Раздел 2

Теория разностных методов

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *

Член-корреспондент АН СССР А.Н. ТИХОНОВ и А.А. САМАРСКИЙ

1. Различные конечноразностные схемы, пригодные для решения определенного типа дифференциальных уравнений, могут различаться как по порядку, так и в смысле применимости в зависимости от класса коэффициентов этих уравнений. Автоматизация вычислений, связанная с использованием машин, ставит вопрос о выборе "наилучших" разностных схем, обладающих как максимальной точностью, так и применимостью в возможно более широком классе коэффициентов. Так, например, желательно, чтобы одна и та же разностная схема позволяла решать задачи для дифференциальных уравнений как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов, без явного выделения точек разрыва.

Рассмотрим ряд относящихся сюда вопросов на примере следующей краевой задачи:

$$L^{(k)}y = \frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy}{dx}] = -f(x) \quad (0 < x < l); \quad y(0) = y'(l) = 0 \qquad (1)$$

в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $k(x) \geq k_0 > 0$.

2. Будем рассматривать трехточечную разностную схему

$$L_h^{(k_i)} y_i = \frac{1}{h^2}(A_i y_{i-1} + C_i y_i + B_i y_{i+1}) = -f_i, \quad f_i = f(x_i), \qquad (2)$$

где A_i, B_i и C_i являются функциями величин $k_{i-1} = k(x_{i-1})$, $k_i = k(x_i), k_{i+1} = k(x_{i+1})$, а $h-$ шаг равномерной сетки.

*ДАН СССР, 1956, т. 108, № 3, с. 393-396.

Будем обозначать: C_p– класс функций, имеющих p непрерывных производных в интервале $(0,l)$; Q_p – класс функций, кусочно-непрерывных и имеющих кусочно-непрерывные производные до p-го порядка в интервале $(0,l)$. Будем считать, что $f \subset C_1$.

Определение 1. Разностную схему будем называть однородной, если $A_i = A(k_{i-1}, k_i, k_{i+1}), C_i = C(k_{i-1}, k_i, k_{i+1}), B_i = B(k_{i-1}, k_i, k_{i+1})$. Иными словами, для однородной схемы вычисление коэффициентов A_i, B_i, C_i происходит во всех точках по единому закону.

Определение 2. Трехточечную однородную разностную схему будем называть линейной, если функции $A(\alpha,\beta,\gamma), B(\alpha,\beta,\gamma)$, $C(\alpha,\beta,\gamma)$ линейны относительно своих аргументов, т.е.

$$A = a_{-1}\alpha + a_0\beta + a_1\gamma, B = b_{-1}\alpha + b_0\beta + b_1\gamma, C = c_{-1}\alpha + c_0\beta + c_1\gamma, \quad (3)$$

где $a_s, b_s (s = -1, 0, 1)$ – постоянные числа.

В этой заметке мы ограничимся изучением только линейных однородных схем.

Определение 3. Пусть Ly – некоторый дифференциальный оператор m-го порядка, а $L_h y_i$ – некоторый разностный опреатор, определенный для всякого значения $h \le h_0$. Будем говорить, что разностный оператор $L_h y_i$ имеет в точке x_i локальный порядок точности, равный n, если разность $L_h y_i - (Ly)_i = O(h^n)$, где $y(x)$ - произвольная функция, имеющая $(n+m)$-ю непрерывную производную.

Определение 4. Разностная схема $L_h^{(k_i)} y_i$ для дифференциального оператора (1) имеет порядок n, если для всякой функции $k(x)$ из класса $C_{n+1} (n = 1, 2)$ соответствующий разностный оператор $L_h y_i$ имеет n-й локальный порядок точности.

Определение 5. Разностная схема называется безавостной, если краевая задача для нее разрешима при любом заданном шаге h, любых значениях коэффициентов и любой правой части уравнения.

Если разностная схема не удовлетворяет такому условию, то при машинном счете для этого значения h и этих коэффициентов и правой части будет иметь место аварийный останов машины ("авост"). Так как наличие машинного авоста, вызванное неудачным выбором шага h, не означает неразрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения, то такой авост естественно назвать схемным авостом.

