1956 г. ноябрь — декабрь *т. XI, вып. 6 (72)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ ТИХОНОВ

(К пятидесятилетию со дня рождения)

30 октября 1956 года исполняется 50 лет со дня рождения выдающегося советского математика Андрея Николаевича Тихонова.

А. Н. Тихонов—уроженец г. Гжатска, Смоленской губернии. В 1922 году он поступил на математическое отделение физико-математичекого факультета Московского университета; по окончании университета в 1927 г. был принят в аспирантуру Института математики Московского университета. С 1936 г. по настоящее время он состоит профессором Московского университета, заведуя кафедрой математики на физическом факультете.

В 1939 г. А. Н. Тихонов избирается членом-корреспондентом Академии наук СССР.

В 1953 г. за выдающиеся работы по математической физике А. Н. Тихонову присвоено Правительством СССР почётное звание Героя Социалистического Труда и присуждена Сталинская премия первой степени.

А. Н. Тихонов начал свою научную работу в возрасте 18 лет под руководством одного из авторов этого очерка (Александров), который, таким образом, считает себя вправе гордиться тем, что имеет Андрея Николаевича в числе своих учеников. Весь первый период своей научной деятельности А. Н. занимается топологией.

Уже в 1924 г. А. Н. Тихонов получил свой первый научный результат—доказательство того, что всякое регулярное топологическое пространство со счётной базой является нормальным, и, следовательно (по известной теореме П. С. Урысона),—метризуемым. Этот результат был опубликован в 1925 г. в Mathematishe Annalen и вскоре же вошёл в классический учебник Хаусдорфа по теории множеств, как результат, как бы завершающий метризационную теорему Урысона. Первая теорема А. Н., при всей свой простоте, сохраняла своё значение до последнего времени, пока не была поглощена общим метризационным критерием Нагата—Ю. Смирнова, давшим полное и окончательное решение общей проблемы метризации топологических пространств.

Первая топологическая теорема А. Н. явилась, однако, лишь преддверием его дальнейших результатов в области абстрактной топологии, при-

нёсших их автору всемирную известность. Основными из этих результатов являются следующие. Прежде всего А. Н. Тихонов нашёл определение топологического произведения любого множества бикомпактных пространств. Эта задача нахождения надлежащего определения часто оказывается решающей в построении той или иной математической теории. Достаточно вспомнить тот решающий, в полном смысле слова основополагающий для последующего развития математического анализа успех, который выпал на долю Лебега, нашедшего после ряда предшествующих попыток (Кантора, Жордана, Бореля и др.) «настоящее» определение меры множества и затем—определение интеграла, носящего его имя; или успех П. С. Урысона, нашедшего «настоящее» определение размерности. Вот таким классическим определением, оказавшим весьма большое влияние на дальнейшее развитие ряда математических дисциплин, является принадлежащее А. Н. определение топологического произведения. «Тихоновская топология», лежащая в основе этого определения, прочно вошла в запас основных понятий современной математики. Своё определение А. Н. поставил на твёрдое основание, доказав замечательную теорему о том, что произведение в смысле А. Н. Тихонова любого множества бикомпактных топологических пространств всегда является бикомпактным топологическим пространством. Эта теорема имеет основное значение не только для всей современной топологии, но и для теории топологических групп, а также для функционального анализа. Теорема А. Н. принадлежит к числу самых глубоких теорем всей так называемой общей или абстрактной топологии. После первого доказательства, данного А. Н. в 1926—1927 гг., было дано много других доказательств его теоремы, но все эти доказательства, хотя среди них имеются и более короткие, чем первоначальное доказательство автора, только подчёркивают глубину и трудную доступность полученного результата. То обстоятельство, что А. Н. Тихонов получил этот замечательный результат в возрасте 20 с небольшим лет, служит новым подтверждением того факта, что самые выдающиеся открытия в математике часто делаются ещё совсем молодыми людьми.

