О РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

Решение задачи Коши для квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}A(t,x,u)+\frac{\partial}{\partial t}B(t,x,u)=F(t,x,u) \tag{1}$$

обычно ищется для достаточно гладких начальных условий. При этом решение определяется в такой окрестности кривой, несущей начальные данные, в которой характеристики не пересекаются. Если же характеристики пересекаются или начальные данные разрывны, то решение не всегда может быть найдено в классе непрерывных функций, и надо обращаться к разрывным функциям.

Изучению разрывных решений и посвящена настоящая статья [1, 2].

1. Квазилинейное уравнение (1) можно рассматривать как следствие интегрального соотношения («закона сохранения»)

$$\int\limits_C A\,dt-B\,dx=\iint\limits_S F\,dx\,dt, \tag{2}$$

где S — произвольная область на плоскости x,t, лежащая внутри области определения решения и ограниченная (достаточно гладкой) кривой C.

Уравнение (2), вообще говоря, может иметь недифференцируемые решения $u=u(x,t)$; предполагая дифференцируемость функций, входящих в (2), мы получим из (2) дифференциальное уравнение (1).

При изучении разрывных решений мы будем исходить из уравнения (2), решение которого можно рассматривать как обобщенное решение квазилинейного дифференциального уравнения (1). Для однозначного определения разрывных решений уравнения (2) следует требовать выполнения на линиях разрыва дополнительных условий, о которых будет сказано ниже.

Докл. АН СССР. Нов. серия. — 1954. — Т. XCIX (99), № 1. — С. 27-30.

Для упрощения исследования будем рассматривать решения уравнения (2) $u = u(x,t)$, являющиеся непрерывными и дифференцируемыми всюду, кроме конечного числа дифференцируемых кривых, на которых будем предполагать существование предельных значений с обеих сторон линии разрыва.

При $t = 0$ должно быть выполнено начальное условие

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — кусочно-непрерывная функция, определяемая на отрезке (a,b) оси x и имеющая конечное число точек разрыва производной.

Функции A, B, F, A_u, B_u предполагаются дифференцируемыми функциями своих аргументов. Будем предполагать, что

$$f = \frac{A_u}{B_u}$$

является монотонно убывающей функцией аргумента u. Для монотонно возрастающей функции $f(t,x,u)$ все рассуждения проводятся аналогично.

2. Если $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема на (a,b), то решение может быть построено при помощи характеристик, определяемых уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u), \quad \frac{du}{dt} = g(t,x,u) \quad \left(g = \frac{F - A_x - B_t}{B_u}\right) \tag{3}$$

в области $t \leqslant t_0$, в которой характеристики, соответствующие начальному значению $u(x,0) = \varphi(x)$, не пересекаются.

Если $\varphi(x)$ имеет угловые точки, то построенная тем же способом функция $u = u(x,t)$ будет иметь разрыв производных на характеристиках, соответствующих угловым точкам. Нетрудно видеть, что эта функция удовлетворяет уравнению (2).

3. Пусть в точке $x = x_0$ функция $\varphi(x)$ разрывна так, что

$$\varphi(x_0 - 0) < \varphi(x_0 + 0).$$

Через точку $x = x_0$ можно провести две характеристики, проекции которых L_1 и L_2 имеют угловые коэффициенты

$$k_1 = f[0, x_0, \varphi(x_0 - 0)], \quad k_2 = f[0, x_0, \varphi(x_0 + 0)]. \tag{4}$$

Так как $k_1 > k_2$, то в области между L_1 и L_2 решение непосредственно не определяется.

Рассмотрим семейство характеристик

$$u = u(t, x'_0, t_0, u'_0), \tag{5}$$

$$x = x(t, x'_0, t_0, u'_0), \tag{6}$$

и положим $x'_0 = x_0$, $t = 0$, а u'_0 будем менять от $\varphi(x_0 - 0)$ до $\varphi(x_0 + 0)$. Нетрудно показать, что уравнение (6) разрешимо относительно u'_0:

$$u'_0 = x^{-1}(t, x, x_0);$$

подставим это выражение в (5). Полученная таким образом функция $u = u(t, x, x_0)$ удовлетворяет уравнению (2), непрерывна на L_1 и L_2, однако ее производные, вообще говоря, разрывны на L_1 и L_2. В рассмотренном случае разрыв в начальных данных $\varphi(x_0 - 0) < \varphi(x_0 + 0)$ неустойчив и распадается, порождая слабый разрыв в решении.

