О НАМАГНИЧИВАНИИ ЦИЛИНДРА С ОБМОТКОЙ С УЧЕТОМ МАГНИТНОЙ ВЯЗКОСТИ

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

Рассмотрим следующую задачу. Проводящий цилиндр бесконечной длины, параллельный оси z, находится в постоянном магнитном поле, так что к моменту $t=0$ внутри цилиндра устанавливается постоянное магнитное поле напряженности H_0, направленное по оси z. В момент $t=0$ внешнее поле резко меняет свою величину от значения $H=H_0$ до значения $H=H_1$, которое может быть больше или меньше H_0. Возможен также случай $H_1=0$.

Решение этой задачи на основе уравнений Максвелла хорошо известно и было впервые получено Введенским [1].

Целью настоящей статьи является решение задачи о перемагничивании проводящего цилиндра при наличии не только упругой, но и вязкой намагниченности.[1] Аналогичная задача для плоского слоя была рассмотрена Тихоновым [2].

Полученное в § 2 решение используется в § 3 для определения по данным опыта значений коэффициентов магнитной проницаемости и магнитной вязкости. При этом мы сначала пренебрегаем задерживающим действием индукционных токов, возникающих в области цилиндра. Учет тормозящего действия обмотки, произведенный в § 4, сводится к изменению краевого условия на поверхности цилиндра [4].

§ 1. Постановка задачи

Мы будем исходить из уравнений Максвелла в проводящей среде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0, \tag{4}$$

где σ — проводимость цилиндра, $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, $\varepsilon=\text{const}$. Вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ определяется соотношениями

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{I}_{\text{п.}}, \tag{5}$$

$$\mathbf{I}_{\text{п.}}=\mathbf{I}_0+\mathbf{I}, \tag{6}$$

[1] Внимание авторов к рассматриваемой задаче было привлечено работами Телеснина [3].

где $\mathbf{I}_0 = \varkappa \mathbf{H}$ — вектор упругой намагниченности; $\mathbf{I}$ — вектор вязкой намагниченности.

Учет влияния магнитной вязкости на процесс перемагничивания можно произвести с помощью уравнения Аркадьева

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = \beta (\varkappa \mathbf{H} - \mathbf{I}), \tag{7}$$

где β — коэффициент магнитной вязкости; $\varkappa$ — коэффициент магнитной восприимчивости, соответствующий предельному полю.

Векторы магнитной индукции $\mathbf{B}$, напряженности $\mathbf{H}$ и намагниченности $\mathbf{I}$ можно считать параллельными оси z. Так как задача обладает цилиндрической симметрией, то

$$B = B(r, t), \quad H = H(r, t), \quad I = I(r, t).$$

Исключая из уравнения (1) и (2) вектор $\mathbf{E}$, будем иметь

$$\Delta_2 H = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial B}{\partial t}, \tag{8}$$

где

$$\Delta_2 H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right). \tag{9}$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения (5) и (6), получаем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) = \alpha \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} + 4\pi\alpha \frac{\partial I}{\partial t},$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta (\varkappa H - I),$$

где

$$\alpha = \frac{4\pi\sigma}{c^2}, \quad \mu_0 = 1 + 4\pi\varkappa_0.$$

Краевые и начальные условия, очевидно, имеют вид

$$H(r_0, t) = H_1; \quad H(r, 0) = H_0; \quad I(r, 0) = \varkappa H_0,$$

где r_0 — радиус цилиндра.

Вводя новые функции $h = H - H_1$, $i = I - \varkappa H_1$, мы приходим к следующей математической задаче; найти решение системы двух уравнений

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) = \alpha \mu_0 \frac{\partial h}{\partial t} + 4\pi\alpha \frac{\partial i}{\partial t}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \beta (\varkappa h - i) \tag{11}$$

с однородным краевым условием

$$h(r_0, 0) = 0 \tag{12}$$

и начальными условиями

$$h(r, 0) = H_0 - H_1, \tag{13}$$

$$i(r, 0) = \varkappa (H_0 - H_1). \tag{14}$$

Зная функции $h = h(r, t)$, $i = i(r, t)$, мы найдем величину магнитной индукции

$$B(r, t) = \mu_0 H + 4\pi I = (\mu_0 + 4\pi\varkappa) H_1 + \mu_0 h + 4\pi i$$

или

$$B(r, t) = \mu H_1 + \mu_0 h(r, t) + 4\pi i(r, t), \tag{15}$$

где $\mu = \mu_0 + 4\pi\varkappa = 1 + 4\pi(\varkappa_0 + \varkappa)$, а также поток магнитной индукции через поперечное сечение

$$\Phi(t) = 2\pi \int_0^r Br dr. \tag{16}$$

§ 2. Решение задачи

Решение поставленной выше задачи (10)—(14) будем искать методом разделения переменных, полагая

$$h(r, t) = R(r) f(t); \quad i(r, t) = R(r) \varphi(t). \tag{17}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (10) и (11) и производя разделение переменных, получаем для $R(r)$ уравнение Бесселя нулевого порядка