Поводом для этих исследований А. Н. была задача, поставленная ему П. С. Александровым: доказать, что всякое нормальное топологическое пространство может быть рассматриваемо как множество, лежащее в некотором бикомпакте (т. е. в бикомпактном хаусдорфовом пространстве). А. Н. следующим образом решает эту задачу. Пусть дано нормальное топологическое пространство веса $\leqslant\tau$, т. е. имеющее базу мощности $\leqslant\tau$. Возьмём топологическое произведение τ экземпляров обыкновенного отрезка $0\leqslant x\leqslant 1$ числовой прямой. Это топологическое произведение представляет собой (по основной теореме А. Н.) бикомпакт веса τ—знаменитое тихоновское пространство R^τ—тихоновский куб или тихоновский кирпич τ измерений. Применив давнюю конструкцию П. С. Урысона и перенеся её на несчётный случай, А. Н. показывает, что любое нормальное пространство веса $\leqslant\tau$ гомеоморфно множеству, лежащему в этом кирпиче R^τ. Таким образом, А. Н. пошёл значительно дальше поставленной ему задачи: он не только доказал, что всякое нормальное пространство гомеоморфно множеству, лежащему в некотором бикомпакте, он построил для всякого кардинального числа τ

такое единое пространство—именно τ-мерный кирпич R^τ, который содержит топологический образ любого нормального пространства веса $\leqslant \tau$. Но и это ещё не всё: А. Н. ставит себе и обратную задачу: будет ли всякое множество, лежащее в каком-либо бикомпакте, непременно нормальным пространством. Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным: А. Н. строит класс пространств, значительно более широкий, чем нормальные пространства, а именно класс так называемых вполне регулярных пространств и доказывает, что всякое вполне регулярное пространство веса $\leqslant \tau$ гомеоморфно множеству, лежащему в τ-мерном тихоновском кирпиче, и что, обратно, всякое множество, лежащее в каком-либо бикомпакте, является вполне регулярным пространством.

Таким образом, в вопрос о взаимоотношениях между произвольными топологическими пространствами и бикомпактами А. Н. внесена полная ясность. Попутно открыт новый класс топологических пространств—вполне регулярные пространства. Дальнейшее развитие теоретико-множественной топологии и её приложений убедительно показывает, что класс вполне регулярных пространств является со многих точек зрения основным классом топологических пространств. Так, оказывается, что пространство всякой топологической группы является вполне регулярным, что все пространства равномерной топологии (будь то равномерные пространства в смысле А. Вейля или пространства близости в смысле В. А. Ефремовича) суть вполне регулярные пространства и т. д.

Поместив любое вполне регулярное пространство в свой кирпич надлежащего числа измерений и взяв в нём замыкание полученного множества, А. Н. построил для каждого вполне регулярного пространства одно из его бикомпактных расширений, т. е. бикомпакт, содержащий данное пространство как всюду плотное множество. При этом само собою получилось, что каждое вполне регулярное пространство имеет бикомпактное расширение того же веса, что и данное пространство. Доказав эту теорему, А. Н. делается основателем одного из основных направлений современной абстрактной топологии—теории бикомпактных расширений топологических пространств. Этому направлению принадлежит очень большое число топологических работ последнего времени. Прежде всего, несколько обобщая методы А. Н., чехословацкий математик Э. Чех и американский математик М. Стон (M. H. Stone) строят для каждого вполне регулярного пространства R так называемое максимальное бикомпактное расширение βR. Этот бикомпакт, имеющий вес, вообще говоря, значительно превосходящий вес исходного пространства, оказывается чрезвычайно существенным в очень многих вопросах, и не только топологии. Вскоре П. С. Александров даёт новый метод построения максимального бикомпактного расширения βR и связывает его с новым типом бикомпактных расширений, предложенным американским топологом Уолмэном (Wallman). К возникающему таким образом новому направлению в теории бикомпактных расширений относятся многочисленные интересные работы ряда математиков различных стран, в том числе работы М. Катетова, С. В. Фомина, Ю. М. Смирнова, Фрейденталя, Небелинга и др. В частности, Ю. М. Смирнов доказывает равносильность теории так называемых

пространств близости с теорией бикомпактных расширений, связывает с теорией бикомпактных расширений понятие полноты в равномерной топологии и т. д. Всё это показывает, насколько основанная А. Н. теория бикомпактных расширений оказалась жизненной во всём дальнейшем развитии абстрактной топологии.