4. Пусть $x = \xi(t)$ — линия, на которой функция $u = u(x, t)$, удовлетворяющая уравнению (2), разрывна, причем существуют предельные значения $u_{\text{л}}$, $u_{\text{п}}$ функции $u(x, t)$ с обеих сторон линии разрыва. Предполагая, что $\xi(t)$ — возрастающая функция t, и применяя уравнение (2) к прямоугольнику

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad \xi(t_1) < x < \xi(t_2),$$

будем иметь:

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\, A[t, x_2, u(t, x_2)] - A[t, x_1, u(t, x_1)] \,\}\, dt -$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} \{\, B[t_2, x, u(t_2, x)] - B[t_1, x, u(t_1, x)] \,\}\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F[t, x, u(t, x)]\, dx\, dt. \tag{7}$$

Пользуясь теоремой о среднем значении и переходя к пределу при

$$\Delta t = t_2 - t_1 \to 0 \quad \text{и} \quad \Delta x = x_2 - x_1 \to 0,$$

получаем условие

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{A_{\text{л}} - A_{\text{п}}}{B_{\text{л}} - B_{\text{п}}}, \tag{8}$$

которое связывает угловой коэффициент наклона касательной к линии разрыва с предельными значениями функций A и B слева и справа на линии разрыва.

Если $\xi(t)$ — убывающая функция t, то соотношение (8) принимает вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{A_{\text{л}} - A_{\text{п}}}{B_{\text{л}} - B_{\text{п}}}. \tag{8$'$}$$

З а м е ч а н и е. Нетрудно показать, что если соотношение (8) удовлетворяется вдоль некоторой линии $x = \xi(t)$ и, кроме того, уравнение (2) выполняется для области S, не пересекающей кривой $x = \xi(t)$, то уравнение (2) удовлетворяется также и для области, пересекающей линию

$$x = \xi(t).$$

Будем называть кривую L $(x = \xi(t))$ л и н и е й с и л ь н о г о р а з р ы в а, если в каждой точке этой линии выполнено «условие устойчивости»

$$u_{\text{л}} > u_{\text{п}}. \tag{9}$$

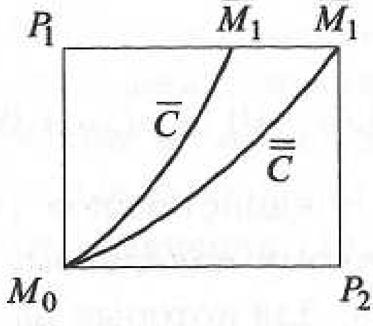

Рис. 1

Если для некоторой линии L $(x = \xi(t))$ разрыва функции $u = u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению (2), в некоторый момент $t = t_0$ условие (9) нарушено, то, принимая $u = u(x, t_0)$ в качестве начальной функции, можно построить, в силу п. 3, решение, для которого разрыв при $x = \xi(t_0)$ вырождается в слабый разрыв. Иными словами, решение уравнения (2) без дополнительного условия устойчивости определено неоднозначно.

Если функция f монотонно убывает по u, то береговое условие (9) эквивалентно условию

$$f_{\text{л}} > f_{\text{п}}. \tag{10}$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{A_{\text{л}} - A_{\text{п}}}{B_{\text{л}} - B_{\text{п}}} = f(t, \xi, u^*), \tag{11}$$

где

$$u_{\text{л}} > u^* > u_{\text{п}}.$$

Отсюда следует неравенство

$$f_{\text{л}} < f^* < f_{\text{п}},$$

которое показывает, что линия сильного разрыва в каждой точке M заключена между характеристиками L_1 и L_2, проведенными из точки M и имеющими угловые коэффициенты $f_{\text{л}}$ и $f_{\text{п}}$.

5. Будем называть *регулярными решениями* такие решения уравнения (2), для которых линия разрыва является линией сильного разрыва.

Пусть

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \text{при} \quad x = x_0$$

разрывна, так что

$$\varphi(x_0 - 0) > \varphi(x_0 + 0).$$

Докажем, что существует единственное регулярное решение уравнения (2), удовлетворяющее такому начальному условию. Из точки $x = x_0$ проведем две характеристики, для которых $u_0 = \varphi(x_0 - 0)$ и $u_0 = \varphi(x_0 + 0)$; проекции этих характеристик L_1 и L_2 на плоскость x, t имеют при $t = 0$ угловые коэффициенты

$$k_1 = f[0, x_0, \varphi(x_0 - 0)], \quad k_2 = f[0, x_0, \varphi(x_0 + 0)], \tag{12}$$

причем $k_1 < k_2$. Обозначим $u = u_1(x, t)$ — решение задачи Коши, определяемое гладкими начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x < x_0,$$

а $u = u_2(x,t)$ — решение задачи Коши, определяемое значениями $\varphi(x)$ при $x > x_0$. Функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ определены в области между L_1 и L_2, по крайней мере, для некоторого промежутка $0 < t < \bar{t}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{A[t,\xi,u_1(\xi,t)] - A[t,\xi,u_2(\xi,t)]}{B[t,\xi,u_1(\xi,t)] - B[t,\xi,u_2(\xi,t)]} = Q(t,\xi) \tag{13}$$

и покажем, что оно имеет естественное решение, удовлетворяющее начальному условию $\xi(0) = x_0$.