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) + \lambda R = 0 \tag{18}$$

с условием ограниченности при $r = 0$

$$R(0) < \infty. \tag{19}$$

Второе краевое условие

$$R(r_0) = 0 \tag{20}$$

вытекает из условия (12). В уравнении (18) λ — параметр разделения.

Для функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ будем иметь уравнения

$$\alpha\mu_0 \dot{f} + 4\pi\alpha\dot{\varphi} + \lambda f = 0, \tag{21}$$

$$\dot{\varphi} + \beta\varphi - \beta\varkappa f = 0. \tag{22}$$

Уравнение (18) и условие (19) дают: $R(r) = J_0(\sqrt{\lambda} r)$.

Полагая $r = r_0$ и пользуясь выражением (20), будем иметь: $J_0(\sqrt{\lambda} r_0) = 0$.

Обозначим $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \ldots$ — корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\nu) = 0. \tag{23}$$

Каждому ν_m соответствует собственное значение

$$\lambda_m = \left(\frac{\nu_m}{r_0}\right)^2 \tag{24}$$

и собственная функция

$$R_m(r) = J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0} r\right), \tag{25}$$

норма которой равна

$$\int_0^{r_0} J_0^2\left(\frac{\nu_m}{r_0} r\right) r dr = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\nu_m). \tag{26}$$

Каждому значению λ_m соответствует решение $f_m(t)$, $\varphi_m(t)$ уравнений (21) и (22), так что можно написать

$$\alpha\mu_0\dot{f}_m+\lambda_m f+4\pi\dot{\varphi}_m=0, \tag{21'}$$

$$-\beta\varkappa f+\dot{\varphi}_m+\beta\varphi_m=0. \tag{22'}$$

Положим

$$f_m(t)=a_m e^{-kt}, \quad \varphi_m(t)=b_m e^{-kt}.$$

Подстановка (27) в (21') и (22') дает

$$(\lambda_m-\alpha k\mu_0)a_m-4\pi\alpha k b_m=0, \quad -\beta\varkappa a_m+(\beta-k)b_m=0. \tag{27}$$

Приравнивая нулю детерминант этой однородной системы уравнений, получаем характеристическое уравнение для определения k

$$(\beta-k)(\lambda_m-\alpha k\mu_0)-4\pi\alpha\beta\varkappa k=0$$

или

$$\alpha\mu_0 k_0^2-(\lambda_m-\alpha\beta\mu)k+\beta\lambda_m=0. \tag{28}$$

Дискриминант этого квадратного уравнения

$$\Delta=(\lambda_m+\alpha\beta\mu)^2-4\alpha\beta\mu_0\lambda_m=(\lambda_m-\alpha\beta\mu)^2+4\alpha\beta(\mu-\mu_0)\lambda_m>0,$$

т. е. все корни k_{1m} и k_{2m} уравнения (28) вещественны.

Из соотношений

$$k_{1m}+k_{2m}=\frac{1}{\alpha\mu_0}(\lambda_m+\alpha\beta\mu); \quad k_{1m}k_{2m}=\frac{\beta\lambda_m}{\alpha\mu_0} \tag{29}$$

видно, что все корни k_{1m} и k_{2m} положительны: $k_{1m}>0$, $k_{2m}>0$ при всех значениях m.

Таким образом, уравнения (10) и (11) при однородном краевом условии (12) имеют частные решения вида

$$h_m(t)=(a_{1m}e^{-k_{1m}t}+a_{2m}e^{-k_{2m}t})J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right); \quad i_m(t)=(b_{1m}e^{-k_{1m}t}+b_{2m}e^{-k_{2m}t})J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right)$$

и, следовательно, решение задачи (10)—(14) дается рядами

$$\left.\begin{aligned} h(r,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}(a_{1m}e^{-k_{1m}t}+a_{2m}e^{-k_{2m}t})J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right);\\ i(r,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}(b_{1m}e^{-k_{1m}t}+b_{2m}e^{-k_{2m}t})J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где a_{1m}, a_{2m}, b_{1m}, b_{2m} — коэффициенты, подлежащие определению.