Мы не имеем возможности касаться здесь других топологических работ А. Н., его теоремы о дополнении произвольного хаусдорфова пространства до H-замкнутого, его замечательных примеров как бикомпактных, так и небикомпактных пространств, его—к сожалению, оставшейся неопубликованной—работы по теории размерности (результаты этой работы были значительно позже передоказаны другими авторами), его теоремы о неподвижных точках и многие другие. Однако уже сказанного выше достаточно, чтобы считать А. Н. Тихонова одним из выдающихся топологов нашего времени.

Во второй период своей математической деятельности А. Н. Тихонов занимается теорией уравнений математической физики. В этой области А. Н. начал работать под руководством В. В. Степанова и—будучи уже учёным с мировым именем—не побоялся вновь стать учеником в новой для него области математики.

Первые работы А. Н. по математической физике были связаны с исследованиями уравнения теплопроводности. Им рассматривался вопрос единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в бесконечной области. Андрей Николаевич построил нетривиальное решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ в области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, имеющее при $|x| \to \infty$ порядок не выше $Ce^{x^{2+\varepsilon}}$ и тождественно равное нулю при $t=0$. Тем самым, естественно, возник вопрос об условиях единственности решения уравнения параболического типа в бесконечной области. А. Н. удалось найти весьма широкие достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения данной задачи. Было установлено, что решение поставленной задачи единственно, если неизвестная функция подчинена условию $\lim\limits_{|x|\to\infty} ue^{-Cx^2} = 0$.

В этих же работах А. Н. была также поставлена и исследована обратная задача теплопроводности. Им была доказана теорема, согласно которой решение уравнения теплопроводности в области $x > 0$, $-\infty < t \leqslant t_0$ определяется однозначно по заданным значениям $u(x, t_0) = \varphi(x)$, если хотя бы одна производная решения по координате равномерно ограничена $\left(\left|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right| < M\right)$. Эти исследования возникли в связи с решениями задач геофизики, посвящённых определению геологического климата Земли.

Идеи, заложенные в этих работах А. Н., нашли дальнейшее развитие в ряде работ, посвящённых вопросу о корректной постановке задачи Коши для параболических уравнений. Так, Видер (Widder) доказал единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности при условии полуограниченности; О. А. Ладыженская распространила результаты А. Н. на любые параболические уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u$; С. Д. Эйдельманом эти же

результаты были перенесены на параболические системы. Наконец, Г. Н. Золотарёвым установлены необходимые и достаточные условия единственности обобщённого решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в неограниченной области. Непосредственно связана с указанными работами А. Н. и совместная работа И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, посвящённая свойствам преобразования Фурье быстро растущих функций. В этой работе рассмотрены также обратные задачи типа обратной задачи теплопроводности.

В последующих работах А. Н. рассматривался вопрос о сравнении областей, в которых разрешимы первая краевая задача для уравнения теплопроводности и задачи Дирихле для уравнения Лапласа и волнового уравнения. Было введено понятие фундаментальной области (области, в которой существует классическое решение соответствующей задачи) и доказаны следующие основные теоремы:

Теорема 1. *Всякая ограниченная область, фундаментальная для уравнения теплопроводности, является также фундаментальной областью для уравнения Лапласа.*

Теорема 2. *Всякая фундаментальная область для уравнения* $\Delta u - \bar{\lambda} u = 0$ *при некотором* $\bar{\lambda} \geqslant 0$ *является также фундаментальной областью для уравнения* $\Delta u - \lambda u = 0$ *при любом* $\lambda \geqslant 0$.

Теорема 3. *Всякая область, фундаментальная для уравнения* $\Delta u - \lambda u = 0$ *при любом* λ, *большем некоторого* λ_0, *является фундаментальной для уравнения теплопроводности.*

В этих же работах была построена функция источника для краевой задачи уравнения теплопроводности и изучены многие её свойства.

