УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *

А.А. САМАРСКИЙ

1. Рассматривается первая краевая задача в области

$$\overline{Д}\ (\eta_0(t) \le x \le \eta_{n+1}(t), 0 \le t \le T)$$

для уравнения

$$Lu = u_{xx} - u_t - a(x,t)u_x - b(x,t)u(x,t) = -f(x,t) \qquad (1)$$

в случае кусочно-непрерывных и кусочно-дифференцируемых функций $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $f(x,t)$. К уравнению (1) с помощью известного преобразования [1] сводится общее уравнение параболического типа. В частности, уравнение теплопроводности

$$u_{\bar{t}} = [k(\bar{x},\bar{t})u_{\bar{x}}]_{\bar{x}} + f(\bar{x},\bar{t})\ (k(\bar{x},\bar{t}) \ge k_0 > 0) \qquad (2)$$

путём замены переменных

$$x = \int^{\bar{x}} \frac{d\alpha}{\sqrt{k(\alpha,\bar{t})}}, \quad t = \bar{t} \qquad (3)$$

преобразуется к виду (1). Если $k(\bar{x},\bar{t})$ имеет разрыв первого рода на некоторой кривой C, то то на этой кривой обычно ставятся условия непрерывности $u(\bar{x},\bar{t})$ и потока $(-ku_{\bar{x}})$:

$$[u] = 0, \quad [ku_{\bar{x}}] = 0 \qquad (4)$$

В новых переменных (3) условия сопряжения (4) имеют аналогичный вид

$$[u] = 0, \quad [\sqrt{k}u_x] = 0. \qquad (4')$$

2. Рассмотрим конечное число непересекающихся попарно в $\overline{Д}$ кривых $\{C_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, заданных на отрезке $0 \le t \le T$ уравнениями $x = \eta_i(t)$; перенумеруем их так, чтобы $\eta_{i_1}(t) < \eta_{i_2}(t)$ при $i_1 < i_2$.

*ДАН СССР, т.121, № 2, 1958, с.225-228.

Обозначим Δ_i, $Д$ следующие области:

$$\Delta_i = (\eta_i(t) < x < \eta_{i+1}(t),\ 0 < t \leq T), \quad 0 \leq i \leq n; \qquad Д = \sum_{i=0}^{n} \Delta_i$$

и введём необходимые для дальнейшего определения:

1) Совокупность кривых $\{C_i\}$, $0 \leq i \leq n+1$, принадлежащих замкнутой области $\overline{Д}$, образует класс K_γ, если: а) каждая кривая C_i $(0 \leq i \leq n+1)$ дифференцируема и производная $\eta_i'(t)$ удовлетворяет на отрезке $0 \leq t \leq T$ условию Гёльдера порядка γ; б) кривые $\{C_i\}$ попарно не пересекаются в $\overline{Д}$.

2) Функция $\psi(x,t)$ принадлежит классу A_γ^κ $(\psi \in A_\gamma^\kappa)$, если она определена во всех областях Δ_i $(0 \leq i \leq n)$ и в каждой области Δ_i удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\gamma > 0$ по t и порядка $\kappa > 0$ по x. Очевидно, что $\psi(x,t)$ является в $Д$ кусочно-непрерывной функцией, так как она имеет предельные значения на кривой C_i $(0 \leq i \leq n+1)$.

3) Функция $u(x,t)$ есть регулярное решение уравнения (1), если она удовлетворяет уравнению (1) в $Д$ и условиям Гёльдера в $\overline{Д}$, а её производные u_x, u_{xx}, u_t являются функциями некоторого класса A_γ^κ. Настоящая работа возникла в связи с исследованием сходимости разностных методов, применяемых для решения уравнения (2) в случае разрывного $k(\overline{x},\overline{t})$. Поэтому нас интересует регулярное решение.