3. Рассмотрим схему (2) для $k(x) \subset C_2$ и потребуем, чтобы она

имела первый порядок точности

$$L_h y = Ly + O(h) = ky'' + k'y' + O(h). \qquad (4)$$

Разлагая $y(x)$ в окрестности $x = x_i$ получим

$$L_h^{(k)_i} y_i = \frac{A_i + C_i + B_i}{h^2} y_i + \frac{B_i - A_i}{h} y_i' + \frac{B_i + A_i}{2} y_i'' + O(h). \qquad (5)$$

Сравнение с (4) дает

$$A_i + C_i + B_i = O(h^2), B_i - A_i = k_i' h + O(h^2), B_i + A_i = 2k_i + O(h). \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_i = A_i/B_i = 1 - hk_i'/k_i + O(h^2). \qquad (7)$$

Для линейных схем отсюда также получаем

$$C_i = -(A_i + B_i), \qquad (8)$$

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = 1, b_{-1} + b_0 + b_1 = 1, (b_1 - b_{-1}) - (a_1 - a_{-1}) = 1 \qquad (9)$$

4. Пусть ξ – точка разрыва функций $k(x)$ из класса Q_2 и $k(\xi - 0) = k_l = k_r = k(\xi + 0)$. Решение уравнения (1)$y = \tilde{y}(x)$ удовлетворяет при $x = \xi$ условиям сопряжения

$$\tilde{y}_l = \tilde{y}_r = \tilde{y}(\xi), \quad k_l \tilde{y}_l' = k_r \tilde{y}_r' = w.$$

Разлагая $\tilde{y}(x)$ и $k(x)$ в окрестности точки $x = \xi = x_n + \theta h (0 < \theta < 1)$,получим:

$$L_h \tilde{y}_n = (L\tilde{y})_n + \frac{R_n}{h}, L_h \tilde{y}_{n+1} = (L\tilde{y})_{n+1} + \frac{R_{n+1}}{h}, \qquad (10)$$

$$R_n = [B_n \frac{(1-\theta)k_l + \theta k_r}{k_l k_r} - \frac{A_n}{k_l}]\omega + O(h),$$

$$R_{n+1} = [\frac{B_{n+1}}{k_r} - A_{n+1} \frac{(1-\theta)k_l + \theta k_r}{k_l k_r}]\omega + O(h). \qquad (11)$$

Если в окрестности точки ξ при $|\xi - x| < \epsilon_0$, где $\epsilon_0 > 0$– любое число, не содержится других точек разрыва и $f(x)$ дифференцируема, то для схемы 1-го порядка точности разность $z_i = y_i - \tilde{y}_i$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{gathered}B_i r_{i+1} = A_i r_i - \varphi_i, \; r_i = z_i - z_{i-1}, \\ \varphi_i = \varphi_n \delta_{i,n} + \varphi_{n+1}\delta_{i,n+1} + O(h^3); \\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j; \end{cases} \; \varphi_n = O(h), \varphi_{n+1} = O(h).\end{gathered} \tag{12}$$

5. Л е м м а. *Пусть ξ - некоторая фиксированная точка интервала $(0,l)$ и $z_i = y_i - \tilde{y}_i$ удовлетворяет условиям (12) для любого шага h, причем $x_n < \xi < x_{n+1}$. Для сходимости любой последовательности решений y_i^h разностного уравнения $L_h y_i = -f_i$ решению $\tilde{y}_i$ дифференциального уравнения (1) в некотором интервале $|\xi - x| < \epsilon_0$ $(\epsilon_0 > 0)$ необходимо выполение условия*

$$\Delta_n = A_{n+1}\varphi_n + B_n \varphi_{n+1} = o(h) \tag{13}$$

где $o(h) \to 0$ при $h \to 0$ быстрее, чем первая степень h.

Полагая в условии (13) $\varphi_n = R_n h$, $\varphi_{n+1} = R_{n+1}h$ и пользуясь для R_n и R_{n+1} формулой (11), получаем необходимое условие сходимости разностной схемы в точке разрыва:

$$\delta_n = \frac{B_n B_{n+1}}{k_r} - \frac{A_n A_{n+1}}{k_l} = O(h) \tag{δ}$$

6. Для линейных схем 1-го порядка из $\delta-$ условия получаем 4 уравнения для a_k и $b_k (k = -1, 0, 1)$, решая которые совместно с уравнениями (9), приходим к следующим 4 семействам схем:

$$A_i = (1 - a_0)k_{i-1} + a_0 k_i, \quad B_i = (1 - a_0)k_i + a_0 k_{i+1} = A_{i+1}.$$

$$A_i = (1 - a_0)k_{i-1} + a_0 k_i, \quad B_i = (1 - a_0)k_{i-1} - (1 - a_0)k_i - k_{i+1}.$$

$$A_i = k_{i-1} + a_0 k_i - a_0 k_{i+1}, \quad B_i = (1 + a_0)k_i - a_0 k_{i+1}.$$

$$A_i = k_{i-1} + a_0 k_i - a_0 k_{i+1}, \quad B_i = (1 + a_0)k_{i-1} - (1 + a_0)k_i + k_{i+1}.$$