Известным обобщением работ этого цикла является докторская диссертация А. Н., защищённая им в 1936 г., на тему: «О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их приложение к уравнениям математической физики». В этой и ряде других работ им было введено весьма общее определение оператора Вольтерра как оператора $v(P, t, \varphi)$, определённого при $t \geqslant 0$ для элементов P некоторого множества $\mathscr{E}$ и для функций $\varphi(Q, \tau)$; $Q \in \mathscr{E}$, $\tau \leqslant t$. А. Н. рассмотрел также вопрос о способах решений функционального уравнения $\varphi(t) = o(P, t, \varphi)$. Андреем Николаевичем были выяснены условия применимости для решения этого функционального уравнения метода последовательных приближений Пикара или метода полигональных приближений Коши—Липшица. В качестве приложений полученных результатов к задачам математической физики рассмотрен ряд задач теплопроводности, в частности, задача об остывании тела при лучеиспускании с поверхности, следующему закону Стефана—Больцмана. Эти результаты были использованы В. Г. Фесенковым при исследовании свойств поверхности Луны.

Среди других работ А. Н., посвящённых уравнениям параболического типа, следует отметить исследование применимости метода конечных разностей к решению уравнения теплопроводности, построение строгой математической теории термопары, изучение влияния радиоактивного распада на температуру земной коры, а также весьма интересную работу «О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения». В этой работе решается задача о распростра-

нении тепла по полубесконечному стержню, когда в краевое условие, имеющее вид $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \frac{\partial^k u(0, t)}{\partial x^k} = f(t)$, входит производная по координате более высокого порядка, чем порядок уравнения. А. Н. доказано существование и единственность решения этой задачи, а также показано, что необходимым и достаточным условием стремления $u(x, t)$ к конечному пределу при $t \to \infty$ является требование, чтобы все корни характеристического уравнения $M(q) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k q^k = 0$ лежали в области $-\frac{3}{4}\pi < \arg q_i < \frac{3}{4}\pi$. Полученные результаты явились теоретическим обоснованием методов расчёта ряда физических приборов.

Значительная часть работ А. Н. Тихонова по математической физике посвящена задачам электродинамики. Это в первую очередь многочисленные исследования различных задач геофизики, связанных с развитием теории и методики использования электромагнитных полей для изучения внутреннего строения земной коры, в частности, задач разведки полезных ископаемых.

В этой области большое принципиальное и практическое значение имеют работы А. Н., посвящённые применению естественного электромагнитного поля Земли для получения полного электрического разреза земной коры. Попытки воспользоваться естественным электромагнитным полем Земли для решения задач геофизики делались давно. Однако они не приводили к удовлетворительным результатам, так как использовалось или только электрическое, или только магнитное поле. Предложенный А. Н. метод заключается в сопоставлении электрической и магнитной составляющих естественного электромагнитного поля на поверхности Земли для определения электрических свойств её внутренних слоёв. При этом фундаментальное значение имеет доказанная А. Н. теорема единственности соответствующей обратной задачи. Им показано, что распределение проводимости по вертикали определяется однозначно частотной характеристикой отношения между магнитной и электрической составляющими поля на поверхности Земли. При использовании широкого спектра частот появляется возможность судить об электрическом строении земной коры на глубинах до сотен километров.

Большое значение имеет и данное Андреем Николаевичем обоснование методов электроразведки, основанных на изучении электромагнитных полей, возникающих в земной коре под действием постоянного или переменного тока. Соответствующая теорема единственности для стационарного электрического поля доказана в предположении, что поле обусловлено точечным источником, расположенным на поверхности земли, а электрические свойства среды, подчинённые ограничениям общего характера, зависят только от глубины под поверхностью. Тем самым дано теоретическое обоснование практического метода подбора при интерпретации электроразведочных материалов. При этом существенную роль играет рассмотренная А. Н. проблема устойчивости обратных задач.

Основным математическим методом доказательства единственности решения рассмотренных обратных задач является вопрос о возможности

определения коэффициента $a(z)$ в уравнении $u''+\lambda a(z)u=0$ $(u(\infty)=0)$ по заданной функции $f(\lambda)=u'(0,\lambda)/u(0,\lambda)$. А. Н. решён этот вопрос как для действительных, так и для комплексных значений параметра λ при условии кусочной аналитичности функции $a(z)$.

В этом цикле работ А. Н. получены и принципиально важные математические результаты, относящиеся к решению обратной задачи восстановления линейного дифференциального оператора по свойствам его спектра. Близкими вопросами в дальнейшем занимались также М. Г. Крейн, И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан и др. авторы.