3. Постановка задачи. Требуется найти регулярное в $\overline{Д}$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,t) = \varphi(x), \tag{5}$$

граничным условиям

$$u(\eta_0(t),t) = u_1(t), \quad u(\eta_{n+1}(t),t) = u_2(t) \tag{6}$$

и условиям сопряжения на n кривых C_i

$$u_{пi} = u_{лi}, \quad q_{пi}(t)(u_x)_{пi} - r_{пi}(t)u_{пi} = q_{лi}(t)(u_x)_{лi} - r_{лi}(t)u_{лi}$$

или

$$[u]_i = 0, \ [qu_x - ru]_i = 0 \quad \text{при} \quad x = \eta_i(t) \ (1 \leq i \leq n), \tag{7}$$

где

$$[u]_i = u_{пi} - u_{лi}, \quad u_{пi} = u(\eta_i(t)+0,t), \quad u_{лi} = u(\eta_i(t)-0,t)$$

и т.д.

В частности, для уравнения (2) имеем:

$$q_{п} = \sqrt{k_{п}}, \quad q_{л} = \sqrt{k_{л}}, \quad r_{л} = r_{п} = 0, \quad a = 0.5k^{-1/2}k_{\overline{x}} - x_{\overline{t}}, \quad b = 0.$$

Доказательство существования решения этой задачи проводится в несколько этапов:

1) строится функция источника $G(x,t;\xi,\tau)$ той же задачи для уравнения $u_t = u_{xx}$ и $r_{лi} = r_{пi} = 0$;

2) изучаются свойства тепловых потенциалов, образованных с помощью $G(x,t;\xi,\tau)$;

3) решение исходной задачи (1), (5)-(7) с помощью G сводится к интегральному уравнению, которое решается методом последовательных приближений.

4. Функция источника $G(M,P) = G(x,t;\xi,\tau)$ нашей задачи для уравнения $u_t = u_{xx}$ является при $M \neq P$ решением уравнения $G_t - G_{xx} = 0$ и $\overline{G}_\tau + \overline{G}_{\xi\xi} = 0$, а при совпадении аргументов $(M = P)$ имеет особенность того же типа, что и фундаментальное решение

$$G_0(M,P) = G_0(x,\xi;t-\tau) = \left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{-1} \exp[-(x-\xi)^2/4(t-\tau)]. \tag{8}$$

Кроме того, $G(M,P)$ удовлетворяет граничным условиям $G = 0$, если $M \in C_s$ или $P \in C_s$ $(s = 0, n+1)$, и условиям сопряжения

$$[G]_i = 0, \quad \left[q\frac{\partial G}{\partial x}\right]_i = 0 \quad \text{при } M \in C_i \ (x = \eta_i(t)), \ 1 \le i \le n; \tag{9}$$

$$\left[\frac{\overline{G}}{q}\right]_i = 0, \quad \left[\frac{\partial \overline{G}}{\partial \xi} - \eta_i'(\tau)\right]_i = 0 \quad \text{при } P \in C_i \ (\xi = \eta_i(\tau)), \ 1 \le i \le n. \tag{10}$$

Черта сверху означает, что G рассматривается как функция точки $P(\xi,\tau)$. Отсюда видно, что G является разрывным решением сопряжённого уравнения теплопроводности.

Будем искать пару функций $G(M,P)$ и $\overline{G}(M,P)$ в виде

$$G(M,P) = G_0(M,P) + \sum_{i=0}^{n+1} V_i(M,P); \tag{11}$$

$$\overline{G}(M,P) = G_0(M,P) + \sum_{i=1}^{n} \overline{W}_i(M,P) + \overline{V}_0(M,P) + \overline{V}_{n+1}(M,P), \tag{12}$$

где

$$V_i(M,P) = \int_\tau^t G_0(x,\eta_i(\theta),t-\theta)\mu_i(\theta;P)d\theta,$$

$$\overline{W}_i(M,P) = 2\int_\tau^t \frac{\partial G_0}{\partial x}(\eta_i(\theta),\xi;\theta-\tau)\overline{\mu}_i(\theta,M)d\theta, \tag{13}$$

$$\overline{V}_s(M,P) = \int_\tau^t G_0(\eta_s(\theta),\xi;\theta-\tau)\overline{\mu}_s(\theta;M)d\theta \ (s=0,n+1)$$

Требуя выполнения для $G(M,P)$ условий (9), получим $n+2$ интегральных уравнения для функций $\mu_i(t;\xi;\tau)$ $(0 \le i \le n+1)$; условия (10) для $\overline{G}$ дают $n+2$ уравнения для $\overline{\mu}_i(\tau;x,t)$ $(0 \le i \le n+1)$. Доказательство существования решений этих двух систем интегральных уравнений для $C_i \in K_\gamma$ проводится методом последовательных приближений. Имеет место тождество $\overline{G}(M,P) \equiv G(M,P)$.