Начальные условия дают

$$a_{1m}+a_{2m}=c_m; \quad b_{1m}+b_{2m}=\varkappa c_m, \tag{31}$$

где c_m — коэффициенты ряда $H_0-H_1=\sum\limits_{m=1}^{\infty}c_m J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right)$,

равные

$$c_m=\frac{\int\limits_0^{r_0}(H_0-H_1)J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}r\right)r\,dr}{\frac{r_0^2}{2}J_1^2(\nu_m)}$$

или

$$c_m = \frac{2(H_0 - H_1)}{\nu_m J_1(\nu_m)}, \tag{32}$$

так как

$$\int_0^{r_0} J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0}\right) r dr = \frac{r_0^2}{\nu_m^2} \int_0^{\nu_m} J_0(\xi) \xi d\xi = \frac{r_0^2}{\nu_m} J_1(\nu_m). \tag{33}$$

Выражая из второго уравнения (29) b_{1m} и b_{2m} через a_{1m} и a_{2m}

$$b_{1m} = \frac{\beta\varkappa}{\beta - k_{1m}} a_{1m}, \quad b_{2m} = \frac{\beta\varkappa}{\beta - k_{2m}} a_{2m} \tag{34}$$

и обращаясь затем к уравнениям (31), находим

$$a_{1m} = \frac{-k_{2m}(\beta - k_{1m})}{\beta(k_{1m} - k_{2m})} c_m, \quad a_{2m} = \frac{-k_{1m}(\beta - k_{2m})}{\beta(k_{2m} - k_{1m})} c_m. \tag{35}$$

Найдем теперь выражение для магнитной индукции $B(r, t) = \mu H_1 + \mu_0 h(r, t) + 4\pi i(r, t)$.

Пользуясь разложениями (30) для h и i, можно написать

$$B(r, t) = \mu H_1 + \sum_{m=1}^{\infty} (d_{1m} e^{-k_{1m}t} + d_{2m} e^{-k_{2m}t}) J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0} r\right), \tag{36}$$

где

$$\left.\begin{aligned} d_{1m} &= \mu_0 a_{1m} + 4\pi b_{1m} = \frac{\beta\mu - \mu_0 k_{1m}}{\beta - k_{1m}} a_{1m}, \\ d_{2m} &= \mu_0 a_{2m} + 4\pi b_{2m} = \frac{\beta\mu - \mu_0 k_{2m}}{\beta - k_{2m}} a_{2m}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Подставляя сюда выражения для a_{1m} и a_{2m} из (35), получаем

$$d_{1m} = \frac{-k_{2m}(\beta\mu - k_{1m}\mu_0)}{\beta(k_{1m} - k_{2m})} c_m, \quad d_{2m} = \frac{-k_{1m}(\beta\mu - k_{2m}\mu_0)}{\beta(k_{2m} - k_{1m})} c_m. \tag{38}$$

Полный поток магнитной индукции через поперечное сечение равен

$$\Phi(t) = 2\pi \int_0^{r_0} B(r, t) r dr = \pi r_0^2 \mu H_1 + 2\pi r_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} (d_{1m} e^{-k_{1m}t} + d_{2m} e^{-k_{2m}t}) \frac{J_1(\nu_m)}{\nu_m}, \tag{39}$$

так как

$$\int_0^{r_0} J_0\left(\frac{\nu_m}{r_0} r\right) r dr = \frac{r_0^2}{\nu_m} J_1(\nu_m).$$

Первое слагаемое, очевидно, является предельным значением при $t \to \infty$ потока магнитной индукции

$$\lim_{t \to \infty} \Phi(t) = \Phi_0, \text{ где } \Phi_0 = \pi r_0^2 \mu H_1.$$

§ 3. Исследование решения

Корни квадратного уравнения (27), соответствующие λ_m и обозначенные нами k_{1m} и k_{2m}, неограниченно возрастают с ростом m $(m \to \infty)$, так как при этом неограниченно возрастают собственные значения

$$\lambda_m = \left(\frac{\nu_m}{r_0}\right)^2,$$

где ν_m — корни уравнения $J_0(\nu)=0 \quad (\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_m<\ldots)$.[2]

Поэтому, начиная с некоторого момента, должен установиться так называемый регулярный режим, при котором определяющим среди членов ряда (50) является член, соответствующий наименьшему из корней k_{lm}.