Другие фундаментальные работы А. Н. по электроразведке относятся к теории электроразведки на переменном токе. Им решена задача становления поля в полупространстве (однородном или слоистом) при включении тока в провод, расположенный на поверхности.

При анализе строения земной коры при помощи постоянного тока приходится сталкиваться с принципом неопределённости анизотропной среды, заключающемся в том, что для всякой анизотропной среды можно найти изотропную среду, дающую на поверхности те же значения наблюдаемого электрического поля. А. Н. решена задача возбуждения при помощи переменного тока электромагнитного поля в анизотропной слоистой среде, и при достаточно общих условиях показана возможность однозначного определения внутренних свойств среды по наблюдениям на её поверхности.

Для практического расчёта полей был предложен универсальный метод расчёта, приспособленный для быстродействующих электронных машин.

Работы А. Н. Тихонова по электроразведке имеют не только общее теоретическое, но и большое практическое значение. Полученные им результаты стимулируют техническое перевооружение георазведки, являясь теоретической основой ряда новых методов полевых исследований. В разработке и практическом внедрении этих методов принимает участие большой коллектив учёных и инженеров.

Другой круг работ Андрея Николаевича по электродинамике связан с вопросами возбуждения электромагнитных колебаний в радиоволноводах. Им дан общий метод построения функции источника для системы уравнений Максвелла в случае цилиндрической области произвольного поперечного сечения. Эти принципиально важные работы послужили теоретическим основанием многих практических методов расчёта радиоволноводов и волноводных элементов, играющих огромную роль в современной электронике.

При изучении этих вопросов возникла необходимость выяснить условия, однозначно определяющие решение волнового уравнения в неограниченной области. В работе «О принципе излучения» сформулировав «принцип предельной амплитуды», согласно которому решение волнового уравнения в неограниченной области определяется однозначно требованием, чтобы это решение являлось пределом решения соответствующей задачи Коши для уравнения колебаний при $t\to\infty$.

Научные интересы А. Н. охватывают также математическую теорию динамики химических процессов. В частности, ему принадлежат работы, посвящённые теории поглощения (адсорбции) газа из тока воздуха. Вопросы

динамики химических процессов приводят к нелинейным задачам для систем уравнений с частными производными. Для некоторых из этих задач А. Н. найдены точные аналитические решения, для других задач, не поддающихся точному решению, применён способ сопряжения численных и аналитических методов. Начальная стадия процесса изучается численными способами, причём численные решения доводятся до такой стадии, в которой они с высокой степенью точности представляются асимптотическим выражением. Таким образом, для весьма сложных задач даётся решение в форме, удобной для практического использования во всём диапазоне изменения переменных.

Изучение этих практически важных задач привело к необходимости исследования поведения разрывных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка.

Характерно, что работы А. Н. Тихонова по математической физике не оторваны от конкретных задач физики, напротив, они возникли из потребностей практики и имеют целью либо разъяснить математическую природу той или другой физической задачи, либо дать естественное обобщение простейших физических постановок. Наряду с этим в работах А. Н. всегда решаются и принципиальные математические вопросы.

При изучении многих вопросов физики и техники существенным оказывается рассмотрение поведения решений дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Для математического решения этого вопроса первостепенное значение имеют оригинальные исследования А. Н. Им рассматривались системы вида:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y, z) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \mu_j \frac{dz_j}{dt} = F_j(t, y, z) \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

где μ_j — малые параметры, удовлетворяющие условиям $\mu_{j+1} \leqslant \mu_j$, и существует предел отношения $\mu_{j+1}(\mu)/\mu_j(\mu)$ при $\mu \to 0$.

В работах А. Н. дана общая постановка задачи Коши для таких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также установлены критерии, при которых решения исходной системы стремятся к решению вырожденной системы при стремлении параметров к нулю. В дальнейшем учениками А. Н. рассматривались вопросы дифференцирования решений невырожденной системы по малому параметру, а также специальные виды указанных систем, связанных с теорией нелинейных колебаний.

