# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ *

Член-корреспондент АН СССР А.Н. ТИХОНОВ и

А.А. САМАРСКИЙ

Как известно, всякий линейный функционал $A[f]$, определенный в классе $C_0$ непрерывных функций, заданных в интервале $(a, b)$, представляется с помощью интеграла Стильтьеса

$$A[f] = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – функция с ограниченной вариацией (теорема Рисса). Известно также, что этот функционал может быть продолжен на класс $Q_0$ кусочно-непрерыванных функций. Однако это продолжение неоднозначно.

Цель настоящей статьи – дать представление для произвольного линейного функционала, определенного в $Q_0$.

§1. Рассмотрим линейный функционал $A[f]$, определяемый условиями

1) $A[f_1 + f_2] = A[f_1] + A[f_2]$;

2) $|A[f]| \leqslant M \sup|f|$ в классе $Q_0(f)$ кусочно-непрерывных функций, заданных в интервале $(a, b)$.

Рассмотрим кусочно-непрерывные функции

$$\eta_\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a < x < \xi; \\ 0 & \text{при} \quad \xi \leqslant x < b; \end{cases}$$

$$\pi_\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = \xi; \\ 0 & \text{при} \quad x \neq \xi \end{cases}$$

и обозначим

$$\alpha(\xi) = A[\eta_\xi(x)], \qquad \sigma(\xi) = A[\pi_\xi(x)].$$

В частности, $\alpha(b) = A[1]$, так как $\eta_b(x) = 1$.

В дальнейшем будет показано, что функция $\alpha(\xi)$ и $\sigma(\xi)$, которые мы назовем **характеристическими**, однозначно определяют линейный функционал на $Q_0$.

*ДАН СССР, т. 122, №2, 1958, с. 188-191.

§2. **Лемма 1.** *Существует не более счетного числа точек* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_j, \ldots$, *в которых* $\sigma(\xi) \neq 0$, *причем*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sigma(\zeta_j)| \leqslant M.$$

Будем называть линейный функционал $A[f] = f(\zeta)\,\sigma(\zeta)$, где $a < \zeta < b$, **простейшим точечным функционалом точки** $\zeta$.

Линейный функционал, представимый в виде суммы простейших точечных функционалов:

$$A[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j\, f(\zeta_j) \qquad \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\sigma_j| \leqslant M\right),$$

будем называть **точечным функционалом**.

Линейный функционал $\overline{A}[f]$ будем называть **регулярным**, если $\overline{\sigma}(\xi) = \overline{A}[\pi_\xi(x)] \equiv 0$ при любом $a < \xi < b$.

§3. Покажем, что всякий линейный функционал $A[f]$ может быть представлен в виде суммы регулярного и точечного линейных функционалов.

Рассмотрим точечный функционал $A^*[f]$, равный

$$A^*[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(\zeta_j)\, f(\zeta_j),$$

где

$$\sigma(\zeta_j) = A[\pi_{\xi_j}(x)], \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |\sigma(\zeta_j)| \leqslant M.$$

Линейный функционал

$$\overline{A}[f] = A[f] - A^*[f],$$

как нетрудно заметить, является регулярным и имеет норму $\overline{M} \leqslant 2M$. Отсюда и следует возможность представления

$$A[f] = \overline{A}[f] + A^*[f].$$

Характеристическая функция для $A^*[f]$ равна

$$\alpha^*(\xi) = A^*[\eta_\xi(x)] = \sum_{\zeta_j < \xi} \sigma(\zeta_j),$$

а характеристическая функция для $\overline{A}[f]$ дается формулой

$$\overline{\alpha}(\xi) = \overline{A}[\eta_\xi(x)] = \alpha(\xi) - \alpha^*(\xi).$$

§4. **Лемма 2.** *Функция $\overline{\alpha}(\xi)$ имеет ограниченную вариацию.*

Всякая функция ограниченной вариации в каждой точке имеет правое и левое предельные значения:

$$\overline{\alpha}_{\text{п}}(\xi) = \overline{\alpha}(\xi + 0), \qquad \overline{\alpha}_{\text{л}}(\xi) = \overline{\alpha}(\xi - 0).$$

**Лемма 3.** *Существует не более счетного числа точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$, в которых $\overline{\alpha}_{\text{л}}(\xi_i) \neq \overline{\alpha}(\xi_i)$ или $\overline{\alpha}(\xi_i) \neq \overline{\alpha}_{\text{п}}(\xi_i)$.*

Следует отметить, что $\alpha(\xi)$ является также функцией с ограниченной вариацией.