Если k_{11} — наименьший корень, то можно написать

$$\Phi(t)\simeq\Phi_0+\Phi_1 e^{-k_{11}t}, \tag{40}$$

где

$$\Phi_0=\pi r_0^2\mu H_1, \tag{41}$$

$$\Phi_1=2\pi r_0^2 d_{11}\frac{J_1(\nu_1)}{\nu_1}. \tag{42}$$

Из физических соображений ясно, что $\Phi_1>0$, если $H_1<H_0$ и $\Phi_1<0$, если $H_1>H_0$.

Величина Φ_0 измеряется непосредственно при стационарном режиме (в заключительной стадии процесса). Зная Φ_0, находим

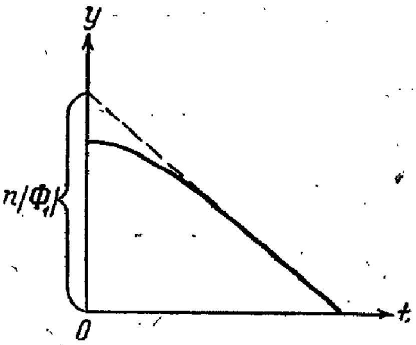
$$\mu=\frac{\Phi_0}{\pi r_0^2 H_1}\quad (H_1\neq 0). \tag{43}$$

Если $H_1=0$, то $\Phi_0=0$ и $\Phi=\Phi_1 e^{-k_{11}t}$.

Производя измерение потока $\Phi=\Phi(t)$ на регулярном режиме, можно найти величины Φ_1 и k_{11}.

В самом деле,

$$\ln|\Phi(t)-\Phi_0|=\ln|\Phi_1|-k_{11}t. \tag{44}$$



Отсюда видно, что корень k_{11} равен угловому коэффициенту прямой $y(t)=\ln|\Phi(t)-\Phi_0|$, а величина $\ln|\Phi_1|$ равна отрезку, отсекаемому прямой $y=y(t)$ на оси y (см. рисунок). (При вычислении k_{11}, кроме того, можно было бы воспользоваться формулой $k_{11}=\frac{1}{t_2-t_1}\ln\left|\frac{\Phi(t_1)-\Phi_0}{\Phi(t_2)-\Phi_0}\right|$).

Зависимость $y(t)=\ln|\Phi(t)-\Phi_0|$ для малых t носит нелинейный характер. Момент $t=t_0$, при котором эта зависимость становится линейной, соответствует выходу на регулярный режим.

Таким образом, экспериментальные данные позволяют нам непосредственно вычислять величины μ, k_{11} и Φ_1.

Покажем теперь, что, зная μ, k_{11} и Φ_1, можно найти коэффициенты магнитной вязкости β и вязкости восприимчивости $\varkappa$.

В самом деле, перепишем характеристическое уравнение в виде

$$\alpha k_{11}^2\mu_0+(\lambda_1-\alpha k_{11}\mu)\beta=\lambda k_{11}. \tag{45}$$

---

[2] В самом деле, меньший корень характеристического уравнения

$$k_m=\frac{\lambda_m+\alpha\beta\mu-\sqrt{(\lambda_m-\alpha\beta\mu)^2+4\alpha\beta\lambda_m(\mu-\mu_0)}}{2\alpha\mu_0}$$

является возрастающей функцией λ, что следует из положительности производной

$$\frac{\partial k}{\partial\lambda}=\frac{1}{2\alpha\mu_0}\left\{1-\frac{\lambda+\alpha\beta\mu-2\alpha\beta\mu_0}{\sqrt{(\lambda+\alpha\beta\mu)^2-4\alpha\beta\lambda\mu_0}}\right\}=\frac{1}{2\alpha\mu_0}\left(1-\frac{p}{q}\right)>0,$$

так как $q^2-p^2=4\alpha^2\beta^2\mu_0(\mu-\mu_0)>0$.