А. Н. Тихонов является создателем большой научной школы. Многие идеи, заложенные в его исследованиях, получили дальнейшее развитие в работах его многочисленных учеников. Его учениками являются: А. Б. Васильева, В. М. Волосов, В. А. Ильин, А. В. Лукьянов, В. Н. Никитина, О. И. Паныч, Б. Л. Рождественский, А. А. Самарский, А. Г. Свешников, Д. Н. Четаев и многие другие. Курс лекций по математической физике, читаемый А. Н. в течение многих лет в Московском университете, послужил основой для создания оригинального учебника по математической физике.

П. Александров
А. Самарский
А. Свешников

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ А. Н. ТИХОНОВА

1925

1. Ueber einen Metrisationssatz von P. Urysohn, Math. Ann. **95**, 139—142.

1926

2. Sur le développement moderne de la théorie des espaces abstraits, Bull. Sci. Math. **50**, 15—27 (совместно с Н. Б. Веденисовым).
3. Sur les espaces abstraits, Compt. Rend. Acad. Sci. **182**, 1519—1522.

1928

4. Beweis des Satzes, daß ein metrisierbarer Raum dann und nur dann kompakt ist wenn er in jeder Metrik vollständig ist, Fund. Math. **12**, 118—120 (совместно с В. В. Немыцким).

1929

5. Ueber die topologische Erweiterungen von Räumen, Math. Ann. **102**, 544—561.

1930

6. Ueber die Erweiterung von Räumen, Math. Ann. **102**, 262—276.

1933

7. К статье М. А. Великанова «Гидромеханический анализ поверхностного стока» Журнал геофизики, **3**, № 1, 86—92
8. Sur les espaces bes fonctions presque périodiques, Compt. Rend. Acad. Sci. **196**, 1199—1201 (совместно с В. В. Степановым).

1934

9. Ueber unendliche Systeme von Differentialgleichungen, Матем. сб. **41**, № 1, 551—560.
10. Ueber die Räume von fastperiodischen Funktionen, Матем. сб. **41**, № 1, 166—178 (совместно с В. В. Степановым).

1935

11. Математическая теория термопары, ДАН 4 (IX), 4—5 (73—74), 168—172.
12. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности, ДАН I, № 5, 294—300.
13. Ein Fixpunktsatz, Math. Ann. **3**, 767—776.
14. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, Матем. сб. **42**, № 2, 199—216.
15. Ueber einen Funktionenraum, Math. Ann., **3**, 762—766.
16. Ueber die Abbildungen bikompakter Räume in Euklidische Räume, Math. Ann., **3** 760—761.

1936

17. Об универсальном топологическом пространстве, ДАН **3 (XII)**, 2 (97), 49—51.

1937

18. Интегрирование уравнений электромагнитного поля в проводящей среде с магнитной вязкостью, ЖЭТФ, **7**, вып. 1, 138—169.
19. Об остывании тел при лучеиспускании, следующем закону Stefan'a—Boltzmann'a, Изв. АН (отд. матем. и естеств. наук, серия географ.), № 3, 461—479.
20. О влиянии радиоактивного распада на температуру земной коры, Изв. АН (отд. матем. и естеств. наук, серия географ.), № 3, 431—460.

1938

21. О функциональных уравнениях типа Volterra и их применении к некоторым задачам математической физики, Бюлл. МГУ, секция А, **1**, вып. 8, 1—25.
22. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных, Бюлл. МГУ, секция А, **1**, вып. 9, 1—49.
23. Об апериодическом намагничивании пластинки с учётом магнитной вязкости, Сб. «Проблемы электротехнического металла», изд. АН СССР, отд. техн. наук, 117—148.

24. О намагничивании цилиндра в апериодическом поле, Сб. «Проблемы электротехнического металла», изд. АН СССР, отд. техн. наук, 79—95.

1939

25. О термическом режиме глубокой скважины Сковородинской мерзлотной станции, Изв. АН (отд. матем. и естеств. наук, серия геофиз.), № 1, 35—52.

1943

26. Об устойчивости обратных задач, ДАН **39**, № 5, 195—198.

1945

27. Об осреднении гравиметрических полей, Изв. АН (геофиз. серия), **9** № 3, 240—260 (совместно с Ю. Д. Буланже).
28. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. I, Журнал физич. химии **19**, вып. 6, 253—261 (совместно с Жуховицким и Забеусинским).