Пусть $x = x_1(t)$ и $x = x_2(t)$ — уравнения кривых L_1 и L_2. Применим теорему о среднем к функции $Q(t,\xi)$; найдется такое значение $u = u^*$, что

$$Q(t,\xi) = f[t,\xi,u^*] \quad (u_2(\xi,t) < u^* < u_1(\xi,t)). \tag{14}$$

С другой стороны,

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{L_1} = x_1'(t) = f[t,x,u_1(t,x_1)] > Q(t,x_1) \tag{15}$$

и, аналогично,

$$x_2'(t) = f[t,x,u_2(t,x)] < Q(t,x). \tag{16}$$

Неравенства (15) и (16) имеют место, в частности, и при $t = 0$. Из дифференцируемости функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ и, следовательно, $Q(x,t)$ вытекает, что уравнение (13) имеет единственное решение в области между L_1 и L_2 при любых начальных данных, лежащих в этой области. В силу неравенств (15) и (16) это решение не может выйти из области, лежащей между L_1 и L_2. Устремляя начальную точку к точке $(x_0, 0)$, мы убеждаемся в том, что существует решение уравнения (13), удовлетворяющее начальному условию $\xi(0) = x_0$.

6. Чтобы убедиться в единственности построенного выше решения поставленной задачи, покажем, что:

1) через точку разрыва начальных значений x_0 может проходить только одна линия разрыва C;

2) эта линия лежит между L_1 и L_2;

3) не может быть двух решений задачи, имеющих различные линии сильного разрыва C_1 и C_2, выходящие из точки x_0.

1) Допустим существование решения, для которого из точки $x = x_0$ выходит несколько линий сильного разрыва. Пусть C_1 и C_2 — две соседние линии разрыва, причем $\xi_2(t) > \xi_1(t)$. Возьмем точку $M_1(x_1, t_1)$ на C_1 и проведем из нее характеристику $L_{\text{п}}^{(1)}$ для $u = u_{\text{п}}^{(1)}$ в область $t < t_1$. Пользуясь условием устойчивости и расположением C_1 и C_2, можно доказать, что кривая C_2 существовать не может и что характеристика $L_{\text{п}}^{(1)}$ доходит до оси x.

Аналогично доказывается, что слева от C_1 нет других линий разрыва, выходящих из точки $M_0(x_0, 0)$, и характеристика $L_{\text{л}}^{(1)}$ для $u = u_{\text{л}}^{(1)}$ доходит до оси x, что и обосновывает утверждение 1).

2) Приведенные выше рассуждения показывают, что кривая C_1 лежит в области определения функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, т. е. заключена между L_1 и L_2.

3) Пусть существуют два решения $\overline{u}(x,t)$ и $\overline{\overline{u}}(x,t)$, имеющие линии разрыва $\overline{C}$ и $\overline{\overline{C}}$. В достаточно малой окрестности точки M_0 вне области, заключенной между $\overline{C}$ и $\overline{\overline{C}}$, эти решения совпадают. Допустим, что $\overline{\overline{\xi}}(t) > \overline{\xi}(t)$, и рассмотрим прямоугольник $M_0P_1\overline{\overline{M}}_1P_2$. Очевидно, что уравнение (2) не может быть выполнено одновременно для функций $\overline{u}(x,t)$ и $\overline{\overline{u}}(x,t)$ для прямоугольника $M_0P_1\overline{\overline{M}}_1P_2$.

Если $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$, то в окрестности этой точки, как нетрудно доказать, линия сильного разрыва не может образоваться. Однако устойчивый сильный разрыв может образоваться в точке x_0 при непрерывных начальных данных, если производная $\varphi'(x)$ слева или справа равна $-\infty$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило 5 VIII 1954

Литература

1. *Олейник О. А.* О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 95, № 3. — С. 451–454.
2. *Lax P. D.* Week solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1954. — V. 7, № 1. — P. 159–193.(сокр. Comm. Pure and Appl. Math.)