§5. Рассмотрим функционал

$$\overline{\overline{A}}[f] = \overline{A}[f] - \sum_{\xi_i<\xi} f_{\text{п}}(\xi_i)[\overline{\alpha}_{\text{п}}(\xi_i) - \overline{\alpha}(\xi_i)] - \sum_{\xi_i\leqslant\xi} f_{\text{л}}(\xi_i)[\overline{\alpha}(\xi_i) - \overline{\alpha}_{\text{л}}(\xi_i)]$$

и его характеристическую функцию

$$\overline{\overline{\alpha}}(\xi) = \overline{\overline{A}}[\eta_\xi(x)] = \overline{\alpha}_{\text{л}}(\xi) - \sum_{\xi_i<\xi}[\overline{\alpha}_{\text{п}}(\xi_i) - \overline{\alpha}_{\text{л}}(\xi_i)]. \qquad (1)$$

Эта формула имеет место как в том случае, когда $\xi$ – точка разрыва функции $\overline{\alpha}(\xi)$, так и в случае, когда $\xi$ есть точка непрерывности и $\overline{\alpha}_{\text{л}}(\xi) = \overline{\alpha}(\xi)$.

**Лемма 4.** *Функция $\overline{\overline{\alpha}}(\xi)$ непрерывна при $a < \xi < b$ и $\overline{\overline{\sigma}}(\xi) = \overline{\overline{A}}[\pi_\xi(x)] = 0$.*

Отметим, что $\overline{\overline{\alpha}}(\xi)$ имеет ограниченную вариацию $\overline{\overline{M}} \leqslant 2\overline{M}$.

**Лемма 5.** *Если для некоторого регулярного функционала $\overline{\overline{A}}[f]$ характеристическая функция $\overline{\overline{\alpha}}(\xi)$ непрерывна, то в классе $Q_0(f)$ имеет место представление*

$$\overline{\overline{A}}[f] = \int_a^b f(x)\, d\overline{\overline{\alpha}}(x).$$

В самом деле, разобьем интервал $(a, b)$ на части точками $x = x_i$, включая все точки разрыва функции $f(x)$, и возьмем ступенчатую функцию

$$\overline{f}(x) = f_{\text{п}}(x_{i-1}), \qquad x_{i-1} < x \leqslant x_i.$$

Разность $f(x) - \overline{f}(x)$ можно представить в виде

$$f(x) - \overline{f}(x) = \varepsilon(x) + \sum_i [f(x_{i-1}) - f_n(x_{i-1})]\pi_{x_{i-1}}(x),$$

где $\varepsilon(x)$ – кусочно-непрерывная функция, причем $|\varepsilon(x)| < \varepsilon_0$ при достаточно густой сети. Отсюда следует, что

$$\left|\overline{\overline{A}}[f(x)] - \overline{\overline{A}}[\overline{f}(x)]\right| \leqslant \overline{\overline{M}}\varepsilon_0 \qquad (\overline{\overline{\sigma}}(x_i) = 0)$$

или

$$\left|\overline{\overline{A}}[f] - \sum_i f_n(x_{i-1})[\overline{\overline{\alpha}}(x_i) - \overline{\overline{\alpha}}(x_{i-1})]\right| \leqslant M\varepsilon_0 .$$

Переходя к пределу при $\Delta x = x_i - x_{i-1} \to 0$, получаем

$$\overline{\overline{A}}[f] = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f_n(x_{i-1})[\overline{\overline{\alpha}}(x_i) - \overline{\overline{\alpha}}(x_{i-1})] = \int_a^b f(x)\, d\overline{\overline{\alpha}}(x).$$

Из построения $\overline{\overline{\alpha}}(x)$ видно, что эта функция является непрерывной частью функции $\overline{\alpha}(x)$.

