = J, \quad \Omega_1(\xi) = \xi\omega(\xi) \quad (q_1 = 0),$$

$$A_1 = \frac{A_0 + B_0 - \overline{J}_0}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_a^b F_1(x)\Omega_1(\xi)\,dx.$$

Последовательно применяя реккурентную формулу (14), получим следующее выражение для J:

$$J = \sum_{s=0}^{k} \overline{J}_s h^s - \sum_{s=0}^{k} B_s h^s + h^{k+1}A_{k+1}. \tag{15}$$

Лемма 2. *Если выполнены условия теоремы 2, то*

$$B_s = F_s(x_0)\sum_{m=1}^{k} \frac{q_{s+m+1}}{m}\,h^m\left[\frac{1}{(b-x_0)^m} - \frac{1}{(a-x_0)^m}\right] + O(h^{k+1}), \tag{16}$$

$$\sum_{s=0}^{k} B_s h^s = \sum_{s=0}^{k} G_s h^s + O(h^{k+1}), \tag{17}$$

где G_s определяется формулой (12).

Доказательство. В самом деле, пользуясь при больших ξ асимптотическим представлением для

$$\omega_s(\xi) = \omega_{k+1}(\xi) + \sum_{j=s+1}^{k+1} \frac{q_j}{\xi^j}, \quad \omega_{k+1}(\xi) + O\Big(\frac{1}{\xi^{k+2}}\Big),$$

нетрудно получить формулу для B_s.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{s=0}^{k} B_s h^s = \sum_{s=0}^{k} F_s(x_0) \sum_{m=1}^{k} q_{m+s+1} p_m h^{s+m} + O(h^{k+1}),$$

где

$$p_m = \frac{1}{m}\Big[\frac{1}{(b-x_0)^m} - \frac{1}{(a-x_0)^m}\Big].$$

Меняя порядок суммирования, будем иметь

$$\sum_{s=0}^{k} B_s h^s = \sum_{s=0}^{k} F_s(x_0) \sum_{j=s+1}^{k} q_{j+1} p_{j-s} h^j + O(h^{k+1}) = \\ = \sum_{j=1}^{k} G_j h^j + O(h^{k+1}),$$

где

$$G_j = q_{j+1} \sum_{s=0}^{j-1} F_s(x_0) p_{j-s}.$$

§ 6

Лемма 3. *Если выполнены условия теоремы 2, то существует предел*

$$\lim_{h\to 0} A_m = \overline{J}_m \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant m \leqslant k.$$

Доказательство. Из предыдущего следует, что

$$A_m - \overline{J}_m = -B_m + \frac{1}{h}\int_a^b \overline{\Omega}_m(\xi)[F_m(x) - F_m(x_0)]\,dx \quad \Big(\xi = \frac{x-x_0}{h}\Big).$$

Если m четно, то

$$\overline{\Omega}_m = \xi^m \varphi_m + \xi^m \psi_{m+1}$$

и

$$\frac{1}{h}\int\limits_a^b \overline{\Omega}_m(\xi)\big[F_m(x) - F_m(x_0)\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_a^b \big[\xi^m\varphi_m(\xi)\big]\,\big[F_m(x) - F_m(x_0)\big]\,dx + \int\limits_a^b \big[\xi^{m+1}\psi_{m+1}(\xi)\big]F_{m+1}(x)\,dx.$$

Функции $\xi^m\varphi_m(\xi)$ и $\xi^{m+1}\psi_{m+1}(\xi)$ абсолютно интегрируемы. Поэтому к интегралам в правой части предыдущего равенства применима теорема 1, в силу которой оба эти интеграла стремятся к нулю при $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_a^b \big[\xi^m\varphi_m(\xi)\big]\big[F_m(x) - F_m(x_0)\big]\,dx = a_m\big[F_m(x_0) - F_m(x_0)\big] = 0,$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_a^b \big[\xi^{m+1}\psi_{m+1}(\xi)\big]F_{m+1}(x)\,dx = a_{m+1}F_{m+1}(x_0)\cdot\lim_{h\to 0} h = 0.$$

Кроме того, из формулы (16) видно, что $B_m = O(h)$ при $h \to 0$ для любого $m \geqslant 0$. Поэтому можно написать

$$A_m - \overline{J}_m = \rho(h),$$

где $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Если m нечетно, то

$$\overline{\Omega}_m(\xi) = \xi^m\psi_m(\xi) + \xi^m\varphi_{m+1}(\xi)$$

и в предыдущих рассуждениях достаточно лишь φ и ψ поменять местами (точнее φ_m и ψ_m, ψ_{m+1} и φ_{m+1}).