7. Условие безавостности, предъявляемое нами к разностным схемам, означает, что $A_i \neq 0$ и $B_i \neq 0$ при любых значениях k_i. В

самом деле, рассмотрим краевую задачу $y_0 = 0$, $r_{N+1} = y_{N+1} - y_N = 0$ и предположим, что n – наибольший номер, при котором $A_n = 0$. Если $B_i \neq 0$ для $i \geq n$, то можно написать:

$$r_{N+1} = -\bar{f}_{n+1}h^2 \prod_{m=n+1}^{N} \alpha_m - \sum_{k=n+1}^{N-1} h^2\bar{f}_k \prod_{m=n+1}^{N} \alpha_m - \bar{f}_N h^2 \quad (\bar{f}_i = f_i/B_i).$$

Полагая $f_i = 0$ для $n+1 \leq i < N$, $\bar{f}_N \neq 0$, получим $r_{N+1} \neq 0$, т.е. разностная краевая задача неразрешима. Если $B_m = 0$ при $m > n$, то аналогичное рассуждение также приводит к противоречию. Если $B_n = 0$, то аналогичные рассуждения следует провести для задачи $r_1 = 0$, $y_{N+1} = 0$.

Для линейных однородных схем требование безавостности означает неотрицательность $a_s b_s (s = -1, 0, 1)$.

8. Нетрудно видеть, что из четырех схем, полученных в п.6, только первая схема $A_i = (1-a_0)k_{i-1} + a_0 k_i$, $B_i = A_{i+1}$ при $0 \leq a_0 \leq 1$ является безавостной.

Если$B_i = A_{i+1}$, то такую разностную схему будем называть консервативной. Для консервативной схемы можно ввести понятие потока $w_{i-\frac{1}{2}} = -A_i(y_i - y_{i-1})/h$, относимого к "полуцелой" точке $x = x_{i-\frac{1}{2}}$ и записать разностное уравнение в виде

$$w_{i-\frac{1}{2}} - w_{i+\frac{1}{2}} = q_i, \quad q_i = f_i h. \tag{14}$$

Если уравнение (14) интерпретировать, как некий "закон сохранения" для интервала $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$, означающий, что разность потоков равна источнику q_i, то для консервативной схемы закон сохранения для любого интервала $(x_{m-\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}})$ имеет вид

$$w_{m-\frac{1}{2}} - w_{n+\frac{1}{2}} = -\sum_{i=m}^{n} q_i.$$

Формулу $w_{i-\frac{1}{2}} = A_i(y_{i-1} - y_i)/h$ следует рассматривать как интерполяционную формулу для вычисления потока $w = -ky'$ при $x = x_{i-\frac{1}{2}}$.

Нетрудно заметить, что всякая консервативная схема 1-го или 2-го порядка точности удовлетворяет δ– условию.

Если точки разрыва $k(x)$ являются узловыми точками разностной сетки, то формулы для A_i и B_i следует брать в виде

$$A_i = (1-a_0)k_{i-1,} + a_0 k_{i,}, \quad B_i = (1-a_0)k_{i,r} + a_0 k_{i+1,l} = A_{i+1}.$$

9. Т е о р е м а 1. *Пусть $L_h^{(k_i)} y_i$ – однородная, линейная, трехточечная разностная схема, удовлетворяющая требованию безавостности, необходимому δ – условию сходимости на разрыве. Тогда:*

1) если она имеет 1-й порядок точности, то она принадлежит однопараметрическому семейству консервативных разностных схем:

$$A_i = (1 - a_0)k_{i-1} + a_0 k_i, \quad B_i = A_{i+1}, \quad 0 \le a_0 \le 1; \tag{15}$$

2) если она имеет 2-й порядок точности, то она определена однозначно:

$$A_i = 0,5(k_{i-1} + k_i), \quad B_i = A_{i+1} \quad (a_0 = 0,5) \tag{15'}$$

Т е о р е м а 2. *Решение разностной краевой задачи*

$$L_h y_i = \frac{1}{h}(w_{i-\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}}) = -f_i, \; w_{i-\frac{1}{2}} = A_i(y_{i-1} - y_i)/h, \; y_0 = 0, \; w_{N+\frac{1}{2}} = 0,$$

$$A_i = (1 - a_0)k_{i-1} + a_0 k_i \quad (0 \le a_0 \le 1)$$

сходится к решению краевой задачи (1), если коэффициент $k(x) \subset Q_1$.

Если $k(x) \subset Q_2$, то

$$z_i = y_i - \tilde{y}_i = O(h).$$

Аналогичные теоремы имеют место и для линейных краевых условий других типов.