Второе уравнение для определения β и μ_0 получим, преобразуя выражение (42). Подставляя в (42) выражение для d_{11}

$$d_{11}=-\frac{k_{21}(\beta\mu-k_{11}\mu_0)}{\beta(k_{11}-k_{21})}c_1,\qquad c_1=\frac{2(H_0-H_1)}{\nu_1 J_1(\nu_1)}$$

и исключая отсюда с помощью (29) второй корень

$$k_{21}=\frac{\beta\lambda_1}{\alpha\mu_0 k_{11}},\tag{46}$$

приходим к уравнению

$$(\alpha k_{11}^2\psi-k_{11})\mu_0+(\mu-\lambda_1\psi)\beta=0,\tag{47}$$

где

$$\psi=\frac{\Phi_1}{4\pi(H_0-H_1)},\tag{48}$$

$$\lambda_1=\frac{\nu_1^2}{r_0^2}=\frac{5.783}{r_0^2},\tag{49}$$

$\nu_1=2.4048$ — первый корень уравнения $J_0(\nu)=0$.

Из уравнений (45) и (47) получаем следующие формулы для определения коэффициентов магнитной вязкости

$$\beta=\frac{\lambda_1 k_{11}(1-\alpha k_{11}\psi)}{\lambda_1-2\alpha\lambda_1 k_{11}\psi+\alpha^2\mu^2 k_{11}^2\psi}\tag{50}$$

и вязкой магнитной восприимчивости

$$\varkappa=\frac{\mu-\mu_0}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}\left[\mu-\frac{\lambda_1(\mu-\lambda_1\psi)}{\lambda_1-2\alpha\lambda_1 k_{11}\psi+\alpha^2\mu^2 k_{11}^2\psi}\right].\tag{51}$$

§ 4. Учет тормозящего действия обмотки

При изменении магнитного поля от величины H_0 до H_1 в обмотке возникает индукционный ток, оказывающий обратное действие на поле внутри цилиндра.

Учет тормозящего действия обмотки приводит к изменению лишь краевого условия на поверхности цилиндра.[3]

В самом деле, электродвижущая сила индукции в обмотке равна

$$\mathscr{E}=\oint\limits_C E_s ds,\tag{52}$$

где C — контур, ограничивающий поперечное сечение s цилиндра.

Пользуясь вторым уравнением Максвелла и уравнением

$$\Delta_2 H=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial B}{\partial t},$$

преобразуем контурный интеграл (52)

$$\mathscr{E}=\iint\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{E}\,dS=-\frac{1}{c}\iint\limits_S\frac{\partial B}{\partial t}dS=-\frac{c}{4\pi\sigma}\iint\limits_S\Delta_2 H dS.$$

[3] Это было показано Никитиной, решившей задачу о размагничивании цилиндра с обмоткой (см. [4]).

Пользуясь затем формулой Грина

$$\iint\limits_S (u\Delta v - v\Delta u)\, dS = \oint\limits_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds$$

при $u=1$, $v=H$, получим

$$\mathcal{E} = -\frac{c}{4\pi\sigma}\oint\limits_C \frac{\partial H}{\partial r}\, ds$$

или

$$\mathcal{E} = -\frac{cl}{4\pi\sigma}\frac{\partial H}{\partial r}(r_0, t), \tag{53}$$

где $l=2\pi r_0$ — длина одного витка.

С другой стороны,

$$\mathcal{E} = I\rho l \quad \text{или} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{\rho l}, \tag{54}$$

где I — индукционный ток в обмотке; ρ — линейное сопротивление обмотки.

Учитывая граничное условие

$$H(r_0, t) - H_1 = \frac{4\pi}{c} nI \tag{55}$$

или, в силу (54),

$$\mathcal{E} = \frac{c\rho l}{4\pi n}[H(r_0, t) - H_1], \tag{56}$$

получим из (53)

$$H(r_0, t) = H_1 + \frac{n}{\rho\sigma}\frac{\partial H}{\partial r}(r_0, t). \tag{57}$$

Следовательно, учет тормозящего действия обмотки привел нас к краевому условию третьего рода на поверхности цилиндра

$$H(r_0, t) + \delta\frac{\partial H}{\partial r}(r_0, t) = H_1 \left(\delta = \frac{n}{\rho\sigma}\right) \tag{58}$$

вместо прежнего условия $H(r_0, t) = H_1$.

Полагая $H = H_1 + h(r, t)$; $I = \varkappa H_1 + i(r, t)$, получаем для функций $h(r, t)$ и $i(r, t)$ следующую систему уравнений

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right) = \alpha\mu_0\frac{\partial h}{\partial t} + 4\pi\alpha\frac{\partial i}{\partial t}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \beta(\varkappa h - i) \tag{11}$$

с однородным краевым условием

$$h(r_0, t) + \delta\frac{\partial h}{\partial r}(r_0, t) = 0 \tag{58}$$

и начальными условиями

$$h(r, 0) = H_0 - H_1, \tag{13}$$

$$i(r, 0) = \varkappa(H_0 - H_1), \tag{14}$$

отличающуюся от задачи (10)—(14) только краевым условием (58).