1946

29. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. II, Журнал физич. химии **20**, вып. 10, 1113—1126, (совместно с Жуховицким и Забеусинским).
30. Absorption of gas from an air current by granular material. I, Acta Phys. URSS **21**, 345—357 (совместно с Жуховицким и Забеусинским).
31. О становлении электрического тока в однородном проводящем полупространстве, Изв. АН (серия геофиз.), **10**, № 3, 213—231.
32 Об электрозондировании над наклонным пластом, Труды Ин-та теор. геофизики **1**, 116—136.
33. К теории непрерывного слитка, ЖТФ **17**, № 2, 161—176 (совместно с Е. Г. Швидковским).
34. О возбуждении радиоволноводов. I, ЖТФ **17**, № 11, 1284—1296 (совместно с А. А. Самарским).
35. О возбуждении радиоволноводов. II, ЖТФ **17**, № 12, 1432—1440 (совместно с А. А. Самарским).
36. Развитие электроразведки за 30 лет, Изв. АН (серия геофиз.) **11**, № 5, 415—418 (совместно с Заборовским).

1948

37. О возбуждении радиоволноводов. III. ЖТФ **18**, № 7, 971—989 (совместно с А. А. Самарским).
38. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей *TE* и *TM*, ЖТФ **18**, № 7, 960—970 (совместно с А. А. Самарским).
39. К истории возбуждения радиоволноводов, Вестник МГУ, вып. 7, 39—60 (совместно с А. А. Самарским).
40. О принципе излучения, ЖЭТФ **18**, № 2, 243—248 (совместно с А. А. Самарским).
41. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Матем. сб. **22** (**64**): 2, 193—204.

1949

42. О единственности решения задачи электроразведки, ДАН **69**, № 6, 797—800.

1950

43. О третьей краевой задаче для уравнения параболического типа, Изв. АН (серия геофиз.) **14**, № 3, 193—198.
44. О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде, Изв. АН (серия геофиз.) **14**, № 3, 199—222.
45. О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения, Матем. сб. **26** (**68**): 1, 35—56.
46. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры, Матем. сб. **27** (**69**): 1, 147—156.

47. Определение электрического поля в слоистой среде, Изв. АН (серия геофиз.) **14**, № 2, 99—112 (совместно с Г. В. Мухиной).
48. О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде, Изв. АН (серия геофиз.) **14**, № 4, 281—293 (совместно с О. А. Скугаревской).
49. Об определении электрических характеристик глубоких слоёв земной коры, ДАН **73**, № 2, 295—297.

1952

50. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных, Матем. сб. **31 (73)**: 3, 575—586.
51. О вариациях земного электрического поля, ДАН **87**, № 4, 547—550 (совместно с Н. В. Линской).

1953

52. О намагничивании магнитно-диэлектрического цилиндра с учётом магнитной вязкости, Вестник МГУ, № 2, 43—51 (совместно с А. А. Самарским).
53. Влияние процессов становления электрических токов в земле на полевые измерения при электрозондировании, ДАН **88**, № 5, 791—794 (совместно с Б. С. Энеиштейном).
54. Физические причины ошибок, получающихся при выполнении ВЭЗ компенсационным методом, Прикл. геофиз., вып. 10, 74—83 (совместно с Б. С. Энеиштейном).
55. Уравнения математической физики, М., Гостехиздат, стр. 679 (совместно с А. А. Самарским).

1954

56. О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка, ДАН **99**, № 1, 27—30 (совместно с А. А. Самарским).

1955

57. О намагничивании цилиндра с обмоткой с учётом магнитной вязкости, ЖТФ **25**, вып. 13, 2319—2328 (совместно с А. А. Самарским).

1956

58. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами, ДАН **108**, № 3, 393—396.
59. Метод расчёта электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах, Изв. АН (серия геофиз.), № 3, 251—254 (совместно с Шах-Суваровым).
60. О возможности использования импеданса естественного электромагнитного поля Земли для изучения её верхних слоёв, Изв. АН (серия геофиз.), № 4, 410—418 совместно с Д. Н. Шах-Суваровым).
61. О возможности использования сопротивления излучения антенны для электрокартирования, Изв. АН (серия геофиз.) № 3, 346—348 (совместно с Д. Н. Четаевым).