§**6.** Таким образом, имеет место

**Теорема 1.** *Всякий линейный функционал $A[f]$, определенный в классе $Q_0(f)$ кусочно-непрерывных функций $f(x)$, заданных на интервале $(a, b)$, может быть представлен в виде*

$$A[f] = \int_a^b f(x)\, d\overline{\overline{\alpha}}(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \{ f_n(\xi_i)[\overline{\alpha}_n(\xi_i) - \overline{\alpha}(\xi_i)] + f_n(\xi_i)[\overline{\alpha}(\xi_i) - \overline{\alpha}_n(\xi_i)]\} + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(\zeta_j)\, f(\zeta_j), \quad (2)$$

*где*

$$\overline{\alpha}(\xi) = \alpha(\xi) - \sum_{\zeta_j < \xi} \sigma(\zeta_j);$$

*$\alpha(\xi)$ и $\sigma(\xi)$ – характеристические функции функционала $A[f]$; $\overline{\overline{\alpha}}(\xi)$ – непрерывная часть функции $\overline{\alpha}(\xi)$, вычисляемая по формуле* (1).

Отметим, что для непрерывной функции

$$\overline{A}[f] = \int_a^b f(x)\, d\overline{\overline{\alpha}}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)[\overline{\alpha}_n(\xi_i) - \overline{\alpha}_n(\xi_i)],$$

т.е. регулярный функционал $\overline{A}[f]$ полностью определяется характеристической функцией $\overline{\alpha}(\xi)$ в точках ее непрерывности.

§7. Линейный функционал

$$\Gamma[f] = \sum_{j=1}^{\infty}[\omega_j^{(0)} f(\xi_j) + \omega_j^{(1)} f_{\text{л}}(\xi_j) + \omega_j^{(2)} f_{\text{п}}(\xi_j)], \qquad \text{где} \quad \omega_j^{(0)} + \omega_j^{(1)} + \omega_j^{(2)} = 0,$$

будем называть **нуль-функционалом.**

В классе $C_0(f)$ нуль-функционал всегда равен нулю. Если $\Gamma = \Gamma_R$ – регулярный функционал, то $\omega_j^{(0)} = 0$, $\omega_j^{(1)} = -\omega_j^{(2)}$ и

$$\Gamma_R[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^{(2)} [f_{\text{п}}(\xi_j) - f_{\text{л}}(\xi_j)].$$

**Теорема 2.** *Разность двух линейных функционалов, совпадающих на $C_0(f)$, является на $Q_0(f)$ нуль-функционалом.*

§8. Линейный функционал $A[f]$ будем называть **неотрицательным (положительным)**, если $A[f] \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$ ($A[f] > 0$ при $f \geqslant \epsilon > 0$).

**Теорема 3.** *Для неотрицательности (положительности) линейного функционала $A[f]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) *характеристическая функция $\overline{\alpha}(\xi)$ регулярной части $\overline{A}[f]$ функционала $A[f]$ является неубывающей функцией;*

2) *характеристические коэффициенты $\sigma(\zeta_j)$ неотрицательны: $\sigma(\zeta_j) \leqslant 0$ (1), 2) и 3) $\alpha(b) = A[1] > 0$).*

§9. Назовем линейные регулярные функционалы $A[f]$ и $B[f]$, определенные на $Q_0(f)$, **взаимно-симметричными**, если выполнено условие

$$B[f(x)] = A[f(-x)]$$

для любой функции $f(x) \in Q_0$, заданной в интервале $(a, b)$.

**Теорема 4.** *Условия*

$$\alpha(b) = \beta(b), \qquad b = -a, \qquad \beta(\xi) + \alpha(-\xi) = \alpha(b) = \beta(b)$$

*необходимы и достаточны для взаимной симметрии $A[f]$ и $B[f]$.*

**§10.** Для некоторых приложений требуется представление линейных функционалов на $Q_m(f)$ $(m > 0)$, где $Q_m$ – класс функций, кусочно-непрерывных в $(a,\, b)$ вместе со своими производными до $m$-го порядка включительно. Поскольку характеристические функции $\alpha(\xi) = A[\eta_\xi(x)]$ и $\sigma(\xi) = A[\pi_\xi(x)]$ функционала $A[f]$ определяются при помощи функций, входящих в класс $Q_m$, то для $A[f]$, определенного на $Q_m(f)$, имеет место представление (2).

Нетрудно убедиться в том, что линейный функционал $A$, заданный на $Q_m$, может быть однозначно продолжен и на более широкий класс функций, например, на класс функций $R_{\overline{\alpha}(x)}(f)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $f(x)$ – ограниченная, измеримая на $(a,\, b)$ функция, 2) $f(x)$ имеет правое и левое предельные значения $f_{\text{л}}$ и $f_{\text{п}}$ во всех точках разрыва функции $\overline{\alpha}(x)$.