Из леммы 3 следует, что при выполнении условий теоремы имеет место оценка

$$hA_{k+1} = A_k + B_k - \overline{J}_k = \rho(h) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Собирая все полученные выше оценки и пользуясь формулой (15), будем иметь

$$J = \sum_{s=0}^{k} J_s h^s + h^k \rho(h),$$

где

$$J_s = \overline{J}_s - G_s.$$

Тем самым доказано существование предела

$$\lim_{h \to 0} \frac{J - \sum\limits_{s=0}^{k-1} J_s h^s}{h^k} = J_k.$$

§ 7

Если $a = -\infty$, $b = \infty$, то все $G_k = 0$ и выражение для J_k упрощается:

$$J_k = \overline{J}_k = a_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + q_{k+1} \overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{k-1}(x)}{(x - x_0)^{k+1}}\, dx} \,. \tag{18}$$

Если, кроме того, функция $\omega(\xi)$ такова, что все $q_k = 0$, то формулы для J_k еще более упрощаются:

$$J_k = a_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad a_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^k \omega(\xi)\, d\xi \quad (\omega_k(\xi) = \omega(\xi)).$$

Это соответствует тому случаю, когда при $\xi = \pm\infty$

$$\frac{d^k \omega}{d\left(\dfrac{1}{\xi}\right)^k} = 0 \quad \text{для всех} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Таким свойством обладает, например, ядро интеграла Пуассона для уравнения теплопроводности, равное

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}.$$

В этом случае разложение интеграла J в ряд по степеням h может быть получено элементарно, так как все элементы a_k функции $\omega(\xi)$ существуют.

Производя замену переменных $\xi = \frac{x - x_0}{h}$ и разлагая $f(x_0 + \xi h)$ в ряд Тейлора, сразу получим

$$J[h, x_0; f] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) f(x_0 + \xi h)\, d\xi =$$

$$a_0 f(x_0) + a_1 f'(x_0) + \ldots + a_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \ldots,$$

где

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^k \omega(\xi)\, d\xi.$$

Если функция $\omega(\xi)$ четная, то все моменты нечетного порядка a_{2m+1} равны нулю и разложение идет только по четным степеням h.

Однако этот прием получения разложения невозможен, например, для функции

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2}, \tag{19}$$

которая является ядром интеграла Пуассона, дающего решение задачи Дирихле для полуплоскости $y = h \geqslant 0$:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - x')^2 + y^2} f(x')\, dx'.$$

Нетрудно заметить, что для функции (19) моменты $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^k \omega(\xi)\, d\xi$ не существуют уже для $k \geqslant 2$ и поэтому разложение вида (18) невозможно.

Между тем, в силу теоремы 2, функция $u(x, y)$ имеет следующее асимптотическое представление

$$u(x, y) = f(x) + y J_1(x) + y^2 J_2(x) + \ldots,$$

где

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(x')}{(x - x')^2}\, dx'}\,, \quad J_2 = -\frac{f''(x)}{2} \ldots$$

При этом мы используем разложение

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\xi^{2(n+1)}}, \quad q_{2n+1} = 0, \quad q_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{\pi}.$$

В условии теоремы 2 содержатся предположения об ограниченности функции $f(x)$ и о ее поведении в окрестности точки $x = x_0$. Таким образом, асимптотическое разложение $J[h, x_0; f]$ имеет место во всех точках, отличных от точек разрыва функции $f(x)$ и ее производных.

Предположим теперь, что ядро $\omega(\xi)$ имеет асимптотику вида:

$$\widetilde{\omega}(\xi) = \frac{q_1}{\xi} + \frac{q_2}{\xi^2} + \ldots + \frac{q_k}{\xi^k} + \omega_k(\xi) = \frac{q_1}{\xi} + \omega(\xi),$$

т. е. $q_1 \neq 0$, $\widetilde{\omega}_1 = \omega(\xi)$. Представляем $\widetilde{J}$ в виде суммы

$$\widetilde{J} = q_1 f(x_0) \overline{\int_a^b \frac{dx}{x - x_0}} + q_1 \int_a^b \frac{f_0(x)}{x - x_0}\, dx + \frac{1}{h} \int_a^b f(x)\omega(\xi)\, dx =$$

$$= J + q_1 \overline{\int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx}\,, \quad J = \frac{1}{h} \int_a^b f(x)\omega(\xi)\, dx.$$

Для интеграла J имеет место вся изложенная выше теория.

Таким образом, в разложении (5) изменится лишь формула для $\widetilde{J}_0$:

$$\widetilde{J}_0 = a_0 f(x_0) + q_1 f(x_0) \ln \frac{b - x_0}{x_0 - a} + q_1 \int_a^b \frac{f_0(x)}{x - x_0}\, dx =$$

$$= a_0 f(x_0) + q_1 \overline{\int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx}.$$

Нетрудно заметить, что развитый выше метод разложения интеграла J по степеням h без существенных изменений переносится на случай многих переменных.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Дата поступления 7/I-1959 г.