Решая эту систему методом разделения переменных, т. е. полагая

$$h(r, t) = f(t) R(r); \quad i(r, t) = \varphi(t) R(r),$$

мы получим для функции $R(r)$ уравнение Бесселя нулевого порядка

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda R = 0 \tag{59}$$

с краевым условием

$$R(r_0) + \delta R'(r_0) = 0 \tag{60}$$

и условием ограниченности при $r = 0$

$$R(0) < \infty. \tag{61}$$

Для функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ уравнения (21) и (22) остаются в силе.

Из (59) и (61) следует

$$R(r) = J_0(\sqrt{\lambda} r).$$

Подставляя это выражение в краевое условие (60), мы получим трансцендентное уравнение для определения λ

$$J_0(\sqrt{\lambda} r_0) + \delta J_0'(\sqrt{\lambda} r_0) = 0$$

или

$$J_0(y) - \delta J_1(y) = 0,$$

где $y = \sqrt{\lambda} r_0$. Корни этого уравнения $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ можно приближенно найти либо графически, либо с помощью рядов для функций $J_0(y)$ и $J_1(y)$.

Каждому собственному значению $\lambda_m = \left(\frac{y_m}{r_0}\right)^2$ соответствует собственная функция $R_m(r) = J_0\left(\frac{y_m}{r_0} r\right)$.

Собственные функции $R_m(r)$ ортогональны между собой

$$\int_0^{r_0} J_0\left(\frac{y_m}{r_0} r\right) J_0\left(\frac{y_n}{r_0} r\right) r\,dr = 0 \quad (m \neq n)$$

и имеют норму

$$N_m = \int_0^{r_0} J_0^2\left(\frac{y_m}{r_0} r\right) r\,dr = \frac{r_0^2}{2} \left[J_0^2(y_m) + J_1^2(y_m)\right].$$

Общее решение задачи будет иметь вид

$$h(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{1m} e^{-k_{1m} t} + a_{2m} e^{-k_{2m} t}\right) J_0\left(y_m \frac{r}{r_0}\right),$$

$$i(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(b_{1m} e^{-k_{1m} t} + b_{2m} e^{-k_{2m} t}\right) J_0\left(y_m \frac{r}{r_0}\right).$$

Коэффициенты a_{1m}, a_{2m}, b_{1m}, b_{2m} попрежнему будут определяться по формулам (34) и (35).

Выражение для c_m должно измениться

$$c_m = \frac{(H_0 - H_1) \int_0^{r_0} J_0\left(\frac{y_m}{r_0} r\right) r\,dr}{N_m}$$

или

$$c_m = \frac{2(H_0 - H_1) J_1(y_m)}{y_m [J_0^2(y_m) + J_1^2(y_m)]}.$$

Все последующие рассуждения §§ 2 и 3 вплоть до окончательных формул (50) и (51) для β и $\varkappa$ остаются без изменения. При этом следует лишь учитывать новые выражения для коэффициента c_1, что скажется лишь на значении величины ψ. Везде под ψ надо подразумевать выражение

$$\psi = \frac{\Phi_1 [J_0^2(y_1) + J_1^2(y_1)]}{4\pi (H_0 - H_1) J_1^2(y_1)}.$$

В случае слабого влияния обмотки (δ — мало) не представляет труда получить поправки к решению задачи без учета обмотки (см. § 2), производя всюду разложение по степеням малого параметра δ. Однако мы на этом не останавливаемся.

Литература

[1] Б. А. Введенский. ЖРФХО, *55*, 1, 1923; А. Н. Тихонов. Сб. ст. под ред. В. К. Аркадьева. Изд. ОТН АН СССР, стр. 80, 1938. — [2] А. Н. Тихонов. ЖТФ, *VII*, 38, 1937; А. Н. Тихонов. Сб. ст. под ред. В. К. Аркадьева, Изд. ОТН АН СССР, стр. 117, 1938. — [3] Р. В. Телеснин. ЖЭТФ, *18*, вып. II, 970, 1948; ДАН СССР, *XXV*, № 5, 659 и др., 1950. — [4] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. ГТТИ, стр. 479, 1951.

Поступило в Редакцию
29 октября 1952 г.