5. Расмотрим потенциал

$$F_0(x,t) = \iint_{Д_t} G_0(x,\xi;t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где $Д_t = (\eta_0(\tau) < \xi < \eta_{n+1}(\tau),\ 0 < \tau < t)$.

Лемма 1. Потенциал $F_0(x,t)$ является регулярным в $\overline{Д}$ решением уравнения $u_t = u_{xx} + f(x,t)$, удовлетворяющим условиям сопряжения $[F_{0x}]_i = 0$, $[F_{0xx} + f]_i = 0$, $[F_{0t}]_i = 0$ при $x = \eta_i(t)$ $(1 \le i \le n)$, если выполнены условия: 1) $C_i \in K_\gamma$, $0 \le i \le n+1$, $\gamma > 0$; 2) $f(x,t) \in A_\gamma^1$, $f_x(x,t) \in A_\gamma^\kappa$ $(\kappa > 0,\ \gamma > 0)$; 3) $f(x_s,0)$ при $x_s = \eta_s(0)$, $s = 0,n+1$; $[f(x,0)]_i = 0$ при $x = \eta_i(0)$, $1 \le i \le n$.

6. *Лемма* 2. Потенциал $F(x,t) = \iint_{Д_t} G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$ является регулярным в $\overline{Д}$ решением уравнения $u_t = u_{xx} + f(x,t)$, удовлетворяющим граничным условиям $F = 0$ при $x = \eta_s(t)$ $(s = 0,n+1)$ и условиям сопряжения

$$[F]_i = 0,\ [qF_x]_i = 0,\ [F_{xx} + \eta_i'(t)F_x + f]_i = 0 \text{ при } x = \eta_i(t), 1 \le i \le n,$$

если выполнены условия 1) и 3) леммы 1 и, кроме того: 2а) $f \in A_\gamma^1$, где $\gamma > 1/2$; $f_x \in A_\gamma^\kappa$, где $\kappa > 0, \gamma > 0$; 4) функции $q_{лi}'(t)$ и $q_{пi}'(t)$ кусочно-непрерывны на отрезке $0 \le t \le T$.

7. Так как функция $G(x,t;\xi,\tau)$ разрывна по переменным (ξ,τ), то можно рассматривать два потенциала простого слоя

$$V_j^{п,л}(x,t) = \int_0^t G(x,t;\eta_j(\theta) \pm 0,\theta)\nu(\theta)d\theta$$

вдоль некоторой кривой C_j $(x = \eta_j(t);\ 1 \le j \le n)$.

Лемма 3. Потенциалы $V_j^п(x,t)$ и $V_j^л(x,t)$ вдоль некоторой кривой C_j из класса K_γ $(\gamma > 1/2)$ являются регулярными в $\overline{Д}$ решениями уравнения $u_t = u_{xx}$, если выполнены условие 1) леммы 1 (для

$\gamma > 1/2$), условие 4) леммы 2 и, кроме того, $\nu(0) = 0$, а производная $\nu'(t)$ кусочно-непрерывна на отрезке $0 \le t \le T$. На кривых C_i $(1 \le i \le n)$ производные $V_{jx}^{\text{п,л}}$, $V_{jxx}^{\text{п,л}}$, $V_{jt}^{\text{п,л}}$ удовлетворяют некоторым условиям сопряжения (которые, ввиду их громоздкости, мы здесь не приводим).

8. *Решение исходной задачи.* Представим решение задачи (1),(5)-(7) в виде суммы $u(x,t) = v(x,t) + \Phi(x,t)$, где

$$\Phi(x,t) = \varphi\Big[\frac{x - \eta_i(t)}{\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t)}(\eta_{i+1}(0) - \eta_i(0)) + \eta_i(0)\Big] + \psi(x,t),$$

если $M(x,t) \in \Delta_i$ $(0 \le i \le n)$. Функция $\psi(x,t)$ выбрана так, что $\psi(\eta_0(t),t) = u_1(t) - u_2(0)$, $\psi(\eta_{n+1}(t),t) = u_2(t) - u_2(0)$; $\psi = 0, \psi_x = 0$ при $M(x,t) \in C_i$ $(1 \le i \le n)$.

Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Lv = -\tilde{f}$, $\tilde{f} = f + L\Phi$, нулевым начальному и граничным условиям, а также условиям сопряжения $[v]_i = 0$, $[qv_x - rv]_i = -\nu_i(t)$ при $x = \eta_i(t)$, $1 \le i \le n$, где

$$\nu_i(t) = \frac{1}{q_{ni}(t)}[q\Phi_x - r\Phi]_i.$$

Формула Грина даёт уравнение для $v(x,t)$:

$$v(x,t) = \iint_{Д_t} G(x,t;\xi,\tau)[a(\xi,\tau)\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\tau) + b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + \tilde{f}(\xi,\tau)]d\xi d\tau -$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\int_0^t [G(x,t;\eta_i(\theta)+0,\theta)\frac{[r]_i}{q_{ni}(\theta)}v(\eta_i(\theta),\theta) - G(x,t;\eta_i(\theta)+0,\theta)\nu_i(\theta)]d\theta. \quad (14)$$

9. С помощью уравнения (14) и лемм 2 и 3 доказывается:

Теорема существования и единственности. Существует и притом единственное решение исходной задачи (1), (5)-(7), определённое и регулярное в замкнутой области $\overline{Д}$, если выполнены условия:

1) Кривые $\{C_i\}$ $(0 \le i \le n{+}1)$ образуют класс K_γ, причём $\gamma > 1/2$.

2) $f \in A_\gamma^1$, где $\gamma > 1/2$; $f_x \in A_\gamma^\kappa$, где $\kappa > 0$, $\gamma > 0$; $a \in A_\gamma^1$, $b \in A_\gamma^1$, где $\gamma > 1/2$; $a_x \in A_\gamma^\kappa$, $b_x \in A_\gamma^\kappa$, где $\kappa > 0$, $\gamma > 0$.

3) Функция $\varphi(x)$ на отрезке $\eta_0(0) \le x \le \eta_{n+1}(0)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывные производные $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, причём

$\varphi'''(x)$ удовлетворяет на каждом из интервалов $\eta_i(0) < x < \eta_{i+1}(0)$ $(0 \le i \le n)$ условию Гёльдера.

4) Функции $u_1(t), u_2(t)$ имеют производные $u_1'(t), u_2'(t)$, удовлетворяющие на отрезке $0 \le t \le T$ условию Гёльдера порядка $\gamma > 1/2$.

5) Функции $q_{ni}(t)$, $r_{ni}(t)$, $q_{ni}(t)$, $r_{ni}(t)$ $(1 \le i \le n)$ имеют кусочно-непрерыные на отрезке $0 \le t \le T$ первые производные.

6) Выполняются условия согласования:

$$u_1(0) = \varphi(\eta_0(0)); \quad u_2(0) = \varphi(\eta_{n+1}(0)); \quad [\varphi]_i = 0; \quad [q\varphi' - r\varphi]_i = 0;$$

$$[\varphi'' + (a + \eta_i')\varphi' + b\varphi + f]_i = 0 \quad \text{при } t = 0, \ x = \eta_i(0) \ (1 \le i \le n);$$

$$u_1'(0) = (\varphi'' + (a + \eta_0')\varphi' + b\varphi + f) \quad \text{при } t = 0, \ x = \eta_0(0);$$

$$u_2'(0) = (\varphi'' + (a + \eta_{n+1}')\varphi' + b\varphi + f) \quad \text{при } t = 0, \ x = \eta_{n+1}(0).$$

10. Применяемый нами метод позволяет доказать аналогичную теорему и для ряда других задач, например, 1) в случае граничных условий вида $\alpha_s(t)u_x(x_s, t) + \beta_s(t)u(x_s, t) = u_s(t)$, где $x_s = \eta_s(t)$ $(s = 0, n+1)$; 2) в случае условий сопряжения вида $[pu]_i = 0$, $[qu_x - ru]_i = 0$ при $x = \eta_i(t)$ $(1 \le i \le n)$ и др.

В заключение пользуюсь возможностью выразить глубокую благодарность А.Н. Тихонову за дискуссию результатов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *M.Gevrey*, J.Math., 9, fasc.IV(1913).